

2012 年度・夏期リレー講座・5 日目

リーマン面の登場

川崎真澄

§ 1. イントロダクション ～事物の分類の基準とは？～

分類は学問の基本です。もちろん数学も例外ではありません。

分類と聞けば一般的には詳しい分類であればそれに越したことはない、と思われがちです。事実、そういった場合も少なくないのですが、それ以上に、

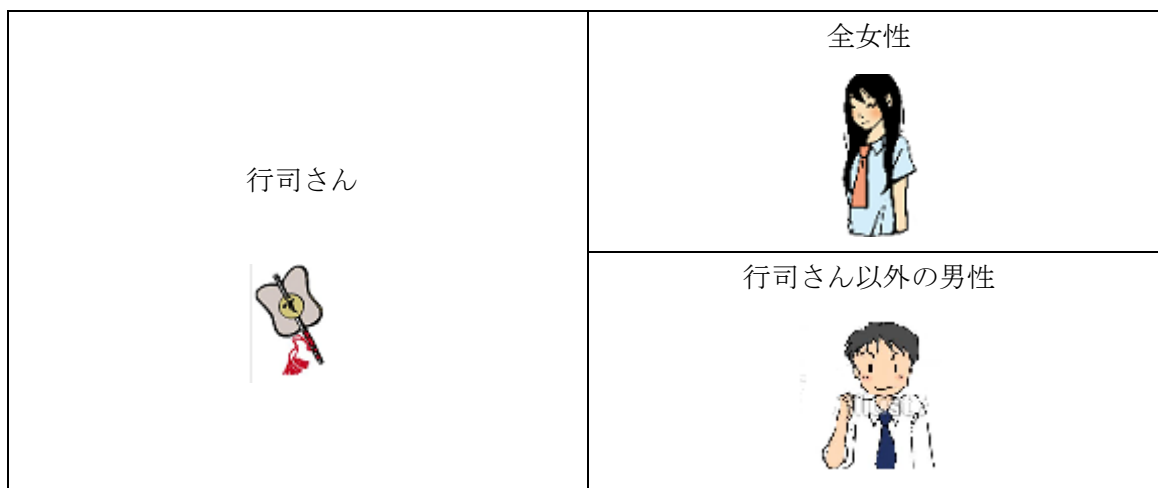
“ほどよく分類”

することが大切です。では“ほどよい分類”とはどういったもののでしょうか。まずはそれを考察してみましょう。

(Q) 今日現在、男性のみ、あるいは女性だけが就くことのできる職業を思いつくままに挙げてみましょう。

(A (一例)) (大相撲の行司)は (男性, 女性) のみが就ける職業とされています。

“地球上の人を(行司)か否かで分類”すると、次のようになります：



～人類を大相撲の行司か否かで分類した図～

ここで、

(行司) ならば (男性) だけれど、(男性) だからといって (行司) とは限らない

(反例) (ここ海城学園にいる君や私)

ので、

“地球上の人を(行司)か否かで分類”ことは“地球上の人の性別による分類”よりも、ある観点では詳しい分類になっているといえます。

しかし、果たして前者が後者よりもあらゆる点で有効な分類となっているか？といえば、答は否、でありましょう。

“地球上の人の性別による分類”があらゆる点で有効であることは論を待ちません。

このように、

あらゆる点で有効な分類の基準を定め、それによって分類する

ことが学問においては極めて重要なことなのです。

§ 2. 立体の分類

☆お断り：本稿では「曲面」とは，“向き付け可能な閉じた曲面”を指します。

今日の授業では“立体”に絞って分類を考えてみましょう。

§ 2-1 多面体

“多面体”は小学校以来おなじみでしょうが、これは面の個数による分類です：

四面体	五面体	六面体	七面体	…
				…

～それぞれの多面体の例を空欄に書き込んでみましょう～

これは、一部の立体においては有効な分類でしょう。そうです。翻って言えば、この分類は、

曲面に関しては無力

なのです。

いきおい、多面体にも曲面にも有効な、すなわち立体全体に対して有効な分類法が望まれるのはもっともなことでありましょう。

では、数学の歴史において、この要望に関する回答として最適とされるものはどのような分類なのでしょうか？

§ 2-2 同相とは？

この要望に関する回答は次のようなものです。

位相空間 A と位相空間 B の間に、全単射両連続写像が存在するとき、 A と B は同相（位相同型）であると呼ぶことにし、 $A \cong B$ と表すことにする。

（同相の定義）

いやはやこれでは少くない生徒が戸惑うことでしょうかから、これを分かりやすく“翻訳”してみます。今、簡単のために、 A と B を共に立体の場合で考えておこうとなります：

2つの立体 A と B が粘土でできているとする。このとき、 A を伸ばすまたは縮めることによって B に変形でき、逆に B を伸ばすまたは縮めることによって A に変形できるとき、 A と B は（一般に、見かけは異なるけれども）同じ立体とみなして、 $A \cong B$ と表すことにする。ただし、変形の際、ちぎったり、つないだり、ねじったりしてはならない。

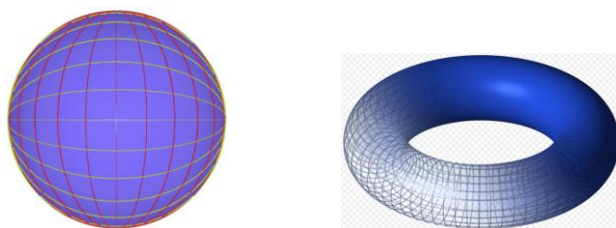
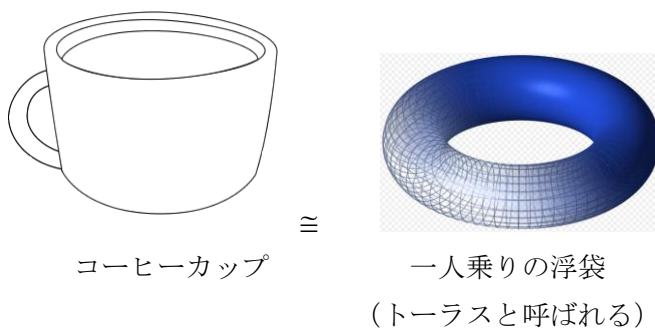
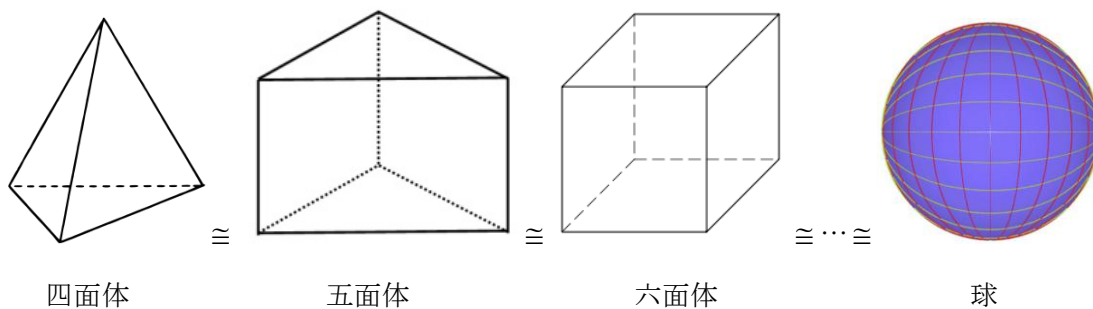
このことから、3つの立体 A, B, C に対し、

