

2010 夏期リレー講座初日

# 数学史リレー講座

(数学者年表と古代の数学編)

川崎真澄

## はじめに

中1から高2の皆さんこんにちは。6日間の数学史リレー講座を今日から始めます。

初日の今日は、『数学者年表と古代の数学編』として、BC1650年のアームスによる数学最初の記録から現代のペレルマンに至る約3600年を、約50人の大数学者たちとともに、この80分で駆け足で紹介いたします。その道すがら、下の予定表にある明日以降の内容に関する案内役を務めたく思います。

出講日	講師	講義内容
2010年8月 23日	川崎真澄	数学者年表と古代の数学 ～80分で50人の数学者と共に3600年の旅にご案内～
24日	小澤嘉康	微分積分誕生の歴史 ～1666年10月に向けて～
25日	熊代淳	和算と円周率
26日	網谷泰治	トポロジー誕生
27日	宮崎篤	19世紀の数学 ～カントルと集合論～
28日	平山裕之	代数学・整数論の流れ ～高木貞治先生を中心に～

学校での数学教育においては、ともすれば数学史は置き去りにされがちな現状があります。例えば、徳川家康と西郷隆盛はどちらが古い人物か？と言われれば即答できる我々ですが、数学史となると、大数学者同士であっても、「あれ?!どっちが古い人だっけ…」と考え込んだり、あるいは思いもよらなかつたりするのではないのでしょうか？

そこで、まずはウォーミングアップとして、クイズ形式で数学史に親しんでみましょう。

## §0. 数学史クイズ

Q1. 私たち2人はどちらが先に生まれたでしょうか？

- ① ピタゴラス , アルキメデス
- ② ガリレイ , デカルト
- ③ ニュートン , 関孝和
- ④ ガウス , オイラー
- ⑤ ガロア , アーベル
- ⑥ リーマン , ヒルベルト

Q2. 人名と業績&エピソードを一致させてください。

人名	業績&エピソード
ターレス	・万有引力の法則. 微分積分学の発見.
ゼノン	・5次以上の方程式に対して代数的な根の公式は存在せず.
ユークリッド	・多面体定理
アルキメデス	・浮力の原理. 「ユリイカ！」
ガロア	・円錐曲線論. 人間は考える葦である.
デカルト	・座標の導入による解析幾何学を発明. 我思う故に我在り.
パスカル	・俊足のアキレスは鈍足の亀に追いつけない. 詭弁術.
ニュートン	・ピラミッドの高さを測定.
オイラー	・原論. 幾何学(学問)に王道なし.
リーマン	・非ユークリッド幾何学

Q3. 「世界三大数学者」とはアルキメデス, ニュートンと誰でしょうか？


Q4. 0の発見は, 実は日本でなされた. YES or NO

Q5. 負(マイナス)の数は5世紀から6世紀にエジプトで利用され始めた. YES or NO

どうでしょうか？名前や業績は知っていても, 生まれた時代や活躍した時代は知らないことが少なくないなあ…と思う皆さんはこの講習に参加した甲斐があるというものです. まずは古代の数学の紹介から始め, おおまかな数学史年表を眺めることにしましょう.

## § 1. 古代から 10 世紀頃までの数学

### 1. エジプトの数学

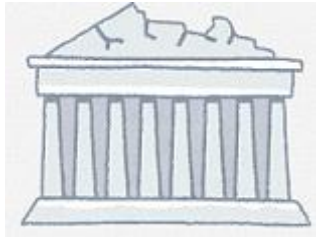
	エジプトの数学
特徴	<p>『<b>エジプトはナイルの賜物</b> (約 2500 年前の歴史家ヘロドトスの言葉)』で有名なように、ナイル川の毎年の氾濫によって肥えた土を流域に広げたことが古代エジプトの繁栄のもとだといわれている。</p> <p>このナイル川の定期的な氾濫の時期を出来る限り正確に予知し、その被害を最小限に食い止める必要にせまられたエジプト人たちの目は天文観測に向けられた。そのため、エジプトの人たちは、暦に対して相当正確な知識を得るにいたった。現にエジプトの人たちは、1 年が 365 日と <math>\frac{1}{4}</math> であることを知っていたといわれる。また、10 進法を用いた。</p> <p>エジプトの支配者たちは、ナイル河の氾濫の時期を人民に知らせ、その氾濫によってひきおこされた人民の被害を算定し、それに応じて人民の税を加減する必要があったため、これらのための計算技術が相当な進歩を示した。従って、古代エジプト人たちは、今の算数程度の知識は身につけていたと思われる。</p> <p>ナイル河の氾濫は同時に、耕地の区画を押し流してしまうので、耕地の区画の引き直しの必要から、土地測量の術も進歩を示した。これが、今日の幾何学の起りであり、この消息をよく伝えているのは、幾何学が英語で geometry と呼ばれることである (geo は土地, metry は測量の意)。</p> <p>また、ナイル河下流地域には、パピルスと呼ばれる草が繁茂しており、それから作った一種の紙の上に人々は物を書きとめていた。</p> 
人物と主な業績	<p><b>アームス(BC1700 年頃の僧侶)</b></p> <p>アームスが当時の数学を書きとめたパピルスが 1858 年、スコットランドの考古学研究者リンドによってルクソールで発見された (店に売っていたものを購入した)。これが世界最古の数学の記録とされる。</p> <p>パピルスに書かれていた内容の一部：</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Aha, その全部と <math>\frac{7}{19}</math> とで 19 になる。 (古代エジプト人は未知数 <math>x</math> を Aha という文字で表していた)。</li><li>2. 円の面積は、その直径からその <math>\frac{9}{16}</math> を引いたものの 2 乗に等しい。</li></ol>

## 2. バビロニアの数学

	バビロニアの数学
特徴	<p>チグリス河とユーフラテス河にはさまれたこの地方は、気候が温暖であり、土地も肥沃、また東西の交通の中心に位置していたため、ここにも世界最古の文明がひらけた。</p> <p>エジプト人たちはパピルスの上へ記録を残していたが、バビロニアの人たちは、粘土の上へ棒の先端で印をつけ、それを乾かして記録としていた。</p> <p>その印が楔の形をしていたので、これは楔形文字といわれている。</p> <p>バビロニア人たちは10進法のみならず60進法を採用していた。その理由に関しては様々な想像がなされているが、そのひとつとして、次のものがある。この地にはエジプトにおけるナイル河の氾濫のような現象が欠けていたため、バビロニア人たちは1年を360日と考えていた。そして、1年を円周で表すことにした。また、バビロニア人たちは、円周をその半径の長さで切っていくと、丁度6回目に元に戻ることに大きな関心をもっていた。全円周を360とみれば、その1/6は60であり、この60という数に大きな関心をもつにいたったというのである。</p> <p>現在、円周を<math>360^\circ</math>とするのがバビロニア人の考えに基づくことは、明らかである。さらに、1日を24時間に分け、1時間を60分、1分を60秒に分けたのもバビロニア人といわれている。</p> <p>また、すでに2次方程式の解法を知っていた。</p>



