

◆ 立方体の面を塗り分ける問題の解法が納得いかない。

回答

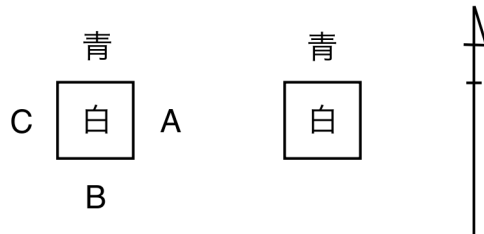
「異なる6色(赤・白・青・緑・黄・紫)をすべて用いて立方体の面を塗り分ける方法は何通りあるか。」という問題に対しての質問だと思います。計算式としては「 $5 \times (4 - 1)! = 30$ 通り」、説明としては、「下面の色を1つ決めると、上面の色は5通りあり、側面は残り4色の円順列となるので」という解答が一般的です。しかし、これで納得してもらうことは実際はなかなか難しいです。

6面を塗り分けた立方体がたくさん地面にばらまかれているとしましょう(10000個くらいあれば十分でしょうか?)。全く同じものをはじいていき、最終的に異なるものが何種類あるのかを知りたいのですが、向きがまちまちなので近くにある2つの立方体が同じものかどうかは瞬時には判別できません。皆さんならどう判別しますか?これを生徒に聞くと、1つの決まった色が下になるようにしてみる、という答えが自然に返ってきます。

そこで例えば、**すべての立方体の赤い面を下に**してみましよう。すると、赤は見えなくなり、見えるのは残り5色(白・青・緑・黄・紫)です。赤い面はこれ以降ずっと伏せたままにしておきます。

上面の色はさまざまですが、白・青・緑・黄・紫の5種類があります。上面の色が違えば、それらは即、異なる立体と判定できます。

では、上面の色が同じであればどうでしょう。ここでは、下面が赤、上面が白である2つの立体を考えましょう。立体を真上から見ると、どちらも手前に白が見え、向こうに赤が隠れています。側面は残り4色(青・緑・黄・紫)です。これらが同じかどうかを判別したいとき、2つの立体を並べて、1つの面(例えば、青い面)の方向を(北向きに)揃えるとよいでしょう。



そして、A, B, Cの色並びが同じかどうかをチェックし、これも全く同じであれば、全く同一の立方体と判定できます。

逆に言えば、上面が白であるようなすべての立方体(もちろん下面は赤です)は、上の手順に従って分類でき、結局A, B, Cの順列の数、つまり $3! = 6$ 種類あることになります。上面は他の色の可能性もあわせて、5種類あるので、異なる種類の立方体は $5 \times 3! = 30$ 通りとなります。