$$A \cong B \text{ かつ } B \cong C \text{ ならば, } A \cong C$$

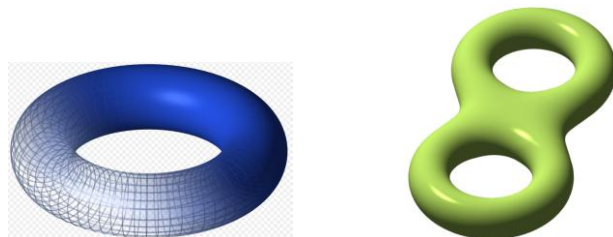
であることが分かります。

(注意) 完全なイコール (=) ではなく、曲がったイコール (\cong) であるところにこの分類のアイデアが見て取れるでしょう。

(例)

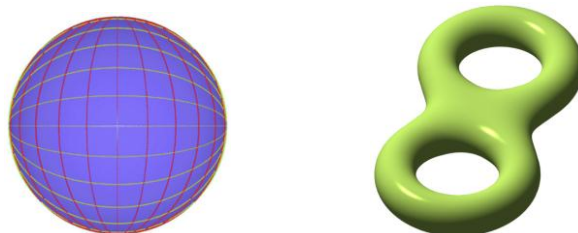


球と一人乗りの浮袋 (トーラス) とは同相ではない。



トーラスと二人乗りの浮袋とは同相ではない。

ゆえに,



球と二人乗りの浮袋とは同相ではない.

以上より, § 1 で提出された問題の回答は,

全ての立体は, 同相な曲面の穴の数で分類することが可能であり, 同時に有効である

となります. つまり, 立体の分類においてはこの基準が“ほどよい”のです.

上記の例のように即座に, 同相な曲面が分かる場合ならいざ知らず, そうでないときはどのようにしてそれを判定したらよいのでしょうか. それを次に考えてみましょう.

§ 2-3 オイラーの多面体定理

§ 2-2 の最後に提出した問題とは, つまり, 多面体がいくつの穴をもつ曲面に同相なのか? というわけです.

これを知るには大変に便利な次の定理があります:

一般に, 多面体はその任意の三角形分割において,
頂点の個数を v , 辺の個数を e , 面の個数を f とするとき,

$$v - e + f = 2 - 2g$$

を満たす g 個の穴をもった曲面と同相である

これはオイラーの多面体定理と呼ばれています. また, g は **genus** (種数) と呼ばれます. この用語は重要ですので覚えておいてください.

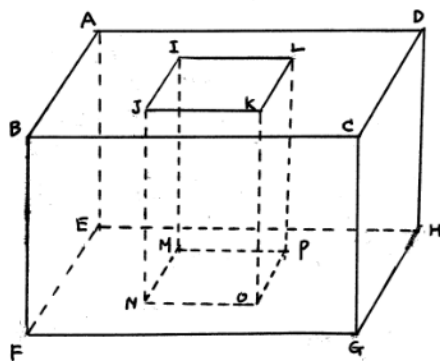
ところで, 「この定理はどこかで見たことがあるぞ」と君は言うかもしれませんね. それもそのはずで, $g=0$ のとき, つまり球に同相な多面体の場合についてのこの定理は中学校で習う内容なのです.

復習してみましょう：

先程見たように四面体は球に同相です。球は穴が開いていませんから $g=0$ です。よって、 $v-e+f=2$ となっているかという、 $v=4, e=6, f=4$ ゆえ、確かに $v-e+f=2$ となっています。

では、ここで問題です。

(Q) 次のような立体に対し、 $v-e+f=2-2g$ が成り立つかどうかを確かめてみましょう。



(穴があいている)

この多面体は一人乗りの浮袋（トーラス）と同相ですから $g=1$ と分かります。つまり、 $v-e+f=0$ となるはずですが。

(解答に移る前に…) v, e, f を次のように勘定した人はいませんか：

$$v=16, e=24, f=10$$

これは誤答です ($v-e+f=2$ となってしまう!)。

誤答の原因は果たしてどこにあるのでしょうか？

(A) 先程のオイラーの多面体定理を再度見てみましょう。1行目にある

『多面体はその任意の三角形分割において』

という文言に注目してください。

中学で習うオイラーの多面体定理ではこの文言は書かれていませんでした。そして g も ($g=0$ ゆえ) 登場していませんでした。

つまり $g=0$ の場合はこの文言に注意を払わずとも問題ない、ということになります。これはいったいどういうことなのでしょう。

まず、この定理には“頂点、辺、面”の3つの要素が登場しています。これらはそれぞれ、立体における

次元の基本図形

と考えられます。つまり

頂点・は0次元での、辺・は1次元での、

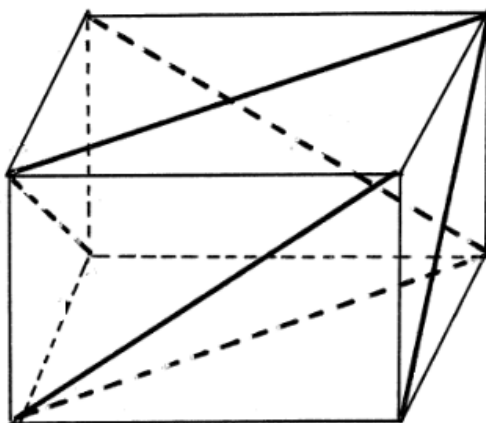
です。となれば、

面は 2 次元の基本図形ゆえ、三角形△とするのが妥当

ではないでしょうか.

