

【初日のレポート】

本日 2011 年 08 月 22 日から 27 日までの 6 日間、「ガロア理論」の概要を理解・納得しようという目論見の本講座が開始されました。

初日は平山教頭先生が担当されました。先生が作成されたオリジナルテキスト(写真1)をもと、パワーポイントを利用した講義は、最初の50分でガロアの生きた時代と、彼の生涯の解説が、その後の30分で明日以降の講義の予告を兼ねたガロア理論の概説が、それぞれなされました(写真2)。生徒は熱心に平山先生の話に耳を傾けていました。中には意欲的な中1の姿もあり(写真3)、頼もしい限りです。



(写真1) 平山先生オリジナルテキスト



(写真2) 平山先生



(写真3) 説明に聴きいる受講生たち

【受講者の声】

(恩田直登君)

ガロアは気の毒だと思いました。二度までも論文が受け取られなかったり、受験に失敗したりしていたからです。論文の内容が二人に理解されなかった理由は、ガロアが授業を真面目に受けなかったことに象徴されるような生意気さ(?!)が原因だと感じたので、僕は授業を真面目に受けようと思います。

それにしても、ガロアの考えていることには驚きました。やはり自分は井の中の蛙だつくづく感じます。

でも、内容は理解できたので良かったです。有理数の範囲を少し広げる $a + \sqrt{2}b$ で表される集合 ($a, b \in \mathbb{Q}$) は、似た話しを読んだことがあったので理解しやすかったですし、判別式を解で表す話は新鮮で面白かったです。全体的に面白かったです。

【講義を終えて】

(平山先生)

初日の内容は、ガロアの生涯の紹介とガロア理論の概説でした。

ガロアの名前を聞いたことのある生徒は4人だけで、ほとんど生徒たちにとって初対面のガロアは、どんな人物だと映ったのでしょうか。

前半ではガロアの誕生から決闘の末亡くなるまでの20年間を、数学者と政治活動家の両面を紹介するように辿りました。

数学の業績は踏み込み過ぎると急に難易度が上がってしまうため、天才数学者の「天才」ぶりにあまり触れられなかったかもしれません。それでも、激動の時代を生きたガロア像が伝わったのではないかと思います。配布したプリントに書ききれなかったエピソードも話して前半を終了しました。

後半は数学の内容で、1次、2次方程式の公式から始めて、虚数、複素数を導入して、3次、4次方程式の公式までを一区切り。5次方程式の証明への道すじに、解の対称性と置換が関わることを説明し、ガロアの理論とはどんなものかを簡単に触れて終了となりました。

人物と公式の話聞くばかりの初日でしたが、数学らしい話は明日より本格化します。

【2日目のレポート】

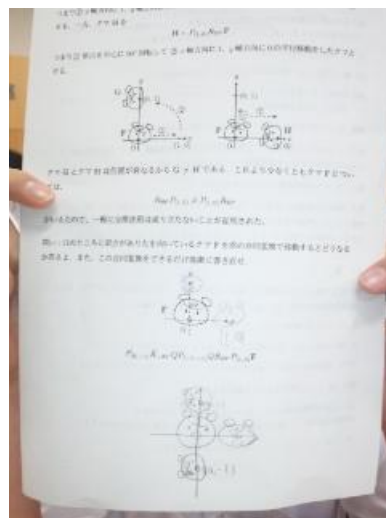
今日は小澤先生がご登場（写真1）。集合記号の使い方から始まり、群の定義にまでおよぶ、実に多岐にわたる内容を扱われました。

消化不良になることが懸念される向きもあるやに思われますが、そこは小澤先生。先生一流のユーモアあるお話、効果的な具体例の提示などで、生徒たちは楽しく授業を受けていました。群の作用の計算演習では、黙々と取り組んでいました（写真2）。

演習問題解説の際、ややもすると抽象的に思われかねない群の説明を、親しみやすいものにすべく、ご自著のトレードマークともいえるべき「クマ」（写真3）を動かしてお話され、受講者は楽しみながら、群の定義を吸収できたと思われまます。明日は、群のうち、とりわけ、対称群について扱われる予定です。



(写真1) 小澤先生



(写真2) 群論の作用の演習(小澤先生オリジナルテキストより)



(写真 3) 小澤先生ご自著のトレードマークの「クマ」

【受講者の声】

(湯原拓也君)