### 3. ギリシアの数学

	ギリシアの数学
<b>特 徴</b>	<p>夏は乾燥し、冬は温暖でしのぎやすく、またナイル河の氾濫のような脅威のないこの地へ北方から移り住んだギリシア人たちは、この恵まれた環境のもとで、自然の合理性を認め、エジプトとバビロニアからの知識を取り入れ、それらに彼ら自身の反省を加え、ここにいわゆるギリシア文化を築いた。</p> <p>彼らは、先住民族を征服してこの地に住み着いたので、先住民族を奴隷として使い、直接の生活に関することは奴隷に任せ、自らは武術、学問、芸術を磨くことに専念した。</p> <p>とりわけ、BC6～7世紀頃には、エジプトとの間に商業上の取引が行われたので、エジプト帰りの商人からエジプトの事情や文化について聞くことができた。また、エジプトへ留学するものもあった。</p> <p>エジプトの数学が実学的であったのに対し、ギリシアの数学は、  <b>「数学を科学として研究し、研究することそれ自身を尊ぶ」</b>            気風が生じた。</p> <p>すなわち、学問としての数学はその体系がギリシアにおいて出来上がったといえる。</p> <p>これは例えば次の3つの作図が定木とコンパスのみによって可能か、という問題設定をし、その解決に努力したことにみられる：</p>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること（円積問題），</li> <li>2. 与えられた立方体の体積の2倍に等しい体積をもつ立方体を作ること（立方体倍積問題），</li> <li>3. 与えられた角を三等分すること（角の三等分問題）。</li> </ol>
	<p>これらは『三大作図問題』と呼ばれ、いずれも不可能であるという結論がでたのは実に19世紀になってからであった。</p> <div data-bbox="727 1615 1043 1850" style="text-align: center;">  </div>

人物と主な業績	<p>ターレス : ①ピラミッドの影の長さを測ってピラミッドの高さを求める.          ②直径に対する円周角は直角 (ターレスの定理).          ③任意の二つの三角形で, 1 辺とその両端の角が等しいとき, その三角形は合同になることを発見.</p>
	<p>ピタゴラス : ①ピタゴラスの定理の発見.          ②<math>\sqrt{2}</math> が有理数でないことを証明.          ③正多面体は五種類に限ることを証明.</p>
	<p>ヒポクラテス : ①デロスの問題          ②ヒポクラテスの図形</p>
	<p>ゼノン : アキレスと亀などのパラドックス, 無限の概念</p>
	<p>ユークリッド : 原論を著す. 『幾何学に王道なし』</p>
	<p>アルキメデス : ①浮力の原理          ②円周率の計算          ③球の表面積と体積          ④放物線や螺旋の研究</p>
	<p>エラトステネス : ①地球の周囲の計算          ②素数の発見法</p>
	<p>ヘロン : ①ヘロンの公式          ②<math>\sqrt{A}</math> の近似値の求め方</p>
	<p>アポロニウス : 円錐曲線論</p>
	<p>メネラウス : ①メネラウスの定理          ②球面三角法の研究</p>
	<p>トレミー : トレミーの定理</p>
	<p>ディオファントス : 方程式論</p>
	<p>パップス : ①パップスの定理          ②パップス・ギュルダンの定理</p>

#### 4. ローマの数学

	ローマの数学
特徴	<p>ローマでは貴族と庶民との階級上の区別がはっきりしていて、貴族は一切の公民権を有して庶民を圧迫したので両者は融和せず、庶民の数が増加するに連れて、両者の対立が激化した。ところがギリシアのエピロス王がローマを攻めてきたので、貴族と庶民が一致協力して外敵にあたらねばならなくなり、ついに外憂を取り除くことに成功した。</p> <p>この経験から、ローマは庶民の訓練に大いに意を注ぎ、富国強兵の実をあげることに専心した。しかし、学問に関しては顧みるところがなく、至極冷淡であった。数学においても実用一辺倒であり、理論的な数学を嫌った。最も多く研究されたのは利息算であった。</p>
人物と主な業績	<p>あえて挙げれば、</p> <p>シーザー : 1年を365日とし、4年に1度366日のうるう年を設けた「ユリウス暦」を実施。</p> <p>ヴィトルヴィウス : 数学を建築に応用。「建築十書」を著す。</p>

#### 5. インドの数学

	インドの数学
特徴	<p>古代民族の中でも、インド民族は顕著な数学的能力を発揮した民族であった。幾何学においてはギリシア人に及ばなかったが、算術及び代数の分野にあってはギリシア人より優れていたといえる。ギリシア人の数記号では、単に平凡な算術計算をする場合でも煩わしい手数を要した。しかしインドで創案された「位の原則」と「零の発見」は、今日なお、我々が恩恵を受けているものである。例えば、<math>628 \times 53</math> を古代エジプトやバビロニアで用いられた数字、またローマ数字や漢数字を使って筆算してみるとよい。いかに、インド式記法が優れているかが体感できるであろう。「零の発見」は、仏教の「空」の思想から生じたものであるとする説もある。</p> <p>また、「負の数」を初めて“正式な数”として認識したのがインド人であることもインドの数学の大きな特徴であるといえよう。</p>
人物と主な業績	<p>アールヤバタ : ①連分数を利用して一次不定方程式を研究。 ②円周率を <math>3927/1250 = 3.1416</math> と計算。 ③地球の自転を唱える。</p> <p>ブラマグプタ : 「ブラーマ・スプタ・シッターンタ」(0の概念が明示的に書かれた現存する最古の書物)を表す。2次不定方程式の研究。</p> <p>バスカラ2世 : 正の数に(正と負の)2つの平方根があることを初めて示し、2次方程式が2根をもつことを指摘。</p>



## 6. 中国の数学

	中国の数学
特徴	<p>この時期の中国の数学は秦、漢の時代が中心となる。「周髀算経（しゅうひさんけい）」と「九章算術」が最も古い数学書と言われており、これらによりこの時代の数学を特徴付けられよう。前者は、紀元前2世紀頃の著作とされる。対話形式で数学と暦学の重要性が説かれており、円周率が3であることや、3辺の長さの比が3:4:5となる三角形は直角三角形となることなどの記述が見られる。後者は、紀元前後の200年の間での著作とされる。9つの章からなり、のべ246個の問題が収められているいわば問題集形式の書である。その章立ては次の通りである：</p> <p>方田、粟米、衰分、少広、商功、均輸、盈不足、<b>方程</b>、句股</p> <p>このように実用に即した内容で構成されており、また、西洋数学のように演繹的記述ではなく、帰納的に書かれている。（<b>方程式</b>の起源が見られる）。</p>
人物と主な業績	<p>祖沖之：5世紀に円周率を小数点後の7桁（3.1415926と3.1415927の間）まで求めた。この結果を西洋の数学者が計算で得たのは約1000年後である。また、円周率の分数形式の約率<math>355/113</math>も得た。</p>

## 7. アラビアの数学

	アラビアの数学
特徴	<p>AD7世紀頃起こった回教が非常な勢いを占め、強力な宗教国となったアラビアは宗教と武器の力でペルシアを合併、さらに地中海沿岸、エジプト、スペインを征服。代々の教主は学問の保護と奨励に力を注いだ。ユークリッド、アルキメデスなどの書物がアラビア語に翻訳され、ギリシアの数学がアラビアへ伝えられた。また、アラビア人たちは商人として方々へ旅行したので、インドの数学も輸入された。インドの記数法はアラビア経由でヨーロッパへ伝えられたので1, 2, …, 8, 9, 0という数字はアラビア数字と呼ばれる。独創性はないがギリシア数学とインド数学の結合にみるべきものがある。</p>
人物と主な業績	<p>アルフワリズミ：①「アルジャブル・ワルムカバラ」を著す。この書に、方程式の同値変形を書き記している。</p> <p>②彼の名前が“アルゴリズム”という用語に、アルジャブルが代数(algebra)の語源となった。</p>