『多面体はその任意の三角形分割において』とあるのはその現れなのです.

“任意の三角形分割”とありますからどのように分割してもよいわけで、例えば次の六面体を三角形に分割した上で勘定してみます：



頂点の数は 8, 辺の数は 18, 面 (三角形) の数は 12 となります. 頂点の数は 8 で同じであり, 辺と面 (三角形) の数が先程の勘定の仕方よりも当然のことながら増えていますが, 頂点の数 - 辺の数 + 面の数は同じように 2 となっています.

一方, 中学におけるオイラーの多面体定理では, $v=8, e=12, f=6$ として勘定します. 面は三角形ではなく, 四角形としているわけです. それであっても, 結果は 2 で一致しています. これは偶然の一致ではありません. 辺の数の 18 が $e+6$ であり, 面の数の 12 が $f+6$ なので, 6 が ($6-6=0$ により) 相殺されているわけです.

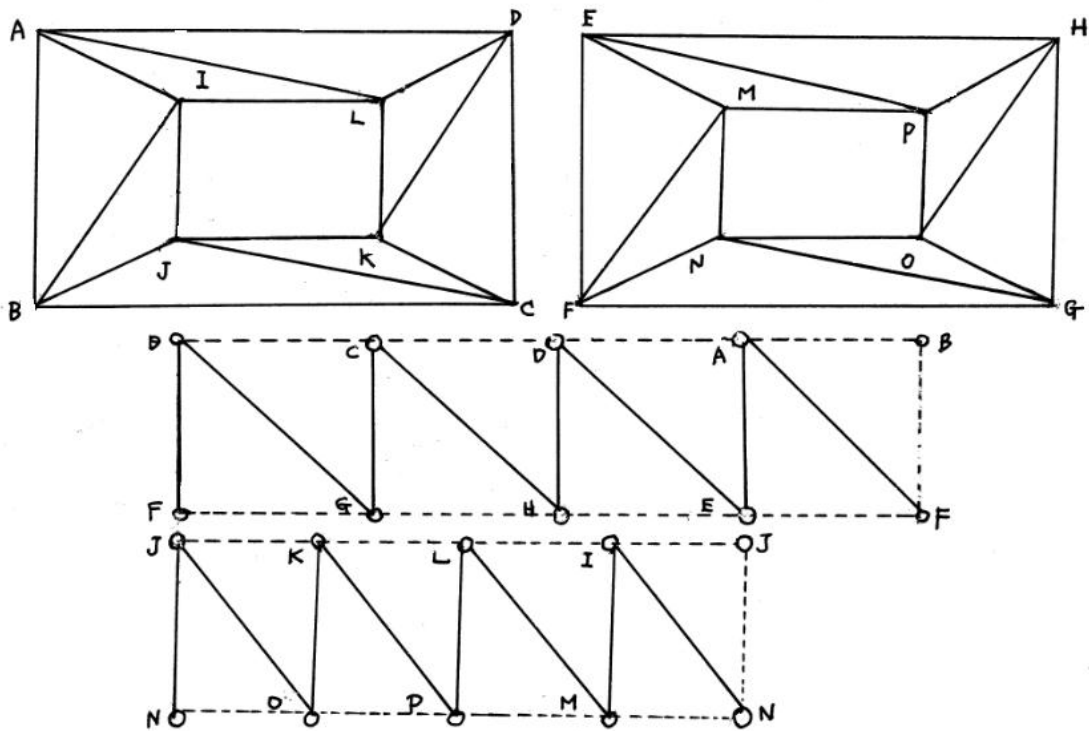
(Q) これと同様なことを, 五面体の場合でも確かめてみましょう.

しかし, 穴が開いている場合 (すなわち $g \geq 1$) は, やはり面を三角形に分割せねば本問のように誤答となるわけです.

というわけで, 例えば, つぎのように面を三角形に分割して頂点, 辺, 面の数である v, e, f をそれぞれ勘定してみると,

$$v=16, e=48, f=32$$

となります (次の図を参照)：



(※) この三角形分割で, $v=8+8=16$, $e=16+16+8+8=48$, $f=8+8+8+8=32$ $\therefore v-e+f=16-48+32=0$

なるほど, $v-e+f=0=2-2g$ が成立するわけです.

(Q) この他の三角形分割の仕方を考え, オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめてみましょう.

§ 3. 関数か関数でないか

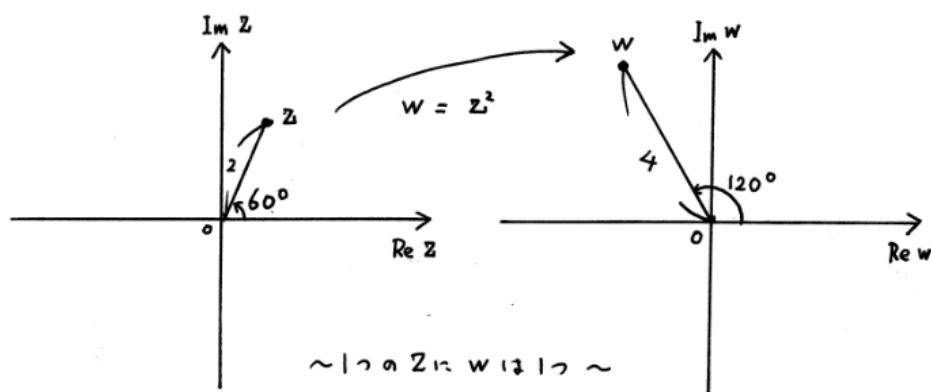
さて、今日はここから複素数の話となります。

昨日の平山先生の授業で扱われたように、

$$w = z^2 \text{ は } z \text{ の関数}$$

です。つまり、ひとつの z に対して w はひとつに定まります。

(例) $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 $z^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 = \dots = -2 + 2\sqrt{3}i$ となる。



これは一昨日に小林先生によって扱われた「ド・モアブルの定理」によっても計算できます：

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \text{ より,}$$

$$z^2 = \{2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)\}^2 = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

