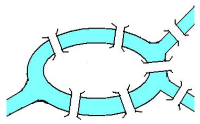
1　ケーニヒスベルクの橋の問題と一筆書き

18 世紀初めプロイセン王国のケーニヒスベルク (現在, ロシア西部のカリーニングラード) でのお話．この都市を流れるプレーゲル川には, 右の図のように橋が架けられていた．あるとき, 町の人は次のように問いかけた．



ケーニヒスベルクの橋の問題

プレーゲル川に架かる 7 つの橋を 2 度通らずに, すべて渡って, もとの所に帰ってくることはできるか? ただし, どこから出発してもよい．

オイラーの考え: 土地を「点」, 橋を「線分」として捉え, グラフを作る．
このグラフが一筆書きできるかどうかを調べればよい．

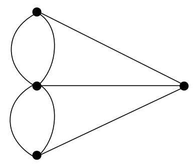
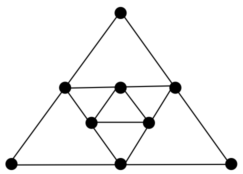


図 1: ケーニヒスベルクの橋のグラフ

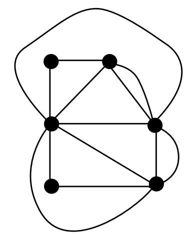
一筆書きの定義:

- ペンを紙から離さず線図形をかくこと,
- 同じ線分を二度なぞらないこと (点で交わってよい)．

問 1　次のグラフを一筆書きせよ．(1)



(2)



一筆書きできるための条件 (オイラー)

グラフ G が一筆書きできるならば, 次のいずれか 1 つの条件が成立する．また, 次のいずれか 1 つの条件が成立すれば G は一筆書きできる．

(1) G の各点について, つながっている線分の個数 (**次数**という) は 2 以上の偶数,

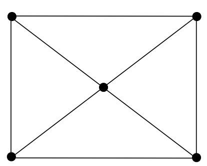
(2) G の 2 点について, 次数は 奇数 であり, その他の点の次数は 2 以上の偶数.

ケーニヒスベルクの橋の問題の解答

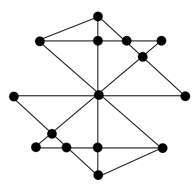
7 つの橋を 2 度通らずに, すべて渡って, もとの所に帰ってくることは できない.

【理由】　図 1 のグラフで次数が奇数の点は 5 つとなり, 条件 (1) または (2) がみたされないから．

問 2　次のグラフは一筆書きできるか？　(1)



(2)



2　数学者オイラー

レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707 年–1783 年) は 18 世紀最大の数学者．スイスのバーゼルに牧師の子として生まれた．14 歳でバーゼル大学へ入学すると, ヨハン・ベルヌーイ教授によって数学の天分を見出された．ヨハンは仕事が忙しかったため, 個人指導は引き受けないのが常であったが, オイラーに対しては難解な数学の本を読むように特別に指導し, 週に 1 度, 質問を受け付けていた．

オイラーは父から牧師の仕事を継ぐことを望まれていた．しかしヨハンの息子のニコラウス, ダニエルと共に数学の問題について自由に語り合うことで数学に強い興味をもつようになり, 数学者になる道を歩んだ．

オイラーが初めて, 数学上での独創的な仕事をしたのは, 19 歳のときである．勢いづいた彼は, 多くの懸賞論文に応募して, 入賞した．その後, ペテルブルク (現在, ロシア西部のサンクトペテルブルク) の学士院に職を得て, 結婚する．13 人の子女に恵まれるが, そのうち 8 人を幼くして亡くし, 悲しい思いをした．また, オイラー自身も大病を患い, 右目の視力を失ってしまう．ロシアの地図作成の仕事による過度なストレスが原因という説もある．

オイラーはどんな状況でも, どんな場所でも仕事のできる数学者であった．赤ん坊を膝の上にのせ, 上の子たちを周りに遊ばせながら, 研究論文を書くこともしばしばであった．のちに, ベルリンの学士院に招聘されたあとも, 数学の研究は順調に進んだ．60 歳半ばまでには, 左目の視力も失ってしまったが, 数学の研究は 76 歳に脳溢血 (のういっけつ) で亡くなるまで, 衰えることはなかった．フランスの社会学者・数学者であるコンドルセはオイラーの死を “計算の中止” と表現したほど, オイラーは人生を数学の研究に捧げた．

オイラーの数学的な業績は, 非常に多岐にわたる．数学史上, もっとも生産性の高い数学者として有名である．とりわけ, 解析に関する成果が多い．等式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を初めて証明したことは有名である (バーゼル問題の解決)．

難解な問題を解決する仕事ばかりではなく, 分野どうしを融合させる仕事や, 今回説明するトポロジーのように新しい分野を切りひらくような仕事も数々ある．

没後 50 年の間に発表された論文だけでも数百に及んでいる．また, スイスのある出版社が生誕 200 年を記念して 1911 年から全集の刊行を始めたが, 2010 年現在, 完成のめどは立っていない．すでに, 80 巻近く出版されており, そのページ数は 3 万ページを超えている．このことからも, 多産な数学者であったことが容易に想像されよう．

なお,「無限解析」,「代数入門」, 及びオイラーの発見した有名な公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ がのっている微積分の教科書は今日の数学の本の模範となっている．関数の表記 $y=f(x)$, 円周率の記号 π, ネイピアの数の記号 e もオイラーが採用したものであり, 現在も広く使われている．