## § 2. 近世の数学の夜明け前

### 1. ゲルバート

各地の数学の特徴を見てきましたが、ここで年表を見てください。西洋においては西ローマ帝国の崩壊（476 年）以降中世（東ローマ帝国の滅亡（1453 年）以前）中期までの長きに渡って、さしたる数学者がでていないことが分かると思います。これはなぜでしょうか。

この期間、ヨーロッパでは、久しく国家と国家、民族と民族の間に争いが絶えず、史家のいう、いわゆる暗黒時代を現出したのです。この時代は、強力な民族が文明国を滅ぼしては支配権を獲得し構想を続けていたので学問の興隆はなく、従って数学においても特別な発展はみられません。国境は常に移動し、異民族が相互に混交して、言語も様々で雑然としていたわけです。

ところがキリスト教の伝播とともに、その布教の手段として言語の統一が自然に行われるようになり、ラテン語が教会用語として広く流通し、さらに、それが学問上にも、商取引にも用いられることとなりました。

特権階級に列していた僧侶たちの間に、学問に対する関心を抱くものが次第に増えて行き、久しく沈滞していたヨーロッパにも、清新な学問の空気が漂い始め、数学もまた、そのような空気の中になりました。

当時、卓越した数学的才能を示した学者は見あたりませんが、そのうちで最も数学上の功績を残した学者は、999 年に法王となったゲルバートです。彼は、寺院で僧侶から数学の手ほどきを受けたのをきっかけとして、数学に強く興味を持つようになり、後にはスペインに渡って数学を学び数学者となりました。

帰国後、当時の国王オット 3 世に重用されて数学を教えたことから、国王は彼の仕事になにかと便宜を図り、当時ヨーロッパの学者が幾何学の研究をするための唯一の書とされたビューチウスの幾何学書やビューチウスの算術書など多数の書物を蒐集し精読しました。これらをもとに著書を出しています。

ゲルバートの名は、当時、学問を志す人たちの憧れの的となり、彼の教えを受けるために、フランス、ドイツ、イタリアから多くの人々が訪れました。彼らはゲルバートから哲学や数学を学びましたが、次第に原語により学びたいと考え、ことにアリストテレスの哲学全集を入手したいと願い、探し出したもののギリシア語本にはかけている部分があったため、アラビア語本を入手して、これをラテン語に翻訳しました。これにより、キリスト教徒の間には、フランス人であろうが、ドイツ人であろうが、イタリア人であろうが、共通してこの書を理解することができたのです。

この翻訳が契機となって、アラビア語で書かれたユークリッドの「原論」をはじめ、多くの数学書が次々とラテン語に翻訳されたのです。

## 2. ピサのレオナルド(フィボナッチ)

13世紀の初頭、一偉人の才能と活動が数学的研究の舞台を新たにイタリアに打ち建てることになりました。この中心人物はピサのレオナルド(フィボナッチ)です。

彼は1175年にイタリアのピサで生まれました。父は工場の事務員をしており、しばしばアバカス(算盤)を利用して計算をしました。その傍らで、レオナルドは興にひかれるままに様々なことを父に質問しました。父は、ユークリッドやアルキメデスなどの偉い数学者のことや、アラビアには数学の書物がたくさんあることを彼に語って聞かせました。

生まれつき数学に興味を持っていた彼はますます強い関心を抱くようになり、これに呼応して父は、向上にあった古い数学書を見つけ出してレオナルドに与えたりしました。

彼は長ずるに及んで商人となり、エジプトやシリア、ギリシアなどに旅行して商売をし、旅先のいたるところで数学書を購入し、また数学に関する話には決して耳をそらしませんでした。

このような旅を続けているうちに、彼はインドの計算法の優れていることを知り、これをイタリアに広めたいと思いました。

1202年、ピサに帰り、これまでに学んだ数学を基礎にして著述に着手し、有名な「リバー・アバシー」(計算書)を出版しました。これはヨーロッパ人の手になる最初の数学書であり、インド流数学のヨーロッパへの輸出第一号となるものです。

「リバー・アバシー」はその後数世紀にわたり各国で用いられ、数学者はこの書から問題を選び出して著述をしたものです。ヨーロッパ全土にアラビア数字や零の記号が伝わり、やがて、これが全世界共通の数字として普遍的になった理由としては、同書がこれらの数字や記号を用いて書かれたものであることが大きいと思われまます。

しかし、イタリアの僧侶たちは新しい数字を容易に使おうとはしませんでした。計算方法にしても昔の方法が墨守されており、「リバー・アバシー」が世に出て100年経過してなお、フローレンスの商人は、アラビア数字を簿記に用いることを禁じられ、旧態依然としてローマ数字か、普通の言葉で表示するように強制されていました。これは、数学知識が十分に普及されていなかったことに原因があるようです。

アラビア数字を用いた計算が簡易なことと、記号と「位の原則」が実に合理的にできているので、この記法は次第にヨーロッパ全体へ普及していきました。

すなわち、レオナルドは、古代の数学を整理して、新しく発展すべく胎動していく時代に、数学研究の橋渡しをする役を演じたといえましよう。

こうしてゲルバートとフィボナッチを中継ぎとして、近世の数学の幕が開くのです。

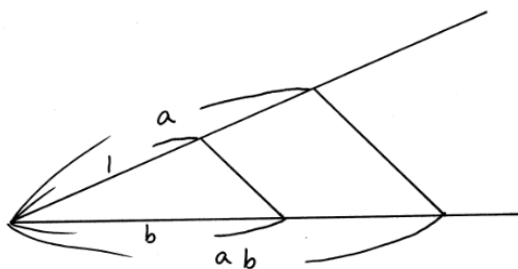
## (補足) 近世の数学の中興の祖～デカルトについて少々～

明日以降でニュートンとライプニッツによる微積分学の発見から近代までの数学史が詳しく語られます。ここまで、駆け足ではありますが、古代エジプトと古代メソポタミアの数学からピサのレオナルドまでお話ししてきました。となると、ピサのレオナルドから微積分学の発見までの間をお話しできれば、数学史の“空き”がなくなります。

この期間には欠かせない 2 つの大きな話題があると思われます。それは、①カルダノを中心とした 3 次方程式の話題②デカルトによる解析幾何学の発見、です。①については最終日に触れていただく予定です。ここではデカルトについて簡単に触れておきましょう。

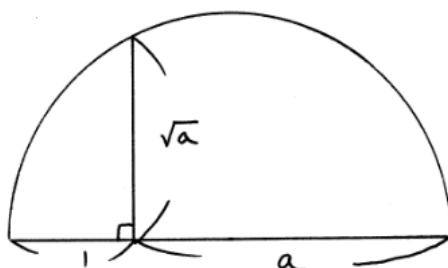
代数学において意味をもつ  $x^2 + x$  ですが、デカルト (1596–1650) の出現以前の幾何学においてはこれを面積と長さを加えることと解釈し、すなわち無意味であるとしていました。