では、

$$w = \sqrt{z} (= z^{\frac{1}{2}}) \text{ は } z \text{ の関数でしょうか?}$$

例えば $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 $\sqrt{z} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると、

$$(a + bi)^2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ より, } a^2 - b^2 + 2abi = 1 + \sqrt{3}i \text{ となり, これより,}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = \sqrt{3} \end{cases} \text{ となるので, } (a, b) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ となり, これより,}$$

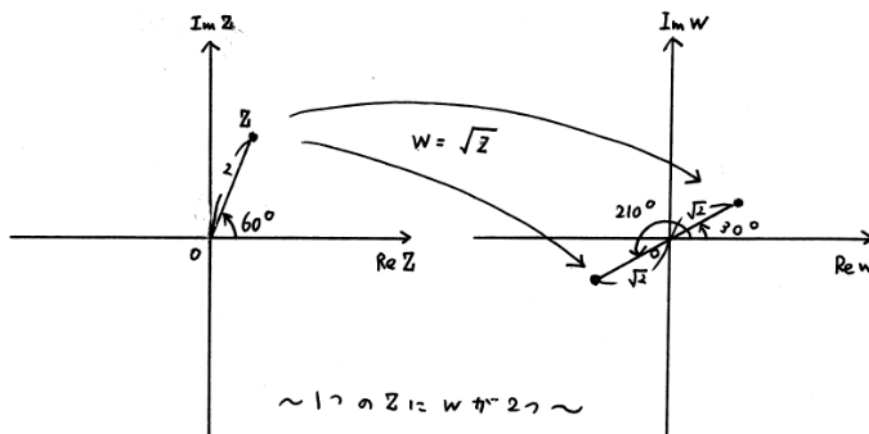
$$w = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

を得ます。

すなわち,

$$w = \sqrt{z} (= z^{\frac{1}{2}}) \text{ はひとつの } z \text{ に対して } w \text{ はひとつに定まらない}$$

ことが分かります.



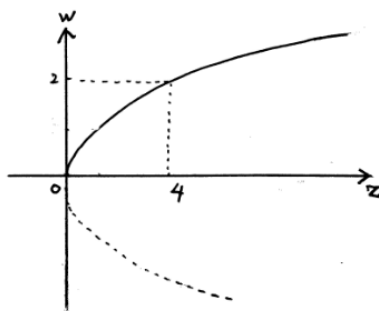
つまりは,

$$w = \sqrt{z} (= z^{\frac{1}{2}}) \text{ は } z \text{ の関数ではない}$$

ことが分かったのです.

例えば, **実数の平方根** を考えるとき, 例えば $\sqrt{4} = w$ とすると, $w^2 = 4$ であり, これを解くと $w = 2, -2$ となるものの, この内, 正の方を 4 の平方根と定義することで,

$w = \sqrt{z} (= z^{\frac{1}{2}})$ を z の関数とできたわけでした:



実数の場合は正という条件が意味をなしますが, 実数でない複素数の場合は符号が定義

できないので $w = \sqrt{z} (= z^{\frac{1}{2}})$ はひとつの z に対して w はひとつに定まらないのは致し方ないところです.

では, 実数の平方根の時のような **なにかうまい条件** を付けることによって $w = \sqrt{z}$ を z の関数とみなすことはできないでしょうか.

§ 4. リーマン面の登場

果たしてうまい条件はあります。先ほどの例を見てみましょう。

$$w = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ),$$

$$w = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

であることに注目すると、ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が、 $n \in \mathbb{Z}$ のみならず、あたかも $n \in \mathbb{Q}$ でも成り立つように思えます。このことにヒントを得て、

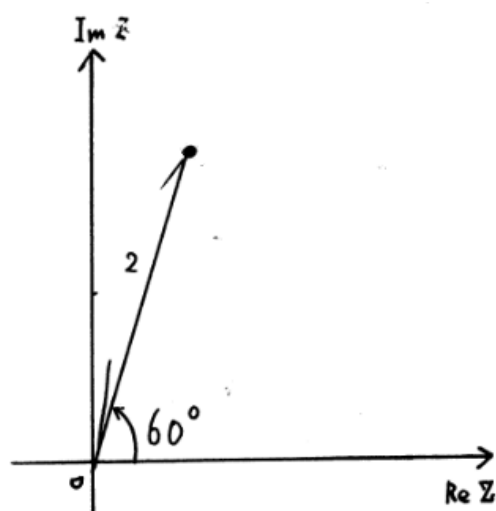
$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ を z の複素関数と考えるには、定義域を次のようにして、

2枚の複素数平面を組み合わせたもの

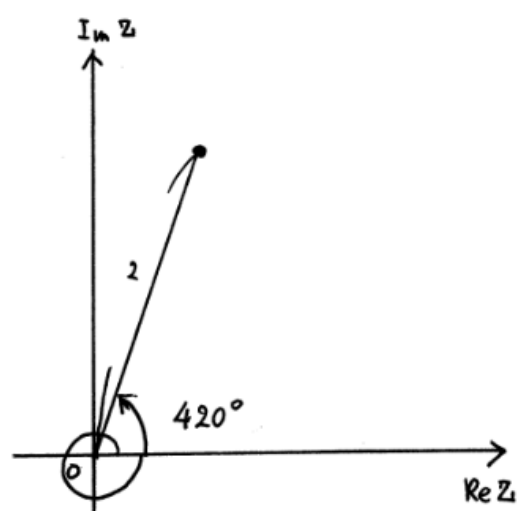
として考えるのです：

- ① $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$)は r と θ を適切に設定することにより、0以外の全ての複素数を表すことができます。

(例) $z = 1 + \sqrt{3}i$ なら、下図を参考にして $r = 2$, $\theta = 60^\circ + 360^\circ \times m$ ($m \in \mathbb{Z}$)とすればよい。