群とか集合など初めて聞く言葉がほとんどで、最初はよく分からなかったのですが、先生の解説を聞いてなんとなく分かりました。ガロアは、僕と同じくらいの歳で、群のアイデアを思いついたと考えると、やっぱりすごい人だなと思います。小澤先生の授業は、具体例を出してくれたり、ところどころでユーモアも利いていてとても楽しかったです。

明日からの授業も楽しみです。

(山口哲君)

今日は集合から始まり演算の事から群論の話に持っていくという講座でした。群論は一応知ってはいましたが、集合から丁寧に説明してくれたので、良く分かりました。全部面白かったです。

例えば、集合の説明では、山手線の駅を例に出してきて説明してくれました。身近な例で分かりやすかったです。

写像によって集合と集合が対応出来るんだなあ、面白いなあと感じていると、その一つが演算と言われて、虚をつかれたようでびっくりしました。

普通、演算は(関数などもあります)数に対して行われますが、自然数とか有理数も言われてみれば集合です。集合同士の関係だと分かった事で、演算に集合が入った群の説明が一層良く分かりました。冗談も交えながら説明してくれたので、一層分かりやすかったです。明日の講座も楽しみにしています。

【講義を終えて】

(小澤先生)

2日目の内容は、明日（3日目）以降に本格的にガロア理論の内容に入るので、そのときに必要になる数学的な準備をしました。

まず「集合」や「演算」の定義から始め「群」まで定義しました。そして平面図形の合同変換が「非可換群」になるので、このこと用いて「群」に少しでも慣れることのできるように練習もしました。

本来講義をすると何時間もかかる内容なのですが、それを80分の1講座におさめるのに苦労しました。どれもこれも深く話をするわけにはいきませんし、この講座の趣旨にもあいません。しかしながら、アウトラインばかりでは逆に意味がわからなくなってしまいますし、数学の講座ですので、論理的組み立てを軽んじて雰囲気ばかりで進めるわけにもいきません。限られた時間の中で何を強調するのがベストなのか、その構成が一番大変でした。

また、生徒たちにとっては初めて聞く話ばかりですので、じっくり見直しができるように、今日の講座の内容をすべて書いた資料を配付しました。割と分量がありますが、不足のないように丁寧に作ったので、是非あとで読み返してもらいたいです。

ガロア理論は難しい内容ですが、とても興味深い内容です。諦めずに少しでもその面白味を感じ取ってもらえると嬉しいです。明日よりいよいよガロア理論の話が始まります。

【3日目のレポート】

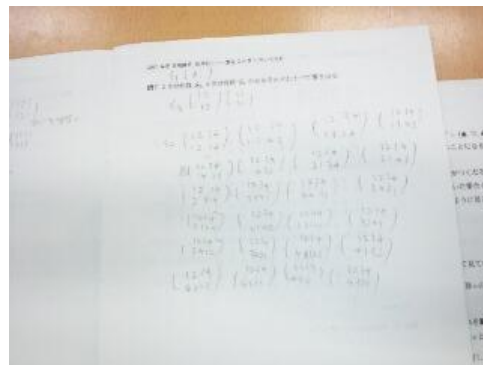
本講座の内容としては、今日（24日）で前半終了となります。今日は宮崎先生(写真1)の登場で、昨日の内容を、後半につなげる、極めて重要なポジションにありました。

内容は「群」を実感しよう、というもので、後半で重要な巡回群や対称群について、丁寧な解説がなされました。先生は、ユーモアを交えながら、随所で指名して答えさせたり、演習問題を解かせる(写真2)ことで、活気ある授業となり、目的を十二分に果たされました。置換の積を、アミダくじを用いて説明されたくだりでは、「なるほど、そうなのか!」と、感嘆の声が生徒から漏れ聞こえてきたのが印象的でした(写真3)。

明日は、ガロア理論を理解するために必須であるものの、理解が難解とされる正規部分群と商群を主たるテーマに授業が行われます。後半もどうぞご期待ください。



(写真1) 宮崎先生



(写真2) 宮崎先生オリジナルテキスト



(写真3) 後方には、受講生に交じって学ぶ先生方の姿も

【受講者の声】

(妹尾共晃君)

始めの方は、群というものを、そういったものなのかぐらいにしかとらえていませんでしたが、群がどういったものを分かりやすく解説してもらい感動しました。そのため、さらにこの授業と数学に興味が沸きました。

明日の授業も楽しみです。

(二宮祐樹君)