デカルトがその研究対象としたのは、長さ、面積、体積ではなく、数そのものでした。例えば、デカルトにとっては、 $ab$  は単に比例式  $1:a = b:ab$  における第 4 項を意味しているに過ぎなく、実際、(図 1) の作図によって  $ab$  は面積に限らないことが分かるというわけです。



(図 1)

また、彼の出現以前は、 $a$  を線分の長さとする限り、 $\sqrt{a}$  も意味を持ち得なかったわけですが、これは、(図 2) の作図によって長さとして表し得ると考えられます。



(図 2)

このように、デカルトにとっては、線分の長さに代数的な演算を施した結果はまた線分の長さであったので、代数的演算と幾何学的演算の間には完全な1対1対応がつき、したがって、代数学におけるすべての方法がそのまま幾何学の研究に利用できることになり、それには彼の発見になる座標（デカルト座標）が大きな力となりました。

座標を用いた幾何学は、デカルト以前の幾何学（初等幾何学）に対して、解析幾何学と呼ばれます。なお解析幾何学の発見にはパスカルも貢献しています。

初等幾何学では、ときにうまく補助線が一本引けるか否かで問題の解決が左右されますが、解析幾何学においては、（計算が煩雑になる可能性はあっても）地道に計算を行えば必ず解決できる利点があります。

すなわち、デカルトは、選ばれし天賦の才をもった人々のものであった幾何学の門を万人に開けるようにした人といって差し支えないでしょう。1970年代には一部の人の為のものでしかなかったコンピューターが現在では遍く普及していることに似たものを感じます。（となるとそこでのデカルト的存在はWindows等となるのでしょうか・・・）

（注）6日間の講習を終えてから中学2年生の受講者から、最終日の平山先生の授業で、カルダノの公式（6日目のレジュメを参照のこと）について興味をもったので、より詳しく知りたいとの申し出がありました。そこで、12月17日と22日の2日間に渡って勉強会を開きました。初日は1時間半で、3次方程式 $x^3 = a$ の根を求めることまでを扱い、2日目はボンベッリの追及した問題に生徒たちが興味を示したので、予定を大幅に上回る4時間の勉強会となったのは喜ばしい限りです。

以下に、この勉強会で用いた筆者によるレジュメを掲載しておきます。

**(補講)**

**3 次方程式と 4 次方程式の根の公式を知る**

※最初にお断りしておきますが、今回の勉強会では、方程式の「解」ではなく「根」と呼ぶことに注意してください。

## 第1章. n 次方程式の根の公式の歴史

2 次方程式の根(虚数根を除く)を求める公式は、古代バビロニアの時代(紀元前 1700 年頃)に既に知られていました。当然、1 次方程式の根の公式についてはそれ以前に知られていたこととなります。

3 次方程式の根の公式が発見されたのは、それから実に 3000 年以上経った 16 世紀中頃です。3 次方程式の根の公式を最初に見つけたのは、スキピオーネ・フェロ(Scipione del Ferro)(1465-1526) だったと言われています。しかし、フェロの解法は現在伝わっていません。当時、一定期間内により多くの問題を解決した者を勝者とするルールに基づき、数学者同士が難問を出し合う一種の試合が流行しており、数学者は見つけた事実をすぐに発表せず、次の試合に備えて多くの問題を予め解いて、秘密にしておくのが普通だったのです。フェロも、解法を秘密にしているうちに死んでしまったのだと考えられます。

今回、§4 にて紹介する 3 次方程式の根の公式は、ニコロ・フォンタナ(Nicolo del Fontana)(1506-1557) (別名タルタリア)が発見したものです。当時の慣習通り、フォンタナもこの解法を秘密にしていたのですが、ある時は医者、またある時は占星家、またある時は賭博師、またある時は哲学者、またある時は政治家、またある時は物理学者、しかしてその実体は異能な数学者であったという、文字通り 7 つの顔をもったミラノのジローラモ・カルダノ(Gerolamo Cardano)(1501-1576)に懇願され、他には公表しないという約束で、カルダノに解法を教えました。ところが、カルダノは 1545 年に出版した *Ars Magna* (ラテン語で"偉大な方法"の意味)という書物の中で、まるで自分の手柄であるかのように、フォンタナの方法を開示してしまいました。怒ったフォンタナはカルダノと試合をするようになったのですが、カルダノは逃げ、弟子のロドヴィゴ・フェラリ(Lodovico Ferrari)(1522~1565)を代役にたてました。しかし、フォンタナは不覚をとってフェラリに負けてしまったこともあり、3 次方程式の根の公式は、現在カルダノの公式と呼ばれています。このフェラリは 4 次方程式の根の公式の発見者でもあり、彼の解法は *Ars Magna* に紹介されています。それは §5 で紹介するように、4 次方程式の解法を 3 次方程式の解法に還元するものです。

以降、5 次以上の方程式にも根の公式があるのだろうか、ということが約 300 年の間、人々を悩ます問題となりましたが、「どのような 5 次方程式も“代数的に” 解く方法は存在しない」ということが、1824 年ノルウェーのニールス・アーベル(Niels Henrik Abel)(1802~1829)によって証明され、6 次以上も同様であると決着がつけました。

参考文献：1. 代数ことはじめ(安倍齊著・森北出版・1993)

2. <http://hooktail.sub.jp/algebra/CubicEquation/>

3. [http://gakusan.gakken.jp/junior\\_high/column/mathmath/article/090909.html](http://gakusan.gakken.jp/junior_high/column/mathmath/article/090909.html)

## 第2章. 準備

### (例題1) 方程式 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ の根を“発見”しよう!

方程式  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  に対し, 左辺に  $x=1$  を代入すると  $-4$  となり, これは右辺の  $0$  とは異なるから,  $x=1$  はこの方程式の根ではないことが分かります. 次に, 左辺に  $x=2$  を代入すると  $0$  となり, これは右辺の  $0$  と等しいので,  $x=2$  はこの方程式の根であることが分かります. 従って,  $3x^2 - 5x - 2 = (x-2) \times (\quad)$  と因数分解されることとなり, 左辺の  $x^2$  の係数である  $3$  と, 定数項の  $-2$  を考慮すると,  $(\quad)$  には  $3x+1$  が入ることになります. 従って, 方程式  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  の根は  $x=2, -\frac{1}{3}$  であることが分かります.

(Q1) 次の方程式を上の方法のように“ぐっとにらんで”根をひとつ見つけた上ですべての根を見つけよ (ヒント: 以下では, いずれも少なくともひとつの根が整数となっています)

(1)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  (2)  $3x^2 - x - 10 = 0$  (3)  $5x^2 + 13x + 6 = 0$

(4)  $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$  (5)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$  (6)  $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 = 0$

(Q2)  $2$  乗して  $9$  となる数は  $\pm 3$  であること, および  $2$  乗して  $-1$  となる数は実数には存在しないことをそれぞれ  $y = x^2$  のグラフを用いて説明せよ.

(Q3) 次の方程式を根の公式を用いるなどして解け. ただし,  $2$  乗して  $-1$  となる数のひとつを  $i$  と書くことにして, この記号を用いよ. (例) 方程式  $x^2 = -1$  の根は,  $x = \pm i$  である.