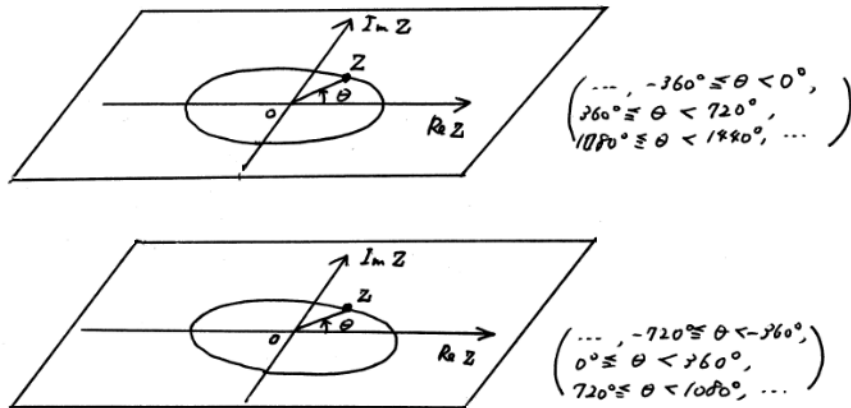
$m = 1$ のケース



$m = 2$ のケース

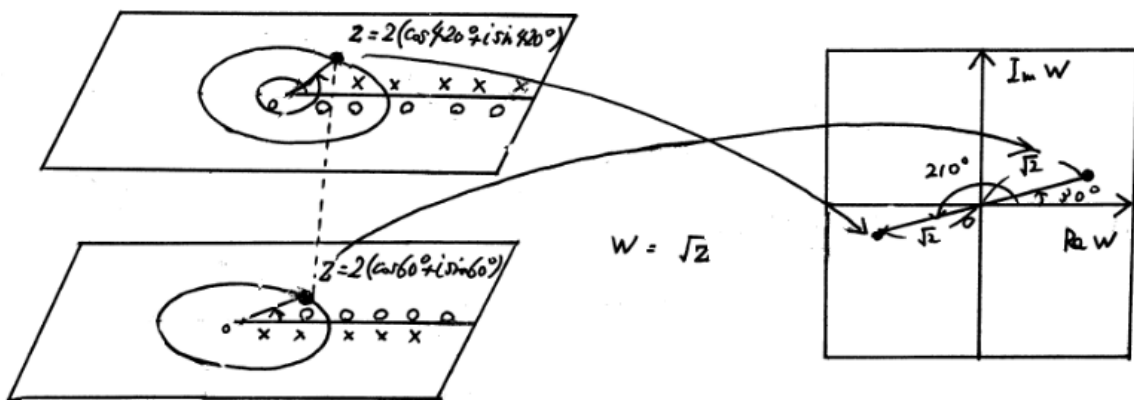
② $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ で, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$) に対し,

- (I) 1 周目の θ (つまり, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) に対しては, 1 枚目 (下) の複素数平面を定義域とし,
- (II) 2 周目の θ (つまり, $360^\circ \leq \theta < 720^\circ$) に対しては, 2 枚目 (上) 複素数平面を定義域にします (下図参照):



以下, 3 周目の θ (つまり, $720^\circ \leq \theta < 1080^\circ$) に対しては, 1 枚目の複素数平面を定義域にすればよいことが, 4 周目の θ (つまり, $1080^\circ \leq \theta < 1440^\circ$) に対しては, 2 枚目の複素数平面を定義域にすればよいことが, そして 5 周目の...といった具合になることが分かります. -1 周目, -2 周目, ... などでも同様です.

③ よって, 2 枚の複素数平面それぞれに $z=0$ から実軸の正の部分に切込みを入れて, 下図において 1 枚目と 2 枚目の $\circ \circ \circ$ 同士を, そして $\times \times \times$ 同士を接着することでできる面を $w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ の定義域と考えれば, $w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ は z の関数となるわけです.



~この 2 枚の複素数平面からなる空間を $w = \sqrt{z}$ の定義域と考えれば $w = \sqrt{z}$ は z の関数とみなせる~

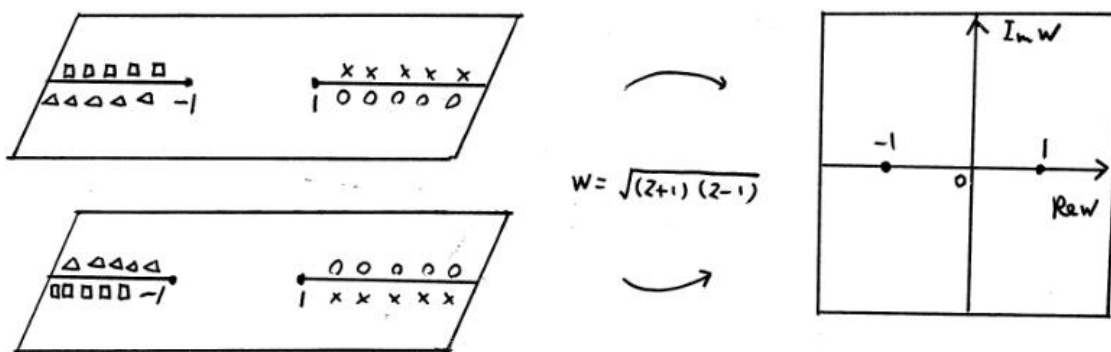
こうしてできた2枚の複素数平面からなる空間を,

$$w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z}) \text{ のリーマン面}$$

と呼びます.

確かに言われてみればその通りなのですが, いやはや素晴らしいアイデアです (その名の通り, これはドイツのB・リーマン (1826-1866) の天才によって与えられたものです).

もうひとつ $w = \sqrt{(z+1)(z-1)}$ のリーマン面を見ておきましょう. 作り方の一例をみておきましょう (1枚目の○○○と2枚目の○○○同士, 同様にして×××同士, △△△同士, □□□同士を貼りあわせる)



~このリーマン面により $w = \sqrt{(z+1)(z-1)}$ は z の関数とみなせる~

さて, これでめでたしめでたし, と言いたいところなのですが, 実は困ったことが生じています.

そう, それは, これらのリーマン面を3次元空間で実現することはできない (○○○同士と×××同士を接着するのは無理!) のです. いきおい,

こんな定義域を作れたら $w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ や $w = \sqrt{(z+1)(z-1)}$ を z の複素関数としてみる事ができるのになあ...

といった空想上の話と捉えられてしまいます.

空想上のことであっても論理に矛盾がなければ問題ないのですが, できれば3次元空間において「実現」したい. そしてそれを「見てみたい」と思うのが人情なのではないでしょうか.