今日の講義では具体的な群の考え方、まず対称群について学びました。ミカンやブドウが数字に置き換わり、パズルのように並べ替えると定義した積が表れるところはとても楽しく理解できました。

巡回群では回転を数字で表し、正2面体群では裏返る動きを数字で表すところが面白いと思いました。とてもわかりやすく、今日の内容はずっと頭にはいつてきました。偉大なるガロアの理論にこれでほんの少し近づけたかと思うと(ほんとうに近づいているのでしょうか?)うれしいです。

明日から更に難しい内容になりそうなので、頑張っについて行きたいと思います。宮崎先生の図解(くだもの)は芸術的で感動(?)しました。

【講義を終えて】

(宮崎先生)

3日目の講習は2日目で定義した群の具体例を挙げるというものでした。とりわけ、今後必要になってくる対称群と巡回群を中心に話をしていききました。

群というなじみのない概念に触れているわけですから、今日の講習ではできるだけ作業をさせながら、無理のない範囲で話をしていくように努めました。初めは果物の並べかえから話をしていき、徐々に数学の話をしていくようにしました。

巡回群では正三角形を回転させることを例にし、この話から部分群の話、正2面体群の話をしていききました。

80分という限られた時間の中で、対称群、巡回群、部分群、正2面体群の話を盛り込むのはなかなか大変で、伝えきれなかったことも多々ありましたが、それでも生徒が一生懸命に聞いてくれたおかげで、なんとか時間内に終えることができました。

難しい概念を平易な言葉で誤解がないように伝えることの難しさを、また、代数を専門としていなかった私にとっては、数学の奥深さを改めて教えてもらえる講習となりました。

生徒もそうだと思いますが、私にとっても大変勉強になりました。貴重な講習をさせてもらえたことに深く感謝しています。

【4日目のレポート】

後半のトップバッターは、数学科主任の春木先生（写真1）です。

まずは、編集子の川崎は、春木先生に お詫びせねばなりません。というのも、最後の2日間で方程式の話をしたかったので、4日目は、部分群と正規部分群、それと商群の話をお願いします、と依頼したところ、「そりゃ、むちゃですよ！昨日、数字を習い始めたこどもに今日はわり算を教えるようなものですよ…」と困惑されました。それを承知で、「確かにそうかもしれません。が、そこを先生のお力でなんとかお願いします」と半ばゴリ押しで承知いただいた次第。はたして、今日の春木先生は、いつも以上の気迫（写真2）でこの難題に答えてくださいました。

話は巡回群と対称群のみならず、クラインの四元群、そして二面体群など、豊富な例をご紹介いただいた上で、正規部分群の説明に辿り着かれました（写真3）。

多少スピーディーな授業になりましたが（誰がそうさせたんだ！の声あり）、しかし、生徒に聞いてみると、復習をしてくれたし、演習問題をつけてくれるから大丈夫です、とのこと。どうやら、受講者のやる気は想像以上のものがあるようです（この熱意には応えねば、との使命感に駆られます）。

授業後の質問時に、部分群に関する質問があり、それに答えていた我々担当者のアドバイスに従い、熱心に乗積表を作りながら「なるほど、部分群になっているな。さて次は、なにをすればいいと思う？」と互いに相談しながら計算をすすめる中一(!)二人組がおり、「それはこうなんじゃないの？」と提案する中2の声、そして中3の声。まさに同気相求め、そしてまた同類相依り、を実感。講座はいよいよ活況を呈してきました。

明日はまずは今日の復習から始め、「体」と「拡大体」および「体の自己同型」の話をして、2次方程式と3次方程式のガロア理論に入ります(予定)。



(写真1) 春木先生



(写真2)



(写真3)

【受講生の声】

(金澤直毅君)

今回は、授業のスピードがとても速かったです。でも、昨日の授業の復習から授業が始まったので良かったです。中2の知識で分からないようなことも、分かりやすく説明してくれて、楽しく授業を受けられました。また、演習問題もあり、楽しかったです。パソコンを使いながら説明をしてくださったので、図形が分かりやすく、中2でも理解できる内容になっていました。この知識を活かして数学を頑張りたいです。残り2日の授業も頑張って、なんとかして、ガロア理論を理解したいです。

(狩野樹生君)

今日は今までの群の内容を初めに復習してくださったので理解が不十分だった内容をフォロー出来ました。ガロアの偉大な発見は正規部分群であると教わりました。どういう点が偉大なのかをこの後知りたいです。群の計算の仕方や正規部分群の概念が今まで習ってきた数学と異なる感じがして慣れるのに時間がかかりました。残り二日は、群の概念が方程式の解法にどう繋がっていくのかについて考えながら講習を受けていきたいと思うので、その説明をお願いしたいです。