(1)  $x^2 = -4$  (2)  $4x^2 = -9$  (3)  $x^2 + x + 1 = 0$  (4)  $x^2 - x + 1 = 0$  (5)  $2x^2 + x + 3 = 0$

### 【補足】

(Q3) では根がいずれも  $\circ + \triangle i$  の形になっていることが分かるでしょう. これらの数は

#### “複素数”

と呼ばれます.

一般に,  $2$  つの実数  $a, b$  に対して,  $a + bi$  の形で表される数を複素数と呼びます.

実数は複素数です. なぜなら, 実数は  $a + bi$  において  $b = 0$  とした場合だからです.

従って, 実数は複素数の特別な場合の数であり, 複素数は実数を完全に含む数の集合ということになります.

複素数  $a + bi$  に対して,  $a - bi$  をその“共役”と呼びます. 次の事実は大変に便利です:

実数を係数とする  $n$  次方程式において,  
 $a + bi$  が根のひとつであれば, その共役である  $a - bi$  も根になる.

☆(Q3)の結果で実感してください.



中世まで、否、ことによると近世まで、実数ではない数を認めたくないという数学者は少なくありませんでした。以下の方程式を見てください。

(1)  $x^2 - 3x + 2 = 0$  (2)  $x^2 - x = 0$  (3)  $x^2 + x = 0$  (4)  $2x^2 + x - 1 = 0$

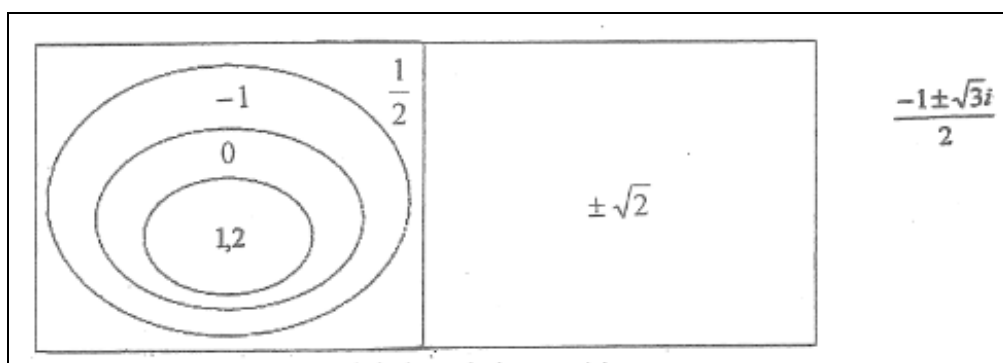
(5)  $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$  (6)  $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

これらの根は以下のようになっています：

(1)  $x = 2, 1$  (2)  $x = 1, 0$  (3)  $x = 0, -1$  (4)  $x = -1, \frac{1}{2}$ , (5)  $(2x-1)(x^2-2) = 0 \therefore x = \frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}$

(6)  $(x^2-2)(x^2+x+1) = 0 \therefore x = \pm\sqrt{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

☆(6)の因数分解は手計算では難しく、計算機を用いるのが普通です。



実数しか認めない人であれば(1)～(5)を納得することはできるのですが、(6)を納得することはできませんね。

でも、例えば(1)を納得できるけれども(2)を納得できないという立場の人(つまり自然数しか認めない人)を『視野が狭いなあ・・・』と苦笑してしまいませんか？

同様に、負でない整数しか認めない人であれば(1)と(2)を、整数しか認めない人であれば(1)～(3)を、有理数しか認めない人であれば(1)～(4)をそれぞれ納得できるけれど・・・ということになりますね。そう考えてみると、

### (6)を納得できないのは視野が、そして住む世界が狭い

といえましょう。(2)を納得できない人を決して笑うことはできません。視野を広く持ちたいものです。

このことに関連して、次の事柄を知っておくとよいでしょう。

【補足】 代数学の基本定理

複素数の範囲にまで根を探す範囲を広げれば、各係数および定数項が複素数である  $n$  次方程式には必ず丁度  $n$  個の根が見つかる。ただし、重複根があるときは重複の数だけ数えるものとする。(1799年 フリードリヒ・ガウス (Johann Carl Friedrich Gauss) (1777-1855))

(例) 6 次方程式  $x^6 - 3x^2 - 2 = 0$  は、 $x^6 - 3x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1)^2$  により、実数の範囲では  $x = \pm\sqrt{2}$  という 2 つの根しか存在しない。

複素数の範囲に広げて考えれば  $x = \pm\sqrt{2}, i, i, -i, -i$  という 6 個の根が存在する。

(注意 1) ガウスが代数学の基本定理を証明したときは、“頭の固い連中”の反論を避けるために、巧妙に複素数を隠していたとのことです。

(これは <http://d.hatena.ne.jp/ystatt/20071101> より教わりました)。

(注意 2) 代数学の基本定理により、 $n$  次方程式には  $n$  個の解があることが分かりますが、どのようにして解を得るのかはまた別の問題です。数学ではこのように、

**存在することと、それらを具体的に示すことができることは別である**

ことが少なくないので頭においておきましょう。そこを勘違いして、存在することが分かっているのだから 5 次以上の方程式の公式も存在するはずだ、と決めつけて、数多くの人とその探求に勤しんだものの、§ 1 で見たように 1824 年にアーベルによって 5 次以上の方程式を“代数的に”解く方法は発見できないことが証明されたことにより徒労に終わりました。

(Q4) 次の方程式を (Q3) の方法のように “ぐつとにらんで” 根をひとつ見つけた上ですべての根を見つけよ (ヒント: 以下で, (3), (6) 以外はいずれも少なくともひとつの根が整数となっています.)。

(1)  $x^3 = 1$  (2)  $x^3 = 8$  (3)  $x^3 = \frac{27}{8}$  (4)  $x^3 = -1$  (5)  $x^3 = -8$  (6)  $8x^3 + 27 = 0$

(7)  $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$  (8)  $x^3 + 6x - 20 = 0$  (9)  $x^3 - 15x - 4 = 0$

☆ ここで、新しい記号を導入しておきましょう。今見たように、 $x^3 = 1$  の根は

$$x = 1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

ですが、このなかの、 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  を  $\omega$  と表すことにします。すると、

$$\omega^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

となるので、 $x^3 = 1$  の根は  $x = 1, \omega, \omega^2$  と表せます。次のようにまとめておきます：

**公式**  $A^3 = 1$  の根は、 $A = 1, \omega, \omega^2$

(Q5) 3次方程式  $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$  に対し,

(1) 根を確認せよ (Q1(4)で求めてあります) (2) 両辺を2で割った式を書け.

(3) その式に対し,  $X = x - \frac{1}{6}$  とおくことにより,  $X$  の3次方程式に書き換えよ.

(4) (1) で確認した根のそれぞれから  $\frac{1}{6}$  を引いたものが (3) で得た3次方程式の根と一致することを確認せよ.

(Q6) 3次方程式  $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \cdots \textcircled{1}$  に対し,

(1) 両辺を  $a_0$  で割った式を書け.

(2) その式に対し,  $a = \frac{a_1}{a_0}, b = \frac{a_2}{a_0}, c = \frac{a_3}{a_0}$  とするとき,  $X = x + \frac{a}{3}$  とおくことにより,

$\textcircled{1}$  を  $X$  の3次方程式に書き換えよ.