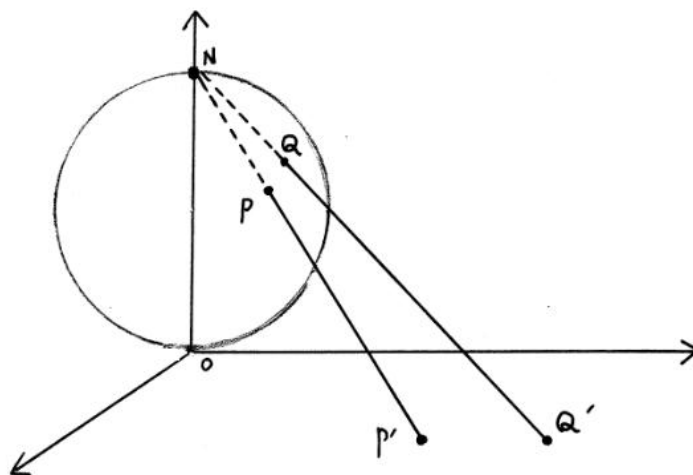
果たしてこの願望は叶えられるのでしょうか. 次項で探ってみることにしましょう.

§ 5. リーマン面を曲面として捉える

$w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ のリーマン面は、2枚の複素数平面をうまく接続できないために実現できなかったわけですが、では、こんなことを考えてみましょう。それは § 2-2 で紹介した同相の定義に従って、

複素数平面がどんな図形に同相なのか？

を考えてみるのです。次の図を見てください：



球面上の北極 N をスタートして N 以外の球面上の点を通る直線によって、球面上の P は複素数平面上の P' のみに対応しますし、逆に P' は P のみに対応しています（同様に球面上の複素数平面上の Q は Q' のみに対応しますし、逆に Q' は Q のみに対応しています）。また Q が P の近くの点であれば、 Q' も P' の近くなることも了解されると思います。この対応が同相の定義に合致するのです。つまり、

球面(S と名づける)から北極 N を除いた集合は複素数平面(C と名づける)とは同相なのです。すなわち、

$$S - \{N\} \cong C$$

というわけです。ここで、北極 N に対応する仮想（空想上）の点を $\{\infty\}$ とすれば、

$$S \cong C \cup \{\infty\}$$

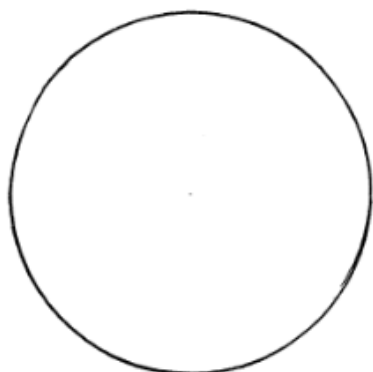
とできます（複素数平面のコンパクト化といいます）。

これにより、2枚の複素数平面で考えていたリーマン面を、2つの球面で考えてみようというわけです。

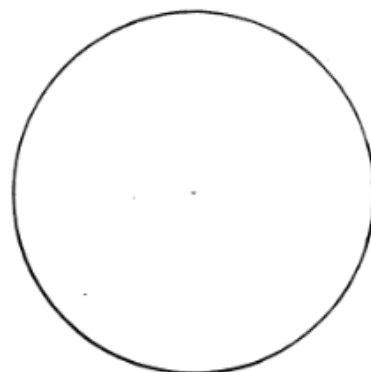
「なんだ！空想であることには変わりはないじゃないか！！」

との声が聞こえてきそうですが、空想に変わりはありませんが、こちらはこの仮想の点を設定することで、“目に見える”形で次のようにリーマン面を“実現”できるのです。

(1st step)

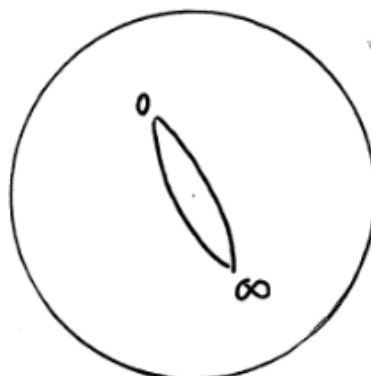
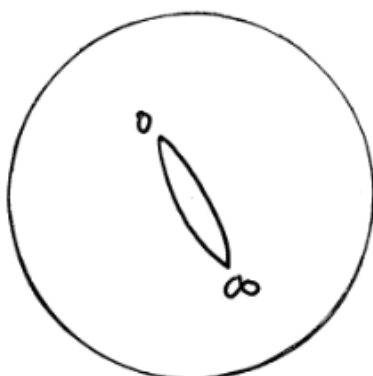


1枚目の複素数平面ならぬ1つ目の球面



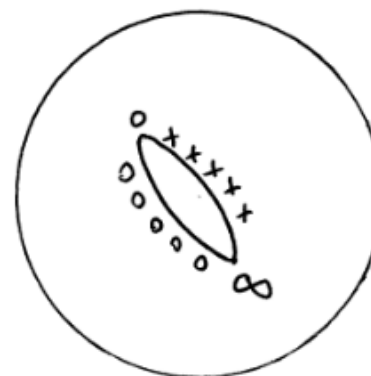
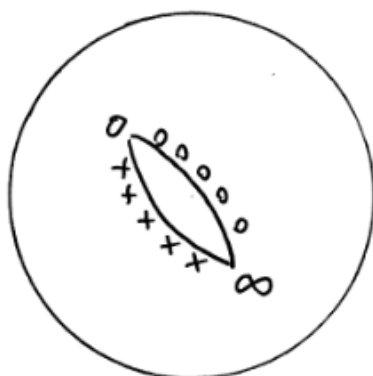
2枚目の複素数平面ならぬ2つ目の球面

(2nd step)



両方の球面に切り込みを入れる (∞が導入されたので図のようになる).

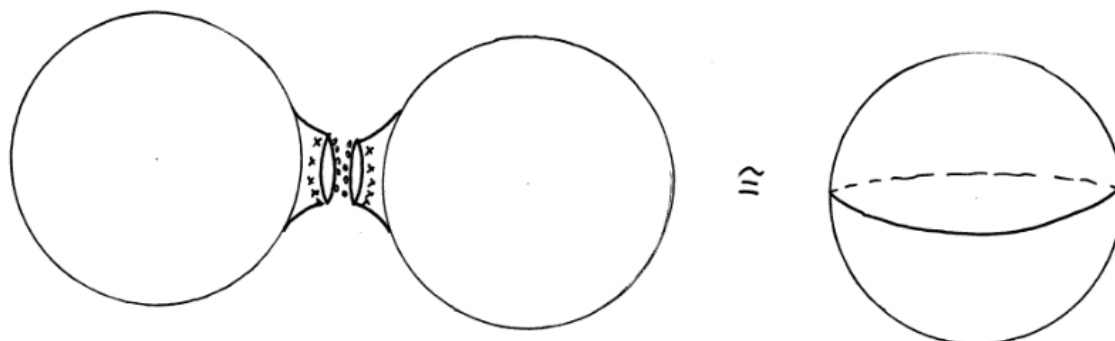
(3rd step)



ooo同士とxxx同士を接着することは“実現”できることです.