【講義を終えて】

(春木先生)

今日のテーマは「図形の対称性と群」と「正規部分群と剰余群」です。ガロアが最初考えていた群とは式における文字の置き換えですが、現代の群論ではいろいろなものを置き換え（動かし）ます。

群を最初に学ぶときに、図形の回転移動や対称移動と結びつけた方が、具体的なイメージが思い浮かべやすいかなと思い、前半の部分を入れました。後半は群論の中でガロア理論に必要なところだけを厳選して説明するつもりだったのですが、前半で時間を使ってしまい、正規部分群の説明中にタイムアップ。最後はあせって説明がバタバタで不十分になってしまいました。残念ですが、明日登場の川崎先生氏がフォローをしてまとめてくれるでしょう。

中1にも分かるように群論を説明するという難題を課されて、いろいろ悩んでプリントやプレゼン画像を作ったのですが、みんな熱心に聴いてくれてうれしかったです。

【5日目のレポート(兼・講義を終えて)】

今日(26日)は体(たい)の説明から開始し、根体、体の自己同型写像、そして二次方程式のガロア理論という流れで話をしました。

講義のために自分用に作成したメモにおいて、定義のチェックや、具体例の計算が穴埋め形式で作業できるようにして配布しました。これは簡単ではあるものの、効果的な具体例を計算をすることで、「ほっとしながら」理解し、納得することを狙ったことによるものです(写真1)。

結果、二次方程式のガロア理論を説明し終えたところで、残り時間が5分。3次の場合の概要と、5次方程式では、5次交代群が自明な群以外の正規部分群を持たないことから、べき根拡大ができないゆえに根の公式が作れないことを説明。余談に、20年前に作った5次交代群の乗積表($60 \times 60 = 3600$ 箇所)の計算!!)を公開(写真2)して授業終了となりました。

チャイムがなったとき、力尽きて倒れる感じがしました。前向きに倒れたか、はたまた後ろ向きに倒れたかは受講生のみなさんの判断を仰ぐほかありません。メインと考えていた3次方程式のガロア理論について少ししか触れられなかったのは残念でしたが、二次方程式のガロア理論を、与えられた2次式の最小分解体の自己同型写像を通じて説明できた(写真3)のをよしとするか、と慰めています。

さて、いよいよ明日は網谷先生がガロアの天才を余すところなく、説明してください。ご期待ください。



(写真1) 川崎先生の講義用メモ



(写真2) 川崎先生と先生自作の 5 次交代群の乗積表



(写真3)

【受講生の声】

(恩田直登君)

感動しました。ガロアが、どのようにして解の存在の有無を見つけたのかということが理解できて良かったです。

理解するのはある程度簡単(?)ではありますが、ガロアのアイデアは自分には思いつくことはできないだろうなと感じました。ガロア青年はいったい、どういう思考回路で発想したのかがとても知りたいです。

また、体の自己同型写像も面白かったです。しかし、そのような写像は、実数体の場合における $f(x)=x$ 以外考えつきません。難しいです。

(徳田俊介君)

今日の講習の冒頭「体」の説明での整数が「体」でないことが1や2など簡単な数字で示せて、分かりやすく感じました。

初めは何の知識も無く、新しい内容に苦勞もしましたが、昨日までの授業で教わった「群」などや今日の授業で教わった「体」なども自分なりに理解できたと思います。今日の講習では二次方程式のガロア理論が特に面白いと感じました。ここで学んだ事を活かして、継続してガロア理論を学び続けたいと思いました。

【6日目のレポート】

最終日の今日（27日）は網谷先生が担当（写真1）。ガロア理論のアプローチの方法はいくつか考えられますが、昨日の授業を聞き、その「バトン」を受けて、アンカーはスタートされました。

スタート直後、ガロア理論で何が得られるのかについてあらためて説明されました。群、体、自己同型写像 etc と新しく聞く用語が飛び交っていたこの2日だけに、まずは、それらを勉強することの意義がわかるこの説明にホッとしたことでしょう。