$\Rightarrow$  (1), (2) の作業から,

**3次方程式の一般形は  $x^3 + px + q = 0$  としてよい**

ことが分かるでしょう. (Q5) で実感してください.

### 第3章. バビロニアの代数から

§1 でみたように, バビロニアにおける2次方程式の根の公式の発見から3次方程式の根の公式の発見までには大変な時間の経過が見られますが, §4 で紹介する3次方程式の解法には, 次のバビロニア人が知っていたとされる次の事実を用いるのが有効です.

$$\text{『連立方程式 } \begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha\beta = B \end{cases} \text{ の根は, } \begin{cases} \alpha = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \\ \beta = \frac{A}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \end{cases} \text{ (複号同順) である.』}$$

(Q7) この事実を2次方程式の根と係数の関係を用いて示せ.

## 第4章. 3次方程式の根の公式

では、いよいよカルダノの解法を紹介しましょう. 当時の風習にならない, 具体例の解法を示して, 一般的解法とします.

(例題2)

**方程式**  $x^3 - 15x - 4 = 0$  …① **を解いてみましょう**(これはQ4(9)ですすでに解いているものです!).

(解)

$x = u + v$ とおき, これを, ①の左辺に代入する:

$$x^3 - 15x - 4 = (u + v)^3 - 15(u + v) - 4 \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} (u + v)^3 - 15(u + v) - 4 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15u - 15v - 4 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - 15(u + v) - 4 \\ &= u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv - 5) - 4 \end{aligned}$$

よって,  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ uv = 5 \end{cases}$  …③ ならば,  $u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv - 5) - 4 = 0$  となる.

∴ ②より, ③を満たす  $u$  と  $v$  から  $u + v$  を作れば, それが①の根となる.

今, ③より,  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = 125 \end{cases}$  …④であり,  $\alpha = u^3, \beta = v^3$  とおくと,  $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = 125 \end{cases}$  となる.

∴ ((Q7)で見たように,)  $\alpha, \beta$  は2次方程式  $t^2 - 4t + 125 = 0$  の2つの根とみなせる.

ここで,  $t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 125}}{2} = 2 \pm 11i$  であることから,

(i)  $\alpha = 2 + 11i$  のとき,  $\beta = 2 - 11i$  であり,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{2 + 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 \\ v &= \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2 \end{aligned}$$

となる. 従って, ④をみたす  $(u, v)$  は  $3 \times 3 = 9$  通り存在する.

しかし, ③より, その中から  $uv = 5$  である  $(u, v)$  を選ばなくてはならないので, それは

$$(u, v) = (\sqrt[3]{2 + 11i}, \sqrt[3]{2 - 11i}), (\sqrt[3]{2 + 11i} \omega, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2), (\sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega)$$

となる. それぞれの組から  $u + v$  を計算すると,

$$u + v = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega \cdots \textcircled{5}$$

(ii)  $\alpha = 2 - 11i$  のとき,  $\beta = 2 + 11i$  であり,

$$u = \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2$$

$$v = \sqrt[3]{2 + 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2$$

となる. 従って, ④をみたす  $(u, v)$  は  $3 \times 3 = 9$  通り存在する.

しかし, ③より, その中から  $uv = 5$  である  $(u, v)$  を選ばなくてはならないので, それは

$$(u, v) = (\sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i}), (\sqrt[3]{2 - 11i} \omega, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2), (\sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega)$$

となる. それぞれの組から  $u + v$  を計算すると,

$$u + v = \sqrt[3]{2 - 11i} + \sqrt[3]{2 + 11i}, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega + \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 + 11i} \omega \cdots \textcircled{6}$$

ここで, ⑤と⑥が同じであること, 及び (歴史は前後しますが) 代数学の基本定理により (3次方程式は複素数の範囲で重複を含めて3個の根をもつので), 求める根は,

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega$$

であることが分かる.  $\cdots$  (答)

(Q8) Q4(9)で見たように,  $x^3 - 15x - 4 = 0$  の根は  $x = 4, -2 \pm \sqrt{3}$  であった.

一方, 上で見たように,  $x^3 - 15x - 4 = 0$  の根は

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega$$

である. すなわち,

$$\{4, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$$

$$= \{\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega\}$$

であることになるが, 4に等しいものは

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega^2, \sqrt[3]{2 + 11i} \omega^2 + \sqrt[3]{2 - 11i} \omega$$

のうちのどれか. 理由をつけて答えよ.

(Q9) 次の方程式を  $x = u + v$  とおくことにより始めるカルダノの方法により解け.

(1)  $x^3 + 6x - 20 = 0$  (これはQ4(8)ですすでに解いているものです) (2)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

(3)  $x^3 - 3x + 2 = 0$  (4)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$  (5)  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

(Q10) (Q9)で, ぐっとにらんで得られる根がある場合, カルダノの解法で得られた根との対応づけをせよ.

(ヒント: **実数を係数とする3次方程式には必ず, 少なくとも1つは実数の根が存在する.**)

## 第5章. 4次方程式の根の公式

最後に、フェラリによる4次方程式の根の公式について触れておきます。これは3次方程式を解くことに帰着させる方法です。

(Q10) 4次方程式  $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 = 0$  に対し、

(1) 根を確認せよ (Q1(6)で求めてある!) (2) 両辺を6で割った式を書け。

(3) その式に対し、 $X = x + \frac{1}{24}$  とおくことにより、 $X$  の4次方程式に書き換えよ。

(4) (1) で確認した根のそれぞれに  $\frac{1}{24}$  を引いたものが (3) で得た4次方程式の根と一致することを確認せよ。

(Q11) 4次方程式  $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$  に対し、

(1) 両辺を  $a_0$  で割った式を書け。

(2) その式に対し、その式に対し、 $a = \frac{a_1}{a_0}, b = \frac{a_2}{a_0}, c = \frac{a_3}{a_0}, d = \frac{a_4}{a_0}$  とするとき、

$X = x + \frac{a}{4}$  とおくことにより、 $X$  の4次方程式に書き換えよ。

⇒ (1), (2) の作業から、

**4次方程式の一般形は  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  としてよい**

ことが分かるでしょう。(Q10) で実感してください。

(例題3) フェラリによる4次方程式  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  の解法の方針を見よう.

まず,  $(x^2 + \square)^2$  を考えて, これを展開すると,  $x^4 + 2 \times \square + \square^2$  となります.

(以降,  $\square$  で通すのも不格好なので,  $\square$  を  $k$  と書くことにします.)

すると,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (x^2 + k)^2 = (2k - p)x^2 - qx + k^2 - r$$

となります.

ここで,  $(2k - p)x^2 - qx + k^2 - r$  が完全平方式になるように  $k$  をとります:  
 $(2k - p)x^2 - qx + k^2 - r$  の判別式を  $D$  とすると,

$$\begin{aligned} D &= (-q)^2 - 4(2k - p)(k^2 - r) \\ &= q^2 - 4(2k^3 - 2rk - pk^2 + pr) \\ &= -8k^3 + 4pk^2 + 8rk + q^2 - 4pr = 0 \end{aligned}$$

なので, 3次方程式  $8k^3 - 4pk^2 - 8rk + 4pr - q^2 = 0$  をカルダノの方法等で解くことにより  $k$  が求まります. このとき, 完全平方式になるのだから,

$$(2k - p)x^2 - qx + k^2 - r = (\bigcirc x + \triangle)^2$$

とできるので,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Leftrightarrow (x^2 + k)^2 &= (\bigcirc x + \triangle)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2 + k + \bigcirc x + \triangle)(x^2 + k - \bigcirc x - \triangle) &= 0 \end{aligned}$$

となり, 4次方程式  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  の根を得ることができるというわけです.