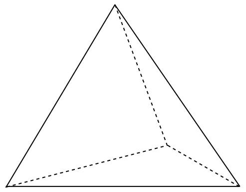
数学者オイラーのより詳しい解説は次の URL で閲覧可能 (The MacTutor History of Math., 英文)．
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html`

オイラーの生涯について興味をもった人には次の本を読むことを薦める．
E. T. ベル 著　田中勇・銀林浩 訳　「数学をつくった人びと–上–」東京図書

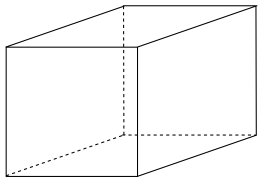
3　オイラーの多面体定理, 種数とオイラー標数

問 3　次の各多面体の頂点の個数 v, 辺の個数 e, 面の個数 f を求め, $v-e+f$ の値を計算せよ.

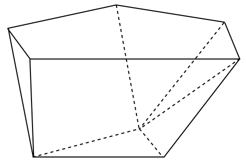
(1)

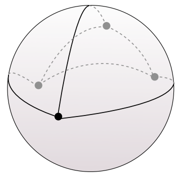


(2)



(3)





定義: 右の図のように球面の上でふくらんだ多面体を描くことができる. この多面体を**球面を分割して得られる多面体**という.

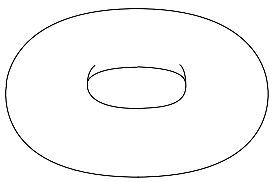
多面体定理 (オイラー)　球面を分割して得られる多面体の頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ v, e, f とする. このとき, 次の等式が成立する.

$$v-e+f=2$$

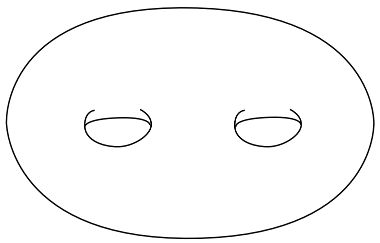
左辺の量を**オイラー標数**といい, ギリシャ文字の χ(カイ) で表す.

重要なことは多面体をふくらませたり, 曲げたり, 伸ばしたりする変形 (総称して**連続変形**という) を行っても, オイラー標数の値は変化しない ということである.

例 1　穴の 1 つあいた曲面 (**トーラス**) を多面体に分割して, オイラー標数を計算してみよう.



問 3　次の曲面のオイラー標数を計算せよ.



定義: (縁なしで表裏のある) 曲面に対して, その穴の個数を**種数** (genus) といい, g で表す.

例 2　球面では $g=0$. トーラスでは $g=1$.

調べてみよう

それぞれのオイラー標数を書け.

g	0	1	2
χ			

曲面の種数 g とオイラー標数 χ の関係はどのような関係があるか？予想せよ.

定理 (種数とオイラー標数)　次の等式が成立する.

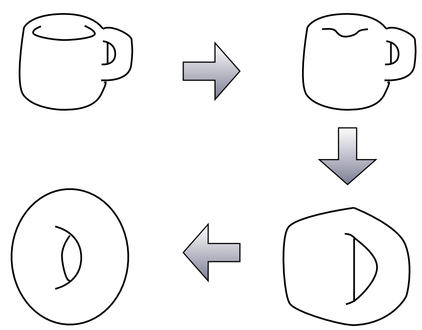
$$\chi=2-2g$$

上の等式はオイラー標数と曲面の "かたち" を結びつける公式である.

4　柔らかい幾何学 ～ トポロジー ～

位相幾何学 (トポロジー) は, 連続変形で移り合う図形を "同じ" 図形とみなして研究する数学の分野である. その名称は, ギリシャ語で場所を意味するトポスと, 理論を意味するロゴスの合成に由来する.

位相幾何学の萌芽は今回紹介したオイラーの多面体定理に見られる. 19 世紀末, ポアンカレ (1854 年–1912 年) による一連の研究論文によって, この分野が確立された. なお, 現代の位相幾何学は, 19 世紀後半にカントール (1845 年–1918 年) らによって定式化された集合論を基盤としている.



位相幾何学では「2 つの図形が連続変形で移り合うとき, それらの図形は**位相同型**である」という. 右の図に見るように, コーヒーカップとドーナッツは位相同型である.

図形 G, G' が位相同型であれば, それぞれのオイラー標数 χ, χ' について $\chi=\chi'$ が成り立つ. オイラー標数のように, 連続変形で変化しない量を**位相不変量**という. 種数はオイラー標数を用いて表されるので, 位相不変量となる. したがって, コーヒーカップの種数はトーラスのそれと等しく, 1 である. 一方で, 位相不変量が異なる 2 つの図形は位相同型ではない. たとえば, 球面とトーラスの種数はそれぞれ 0, 1 となるから, これらの図形は位相同型でない. このように, 位相不変量だけを計算すれば, 連続変形ができないことが分かる. このことが位相不変量を計算することの醍醐味である.

近年, 位相幾何学ではペレルマン (1966 年–) によるポアンカレ予想の解決という大きな進展があった. また, DNA の構造を分析する生命科学などの分野にも応用があるため, 位相幾何学が注目されてきている.

トポロジーの内容をさらに深めたいときは, 次の本を読むことを薦める.
松本幸夫 著「トポロジーへの誘い –多様体と次元をめぐって– (幾何学をみる 1)」遊星社