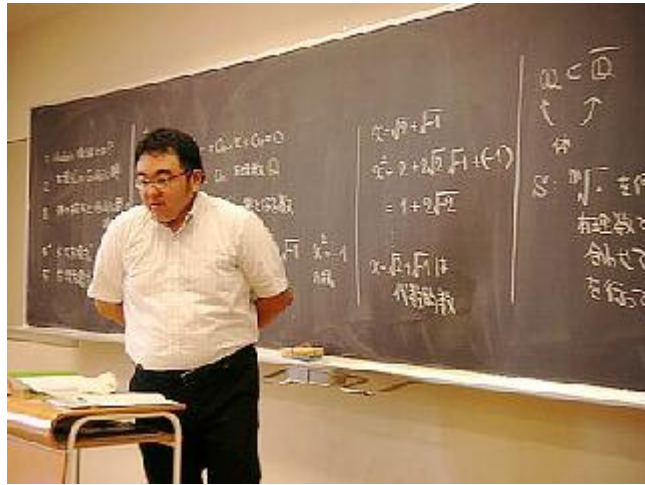
とりわけ、今日までに十分には説明がなされていない正規部分群の概念については、根が有理数とべき根で表されない代数方程式の存在を明確にするために導入したものとの説明は明快至極でした。

第一コーナーを回るあたりで、方程式のガロア群の定義が登場。最終日の大団円へいざなわれる生徒たち。昨日話のできなかつた（本講座のひとつの山である）3次方程式のガロア群が、根の差積を用いて具体的に求められ、この群が一般には、三日目に出てきた3次対称群になることが説明されました。ときにはガロア群が3次巡回群になる場合があることにも言及され、「おはなし」だけに終始させまいという網谷先生の熱意を垣間見ます。折に触れて、演習問題も用意されているので、生徒は実感しながら聞いています（写真2）。

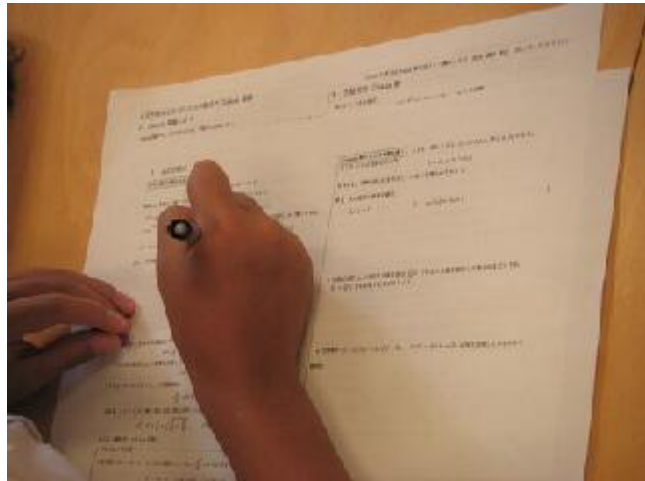
中間地点にさしかかり、いよいよガロア理論の本題である、体の拡大とガロア群の縮小の関係が登場しました。「解けていない」方程式を「解けた」方程式にするために、係数体にべき乗根を添加して拡大体の列をつくること。そのとき、各拡大体上のガロア群が縮小して部分群の列が対応すること。そして、方程式の可解性がガロア群の可解条件で表せることが、見事に示されました。

最終コーナーからは、3次方程式の根の公式を振り返り、ガロア群を使って体の拡大列とガロア群の正規部分群の列を示し、根が平方根と立方根をとることで求められる仕組みを生徒と共に確かめてゴールのテープを切った網谷先生（写真3）。見事なアンカーぶりでした。

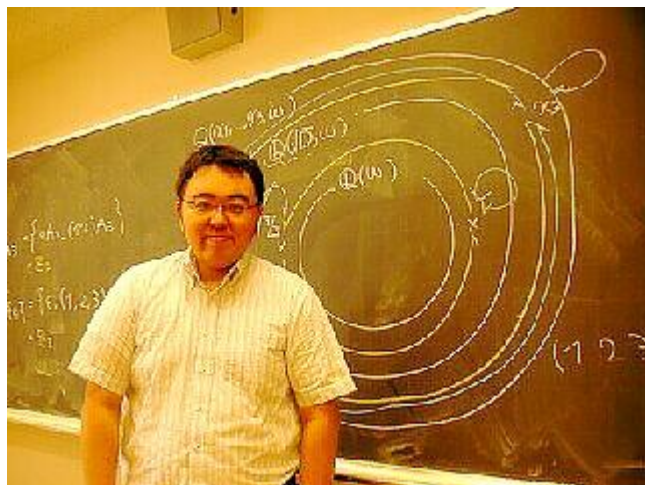
最終日らしく、大学の講義のような高度な内容でしめてくくられた本講習。前日までに準備してきた項目が周到に用いられていましたので、夏休みの残り、じっくり読み返すと必ずや理解できるものと思います。残念ながら、5次方程式の不可解性までは時間が足りず言及されませんでした。本講座で代数学の妙味を感じた生徒たちにしてみれば、「理解せずに終われない！」はず。そう、この先は“自ら”学ぶのです。復習していて分からないことがあれば、遠慮なく担当者に質問してください。共に、学ぼうではありませんか。