(Q12) フェラリによる方法で, 方程式  $x^4 + 5x^2 + 2x + 5 = 0$  を解け.

(※) 尚, 4次方程式の解法はフェラリ以外にもオイラーやラグランジュによるもの等が知られています.

### 【補足】

(Q8) はボンベッリ (Rafael Bombelli) (1526~1572) が探求した問題です. すなわち, 彼は3次方程式をカルダノの公式を用いて解く過程で, 根が実数であるにもかかわらず途中で複素数を経由しなければ解けないことに気づきました. 虚数の導入に懐疑的な数学者は少なくありませんでしたが, その後, さきに紹介したガウスによる“代数学の基本定理”の証明や“複素数平面”の利用により漸く正当な評価を得たのです.

(補講はここまでです. 数学史に戻りましょう)

### § 3. 数学者年表

時代	数学者名・国	業績など
	☆ 1日目はここから	
BC1650	アームス・エジプト	数学最初の記録とされる
BC500	ターレス・ギリシア	数学の父
BC540	ピタゴラス・ギリシア	三平方の定理
	ヒポクラテス・ギリシア	ヒポクラテスの三日月
BC450	ゼノン・ギリシア	パラドックス
BC330	ユークリッド・ギリシア	原論
	アルキメデス・ギリシア	浮力の原理, 円の面積
	エラトステネス・ギリシア	素数の発見法
	ヘロン・ギリシア	三角形の面積の公式
	アポロニウス・ギリシア	円錐曲線論
100	メネラウス・ギリシア	共線に関する定理
150	トレミー・ギリシア	球面三角法
275	ディオファントス・ギリシア	不定方程式
:		
510	アールヤバタ・インド	算術書
630	ブラーマグプタ・インド	0の最初の記述
820	アル・クワーリズミ・ペルシャ	アラビア算術
:		



：		
1150	バスカラ 2 世・インド	負の数の認識, 2 次方程式
1200	ピサのレオナルド (=フィボナッチ) ・イタリア	計算書, フィボナッチ列
1500	ダビンチ・イタリア	万能の人, 絵画論
	フォンタナ (=タルタリア) ・イタリア	3 次方程式
	カルダノ・イタリア	3 次方程式, 虚数の認識
	フェラリ・イタリア	4 次方程式
1600	ネピア・スコットランド	対数の発見
	フェルマー・フランス	確率論, 整数論
	ガリレイ・イタリア	振り子の等時性
	ケプラー・ドイツ	惑星の運動に関する法則
	デカルト・フランス	解析幾何学
	パスカル・フランス	円錐曲線論
	☆1 日目はここまで	
1650	☆2 日目 ニュートン・イギリス 1643-1727	微分積分学, 万有引力の法則
	☆2 日目 ライプニッツ・ドイツ 1646-1716	微分積分学
	☆3 日目 関孝和・日本 1642?-1708	微分積分学, 行列式
1700	ベルヌーイー族 (8 人) ・スイス ・ヤコブ 兄・ヨハン 弟・ダニエル ヨハンの子	微分方程式ほか
1750	☆4 日目 オイラー・スイス	多面体定理ほか

1800	<p>ガウス・ドイツ</p> <p>コーシー・フランス</p> <p>ロバチェフスキー・ロシア</p> <p>ボリヤイ・ハンガリー</p> <p>アーベル・ノルウェー</p> <p>ハミルトン・スコットランド</p> <p>ヤコービ・ドイツ</p> <p>ガロア・フランス</p> <p>ワイエルシュトラス・ドイツ</p> <p>リーマン・ドイツ</p> <p>デデキント・ドイツ</p> <p>☆5日目 カントール・ドイツ</p> <p>クライン・ドイツ</p> <p>フルビッツ・ドイツ</p>	<p>代数学の基本定理ほか</p> <p>解析学</p> <p>非ユークリッド幾何学</p> <p>非ユークリッド幾何学</p> <p>5次方程式</p> <p>解析力学</p> <p>楕円関数論</p> <p>方程式論</p> <p>楕円関数論</p> <p>アーベル関数論ほか</p> <p>実数の連続性</p> <p>集合論</p> <p>群論と幾何学</p> <p>代数幾何学</p>
1900	<p>ヒルベルト・ドイツ</p> <p>☆6日目 高木貞治・日本</p> <p>アインシュタイン・ドイツ</p> <p>岡潔・日本</p>	<p>23の問題</p> <p>整数論</p> <p>相対性理論</p> <p>多変数関数論</p>

	小平邦彦・日本	代数幾何学
	広中平祐・日本	代数幾何学
	ワイルス・イギリス	フェルマー予想の解決
	森重文・日本	代数幾何学
2000	ペレルマン・ロシア	ポアンカレ予想の解決

注意：20世紀における偉大な数学者は枚挙に暇がありませんが、ここでは日本の数学者のうちとりわけ、数学のノーベル賞といわれる「フィールズ賞」の受賞者である小平邦彦、広中平祐、森重文の三氏を中心に挙げるにとどめておきます。

## 参考文献

1. ニャロメのおもしろ数学教室 (赤塚不二夫), パシフィカ, 1981
2. 世界数学史 (小坂正行), 法政大学出版局, 1955
3. 新図説数学史 (田村三郎・コタニマサオ), 現代数学社, 2008
4. 数学史 (矢野健太郎), 科学新興社, 1967
5. すばらしい数学者たち (矢野健太郎), 新潮社, 1980
6. 数学をきずいた人々 (矢野健太郎), 講談社, 1979

(注 1) 1 (赤塚) は数学史を気軽に俯瞰させてくれる好著で、かつてTBSテレビで数回に渡って特集番組が組まれました。DVD化が切に望まれます。

(注 2) §1 は多くの箇所にて、4 (矢野) の記事を引用させていただき構成しました。矢野健太郎先生は2012年に生誕100年となります。

(注 3) 本稿では、§2にてゲルバートの名を挙げました。数学史に関連する書物にゲルバートの名を見つけるのは難しく思われます。しかし、2 (小坂) の記事により、ゲルバートを紹介する意義を強く感じました。このことを本稿の特徴のひとつに挙げたく思います。同時に本章では2 (小坂) の記事を引用させていただきました。

(注意 4) ピサのレオナルドの業績にある「計算書」は、当初、「算盤書」としていましたが、東京海洋大学名誉教授の中村滋先生にご教示頂いて改めました。中村先生に感謝申し上げます。

(注意 5) 本稿の学科HP掲載のための改訂作業中、京都大学数理解析研究所の望月新一教授によって「ABC予想」が肯定的に解決したのではないかと、との驚愕すべきニュースが耳に入りました。

(※) 尚、図版の一部はWikipediaやフリーの素材より転載させていただきました。

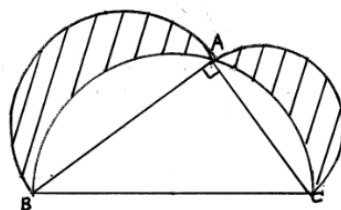
(付録) 数学史リレー講座・演習問題  
 ～ギリシア数学編～

☆は中学1～2年向け ○は中学3年～高校1年向け ※は高校2年向けです。

☆ 1. ディオファントスは、その一生の  $\frac{1}{6}$  を少年,  $\frac{1}{12}$  を青年, さらにその後は一生の  $\frac{1}{7}$  を独身で過ごした. 結婚してから5年後に子供が生まれ, その子は彼より4年前に彼の寿命の半分でこの世を去ったという. ディオファントスは何歳まで生きたか.