(Final step)

よって,



であることが分かります.

つまり,


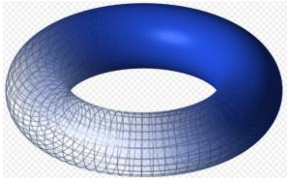
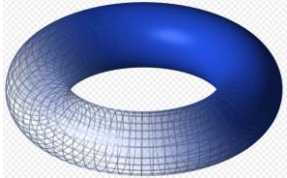

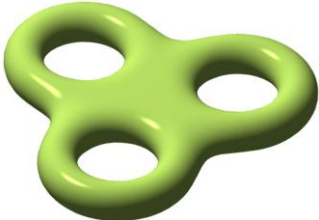
コンパクト化された $w = z^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{z})$ のリーマン面は, 球面と同相

なのです. なるほど, 実現可能である所以です.

(Q) コンパクト化された $w = \sqrt{(z+1)(z-1)}$ のリーマン面が球面と同相であることを上と同様にして示してみましょう.

同様にして, 様々なコンパクト化されたリーマン面を考えることができます. いくつかの例を挙げておきます.

【 $w = f(z)$ のコンパクト化されたリーマン面の種数】

$f(z)$	種数	図
$\sqrt[3]{z}$	0	
$\sqrt{(z+1)z(z-1)}$	1	
$\sqrt{z^4 - 1}$	1	
$\sqrt{z^5 - 1}$	2	
$\sqrt[3]{z^4 - 1}$	3	

コンパクト化されたリーマン面の種数 g について、一般に、次のことが知られています。

$$w = \sqrt[n]{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2} \cdots (z-a_p)^{m_p}}$$

(ただし, a_1, a_2, \dots, a_p は全て異なる複素数で, $GCM(n, m_k) = 1$ とする)

のコンパクト化されたリーマン面は種数 g の曲面 (すなわち g 個の穴をもった曲面) と同相である。ただし, g は次式を満たすものとする:

$$2g-2 = -2n + \begin{cases} p(n-1) & \cdots & GCM(n, m_1 + m_2 + \cdots + m_p) \neq 1 \text{ のとき} \\ (p+1)(n-1) & \cdots & GCM(n, m_1 + m_2 + \cdots + m_p) = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

これをリーマン・フルヴィッツの定理 (の一部) といいます。

左辺に $2g-2$ が登場していますね。そうです。

この定理はオイラーの多面体定理の別表現

なのです。

先に紹介した例のうち, 2 つについてこの定理を適用してみましょう:

1. $w = \sqrt{z^4 - 1}$ のコンパクト化されたリーマン面は,

$$2g-2 = -2 \times 2 + 4 \times (2-1) = 0 \text{ より, } g=1 \text{ の曲面と同相であることが分かります。}$$

2. $w = \sqrt{z^5 - 1}$ のコンパクト化されたリーマン面は,

$$2g-2 = -2 \times 2 + (5+1) \times (2-1) = 2 \text{ より, } g=2 \text{ の曲面と同相であることが分かります。}$$

(Q) リーマン・フルヴィッツの定理を利用して次を計算してみましょう。

(1) $w = \sqrt[4]{z^4 - 1}$ のコンパクト化されたリーマン面を同相とする曲面の種数 g を求めよ。

(2) $w = \sqrt[5]{z(z-1)(z+1)}$ のコンパクト化されたリーマン面を同相とする曲面の種数 g を求めよ。

(3) $w = \sqrt[6]{z(z-1)(z+1)^5}$ のコンパクト化されたリーマン面を同相とする曲面の種数 g を求めよ。

(A) (1) $g=3$ (2) $g=4$ (3) $g=5$

§ 6. 今後の展望のひとつ

(本章ではいくつかの用語について定義することなしに用いることにします. 興味のある人は調べてみましょう)

複素数平面 \mathbf{C} ではなく, 球面 $S (\cong \mathbf{C} \cup \{\infty\})$ で考えることのメリットは他にもあるでしょうか?

例えば, 多項式同士の商として表される $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ の関数 (有理関数と呼ばれる) として,

$$f(z) = \frac{(z+1)z^2(z-1)^3}{(z+2)^4(z-2)^5}$$

を考えると, 分子を 0 にする z ($f(z)$ の零点と呼ばれる) は $-1, 0$ (2つ), 1 (3つ) の合計 6つ (重複を含めて) あります.

また, 分母を 0 にする z ($f(z)$ の極と呼ばれる) は -2 (4つ), 2 (5つ) の合計 9つ (重複を含めて) あります.

これを, $S \rightarrow S$ の関数として考えると, 極の個数は 9つで変わりませんが, 零点の個数も 9つとなります.

これは, $f(z) = \frac{(z+1)z^2(z-1)^3}{(z+2)^4(z-2)^5}$ において, $z = \frac{1}{t}$ とおく ((Q) 何故か?) ことにより,

$$f(z) = \frac{(1+t)(1-t)^3 t^3}{(1+2t)^4(1-2t)^5}$$

となるので, $t=0$ すなわち $z=\infty$ が零点になることが分かりま

す (重複を含めて 3つ).
すると, 零点の個数も極の個数も共に 9つとなっていることが分かります.

実際, 次の定理が成り立ちます:

$S \rightarrow S$ の有理関数において, 零点の個数と極の個数は重複を含めて等しい

この定理などは, $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ではなく $S \rightarrow S$ の関数として考えることで生じる顕著な性質といえましょう.

(Q) $S \rightarrow S$ の有理関数 $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ に対して, 零点の個数と極の個数を求めることによ

り, 上の定理が成り立つことを確認せよ.

この定理が成り立つことをはじめとして, 有理関数は $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ではなく $S \rightarrow S$ の関数として考えることが “自然である” ことが随所に見ることができるのです.