(写真1) 網谷先生



(写真2) 網谷先生オリジナルテキスト



(写真3)

【受講者の声】

(坂本龍彌君)

配られた資料はとても難しそうで少しも理解ができないで終わってしまうんじゃないかと思ったけど先生が解説をしながら図をかいたり、一つ一つ細かい例も出してくださりガロアのことを少しぐらいはわかったんじゃないかと思った。まだまだ3次方程式とか習っていないけれど、今後習っていく上で今回の講習の内容 を利用できたらいいなと思った。

(伊得友翔君)

講習が始まったときは難しいと感じたが、簡単そうなところから教えてくれたのでなんとか理解することができた。自分の将来にいつか役に立つと思うので、今度またこのような講習があったら積極的に参加したい。

(福尾幸祐君)

かなり難しかった。式がいろいろと出てきて、だんだん分からなくなってくる。ガロアは若い年に死んでしまった人だけど、こんなにややこしいものを証明したり、理論を作るのはすごいと思った。

(山口哲君)

今日の講義は難しかったです。しかし、とても面白かったです。

例えば、群の大きさを比較して群を確定する考え方などです。そしてなにより、方程式が解けるかどうか(可解性)を群の言葉で表現するところに感動しました。もともと有理数の四則計算とベキ根で解が表せる時に可解性がありますが、体の拡大列は有理数体にベキ根を有限回添加し続けて出来るものだと解釈できました。もともとと言い換えにすぎないので当たり前なのに、普通は思いつかないし、そこにガロア理論のエッセンスが凝縮されている事を感じました。6日間の講義を受けて、大学で受けるような授業を体験できたのでよかったです。この講習の約半分が群論についてでしたが、この短時間でここまで分かりやすく説明してくださって有難かったです。群論と方程式を想像もしないところでうまく組み合わせているガロア理論は、素晴らしいと思いました。

6日間ありがとうございました。

【講義を終えて】

(網谷先生)

最終日は、ガロアの定理の説明がテーマです。

この定理は、有理数体の拡大体と方程式のガロア群の部分群が対応するということをいうものですが、非常に難解な定理として知られています。

中高生に伝えるとなったとき、全く分からなかったとなると残念なことになるので、「数」の視点から、ガロア理論の意義のなるべく分かりやすい説明を最初に行いました。

結構真剣に聞いてくれている様子でうれしかったです。

そのあとの話の流れは、

「方程式のガロア群」→「ガロアの定理」→「3次方程式」

となりました。「5次方程式」は、時間の関係で説明できませんでした。

3次方程式がなぜ平方根と3乗根を1回ずつ使って解けるのかということを経験したのですが、途中でタイムアップ。

ガロア群を見れば、方程式が解けるかどうか、また解ける場合どういう風に見えるべき根を取ればよいか分かる。このことが、定理の醍醐味で、ガロアの天才ぶりを表すものです。

プリントなどの準備には、いろいろ悩んだところもあったのですが、数学の奥深さや美しさ、何でもよいので興味をもって皆さんが勉強を進めてくれたら、これ以上の喜びはありません。

おわりに

最後に、ガロアの意味では5次方程式は解けませんが、“テータ関数”を用いれば、解を表示することもできるのです。そして、それはガロアの意味とはどう違うのでありましょうか？こんな風に、まだまだ数学の楽しみは続きます。

偉大な Galois 先生生誕 200 年に際し、このような試みができることに担当者一同、感謝で一杯です。熱心に聴講してくれた受講生の皆さん、有難うございました。皆さんの今夏の思い出のひとつにしてもらえれば、こんな嬉しいことはありません。

ともあれ、第2回目の数学科の夏期リレー講座（第1回目は数学史リレー講座～アーメスのパピルスからペレルマンまで～でした）を終わらしましょう。

また、来年の夏にお会いします。ごきげんよう、さようなら。