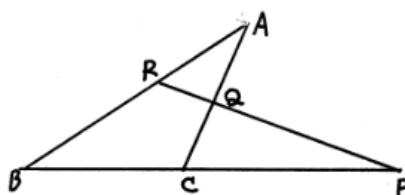
☆ 2. アーメスのパピルスにある  
 『円の面積は, その直径からその9分の1を引いたものの2乗に等しい』  
 によれば, エジプト人は円周率の値をいくつと考えていたことになるか.

☆ 3.  $\angle A = 90^\circ$  である直角三角形ABCにおいて, 辺AB, AC, BCを直径とする半円を, 図のようにすべて同じ側に描くとき, 図の2つの月形の面積は直角三角形の面積に等しいことを証明せよ. (ヒポクラテスの定理)



☆ 4. 15563と4187の最大公約数を求めよ. (ユークリッドの互除法)

☆ 5. 1直線が $\triangle ABC$ の3辺BC, CA, ABまたはその延長とそれぞれ点P, Q, Rで交われば,  $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$  が成り立つ (メネラウスの定理). これを証明せよ.



○ 6.  $\sqrt{2}$  が無理数であることを証明せよ. (ピタゴラス)

○ 7. 素数は無限に存在することを証明せよ. (ユークリッド)

○ 8. 周の長さが一定である三角形のうち, 面積が最大となる三角形は正三角形であることを示せ. (ヒント: ヘロンの公式を用いるとよい)

- 9. 円に内接する四角形  $ABCD$  においては,  $AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$  が成り立つ (トレミーの定理). これを用いて,
- (1) ピタゴラスの定理を証明せよ.
  - (2) 一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ.
- 10. 正多面体は 5 種類に限ることを示せ. (プラトン)

★参考: サッカーボールは, 正五角形と正六角形をそれぞれ何枚かずつ貼り合わせて作られているが, このうち, 正五角形と正六角形の枚数は, それぞれ何枚使われているだろうか. (オイラーの多面体定理を用いるとよい)

※ 11. 『俊足のアキレスと, 鈍足の亀がいる. アキレスは  $10\text{m}/\text{秒}$  で走り, 亀は  $0.1\text{m}/\text{s}$  で走ると仮定する. 亀のスタート地点をアキレスより  $100\text{m}$  前にして, 同時にスタートする. アキレスが  $100\text{m}$  先の亀のスタート地点に着いた時, 亀はそこから何  $\text{m}$  か先の地点 (地点 A と名付ける) に居る. アキレスが走り続けて地点 A に着いた時, 亀は地点 A の何  $\text{m}$  か先の地点 (地点 B と名付ける) に居る. 再びアキレスが走り続けて地点 B に着いた時, 再び亀は地点 B の何  $\text{m}$  か先に居る. この作業を何度繰り返しても, 亀は必ずアキレスの前に居ることになる. ゆえに, アキレスは亀に追いつくことは出来ない』  
これは“ゼノンのパラドックス”といわれている詭弁です. この論の誤りを正しなさい.

※ 12.  $(0, 2)$  を中心とした半径 1 の円を  $x$  軸に関して一回転させてできる立体の体積を求めよ. (パップス=ギュルダンの定理を用いるとよい. ギュルダン (1577–1643) はオーストリアの数学者)

※ 13. 三角形  $ABC$  の点 A から  $BC$  に下ろした垂線と, 点 B から  $CA$  に下ろした垂線と, 点 C から  $AB$  に下ろした垂線が一点で交わることを,

- (1) 初等幾何学 (古代のユークリッド) 的に証明せよ.
- (2) 解析幾何学 (中世のデカルト) 的に証明せよ.

### 授業を終えてみて・・・

もともとは、19世紀の西欧における主な数学者たちの活躍した時期が自分の中で交錯しており、一度、年表などを作成して整理しておかねばならないな、と思ってはいました。

折しも生徒から、「ピタゴラスとガロアはどちらが先に活躍したのですか？」という質問を受け、ガロアとアーベルならともかく、ピタゴラスとガロアとは…と、一瞬、嘆息をもらしかけたのですが、考えてみれば生徒のほぼ全員が「数学史」を系統的に学んでいない状況を考えれば嘆息をもらしている場合ではないな、と考えるようになりました。§0の数学史クイズはそれを反映したものです。

果たして、他の生徒たちに質問してみても、ガロアがいつの頃の人かは分からないけれどピタゴラスは古代ギリシアに活躍した人だからピタゴラスのほうが先に活躍したんじゃないですか？等といった、いわば「雰囲気」で判断している状況が多くあり、これは真剣に取り組むべきテーマであるという考えに至りました。

今春の一夕、このことを雑談のなかで畏友の小澤嘉康氏に話したところ、興味を示されたので、善は急げとばかりに、今夏の講習で数学史の講座をご一緒できないかと矢継ぎ早に打診したところ、こちらの勢いに気おされたのでしょうか、氏は快諾されました。

夏の講習は6日間（1回80分、6日間で計8時間）なので、できれば日替わりで数学の先生が登場し、リレー形式で古代から現代までの数学史を紹介できまいか、という企画を立てました。受講学年は幅広く設定しようということで、中1から高2までとしました。

私は発起人として初日の通史を買って出たこともあり、中1の諸君が参加する可能性がある分、多くのトピックを平易に説明しなければならなくなり、大変に勉強になりました。とりわけ、本講座の設定が夏休み後半であったため、夏休み前半に少くない時間を本講座の準備として文献の調査や授業の構成に充てることができたことは自分自身の今後の授業における財産にできる可能性もあり、誠に幸いなことでした。

発起人である我々以外のスピーカーを募ったところ、嬉しいことに即座に宮崎、熊代、網谷、平山の各氏より賛同を頂き、参加していただきました。また、多くの数学科の先生から本講座への激励を頂戴したことは今もって忝い気持ちで一杯です。

結果、約40人の生徒が受講しました。受講者のアンケートによればこの初日については、担当の先生が楽しそうに話してくれたので面白かった、という意見があり、発起人としての意欲を垣間見られた気がして嬉しくなりました。

但し、“80分で50人の数学者と共に3600年の旅にご案内”などと、銘打ってしまったために、多分に絵葉書的というか、カタログ的になってしまい、なおかつ、紹介した内容が予定の7割強に留まってしまったことが残念です。これは一考に価することでありましょう。それでも、どうにかアーメスのパピルスからペレルマンまでを紹介できたのは何より、とほっとしている気持ちも少なくなく、また、6日間を通して欠席者がほとんどなかったことと併せて、やってみてよかった、と強く思っています。

(かわさきますみ)