一般に、 z の多項式 $p_j(z)$ を係数とする代数方程式

$$p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \cdots + p_n(z) = 0$$

の根 w を z の関数と見たとき**代数関数**と呼びます。

$n=2$, $p_0(z)=1$, $p_2(z)=-z$ の場合, つまり $w=\sqrt{z}$, $-\sqrt{z}$ はリーマン面を定義域とする代数関数です。

今見たように、有理関数は定義域として S を考えるのが“自然”でした。それと同様に、代数関数はそのコンパクト化されたリーマン面を定義域として考えることによってその本来の性質がよく理解されるのです。

リーマン面の研究は極めて意義のあることです。一例をお話しすると、昨年行った夏期リレー講座では、「4次以下の代数方程式」根は、べき根とその加減乗除で表し得ました。

ところが、5次以上の代数方程式においては、一般にはそれが不可能（アーベルの定理）であるとお話しました（数学科のホームページから講義録を読むことができます）。

では、例えば5次方程式の根は表示できないのかということ、上の意味ではできないのですが、

トラスを定義域とする、いわゆる楕円モジュラー関数を用いれば、根の表示はできる

のです。面白そうだな、と思った人はこのリレー講座を発端として、本格的に複素関数論を学んでチャレンジしてみてもはいかがでしょうか。

さて、いま、コンパクト化された代数関数のリーマン面全体の集合を考えます。このとき、これらの“ほどよい”分類は種数による分類でありましょう。

さらに詳しく分類する場合、“意味のある分類”になる基準はあるのでしょうか（詳しい分類であっても必ずしもそれが意味をもつかは何とも言えない、と今日の冒頭でお話ししました通りです）。実はそれは存在し、2つのコンパクト化されたリーマン面が

“双有理同型か否か”

で分類することなのです（なぜそれがよい基準になっているかの詳細は残念ながら割愛します。詳細を探りたい人は、「代数関数体」をキーワードとして調べてみてください）。

同相よりも詳しい分類だということですから、代数関数のコンパクト化されたリーマン面 R_1, R_2 が双有理同型であれば同相ですが、同相だからといって双有理同型とは限らないというわけです。ここで双有理同型であるとは、 R_1 と R_2 のそれぞれの方方程式を双有理変換で記述しあえることです。

(例)

$w = \sqrt[3]{z^2(z-1)^3}$, $w = \sqrt[3]{z(z-1)}$, $w = \sqrt[3]{z(z-1)^2}$ の, それぞれコンパクト化されたリーマン面を R_1, R_2, R_3 とすると, これらはお互いに同相 (ともに $g=3$) です.

(\because) 種数を g とすると, 3 つともリーマン・フルヴィッツの定理を適用すると,

$$2g-2 = (-2) \times 7 + 3 \times 6 = 4$$

となる. よって $g=3$ を得る.)

また, R_1 と R_2 とは双有理同型です.

(\because $w = \sqrt[3]{z^2(z-1)^3}$ より, $w^3 = z^2(z-1)^3$ であり, これに

$$\text{双有理変換 } \varphi : \begin{cases} z = \frac{Z}{Z-1} \\ w = \frac{w^2}{Z-1} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi^{-1} : \begin{cases} Z = \frac{z}{z-1} \\ W = \frac{w^4}{z(z-1)^2} \end{cases} \text{ を施すと, } w^3 = z(z-1) \text{ となる.}$$

(Q) φ^{-1} が上の式になることを実際に示してみましょう.

ところが, R_2 と R_3 は双有理同型ではありません.

(注意) $w = \sqrt[3]{z(z-1)^2}$ のコンパクト化されたリーマン面は「クライン曲線」(これは“クラインの”壺のことではありません) と呼ばれ, 種々の興味深い性質が知られています.

一般に, 2 つの代数関数のコンパクト化されたリーマン面が同相か否かは比較的簡単に判明することが多い (リーマン・フルヴィッツの定理を利用すればよい) ですが,

双有理同型か否かを判定するのは極めて難しい

ことです. 次善の策として, 様々な解析的手法が考えられており, 例えば次の定理はその一例を与えます:

コンパクト化された種数 $g (\geq 2)$ のリーマン面 M_1, M_2 に対し, M_1, M_2 のそれぞれのワイエルシュトラス点の個数が異なるならば, M_1 と M_2 は双有理同型ではない.

ちなみに逆は必ずしも成り立ちません.

ここでワイエルシュトラス点（大雑把に言えば変曲点のような点）の定義や、個数の計算の仕方を紹介するのは余りに専門的に過ぎてしまいますので省略せざるを得ません（例えば、邦書では「函数論－リーマン面と等角写像－（楠幸男著・朝倉書店）」に詳細な記載があります）が、計算によれば、 R_2 のワイエルシュトラス点の個数は8、 R_3 のワイエルシュトラス点の個数は24ですので、この定理を用いれば R_2 と R_3 は双有理同型ではないことになります。もちろん、 R_1 と R_3 も双有理同型ではありません。

このように、リーマン面の理論は、様々な分野の数学が躍動します。いきおい、（代数や幾何、解析などという区別はあくまでも便宜的なもので）

数学はひとつである

ということを知ることになります。

双有理同型か否かで種数 g のコンパクト化されたリーマン面を分類する理論を

モジュライ理論

といいます。

明日はいよいよ最終日。小澤先生が“代数学の基本定理”を解説される予定です。お楽しみに。

【参考文献】

1. 複素数 30 講 志賀浩二 朝倉書店 本講座の続きとして是非。
2. 関数論初歩 遠山啓著 日本評論社 明快な語り口は著者ならではの。絶版。
3. 複素関数入門（現代数学への入門） 神保道夫著 岩波書店
複素関数論の様々なトピックを、豊富かつ端的な例で理解させる好著。
4. 複素解析 - 1 変数解析関数 - 笠原乾吉 実教出版
楯田関数論、ピカールの大定理なども詳説。入門書の書き方のお手本というべき快著。
5. 函数論－リーマン面と等角写像－（楠幸男著・朝倉書店）
複素多様体としてのリーマン面とその上で定義される等角写像について詳説。
6. 新版 複素解析（基礎数学） 高橋礼司 東京大学出版会
楯田関数論の具体的記述が便利。リーマン面の解析的理論の初歩を学ぶのに絶好。

尚、トーラスなどの図版はフリーの素材より転載させていただきました。