海城生に答えます　～答えの一案～

A. Mo.

◆ 特性方程式の解を利用して漸化式を変形できるのはなぜか.

回答

特性方程式の解を利用して漸化式を変形する，とは，2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ (p, q は 0 でない定数，さらに p は 1 でない) において，α についての 1 次方程式 $\alpha = p\alpha + q$ (これが特性方程式) をつくり，ここから得られた α の値を用いて， $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形するというものです.

a_{n+1} と a_n は違うものであるにもかかわらず，同じ α に置きかえてしまってよいのか，というような素朴な疑問です.

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ は， $a_{n+1}+8 = 3(a_n+4)$, $a_{n+1}+2 = 3(a_n+2)$, $a_{n+1}-1 = 3(a_n+1)$ など，いろいろ変形できますが，**役に立つ変形は**， $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$ **だけ**です.

それは $\boxed{a_{n+1} + 2} = 3\left(\boxed{a_n + 2}\right)$ のように，両辺にあるパーツが揃っているから (n を機械的に $n + 1$ に置き換えたものだから) です．というわけで,

$$a_{n+1} = pa_n + q \ldots (\text{ア}) \quad \text{が，} \quad a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \ldots (\text{イ})$$

の形に変形できたら便利ですが,

(イ) は， $a_{n+1} = pa_n - a\alpha + \alpha$ と同じなので,

$-\alpha p + \alpha$ の部分が q と一致すれば OK です．そんな $\boldsymbol{\alpha}$ **を見つければよいだけ** なのです**....**

が，これを見直してみると， $-\alpha p + \alpha = q$ ，すなわち， $\alpha = p\alpha + q \ldots (\text{ウ})$ と同じですから，これをみたす α を見つければよいということで**も**あります.

これは**たまたま** $a_{n+1} = pa_n + q$ の a_{n+1}, a_n を両方 α に置き換えたものに**も**なっています.

だから，**簡易的**に a_{n+1}, a_n を両方 α に置き換えたものをつくり，それをみたす α を用いると,

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \ldots (\text{イ})$$

の形に変形でき，数列 $\{a_n - \alpha\}$ が公比 p の等比数列であることがわかります.