海城生に答えます　～答えの一案～　M. K.

◆ ベクトルの内積が何を表しているか分からない．
形式的には解けるが，解いた気がしない．

回答

なるほど．よく出される質問です．数ある図形の諸定理のなかで，“ ピタゴラスの定理 ”

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad \cdots \text{①}$$

が最も重要な定理のひとつであることは納得できますね．

そして，この大定理を含んでしまう定理があるのです．それは，“ 余弦定理 ”

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \cdots \text{②}$$

です．これはなぜでしょうか？そうです，②で $\cos\theta = 0$ とすれば①となるからです．

では今，①と②を見比べてみましょう．②において，$\cos\theta$ の値が 0 になれば①がでてくるわけですから，

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ は重要な量

であるといえます．**“ 重要な量であれば新たな呼び名と記号が与えられて当然 ”** といえます．そこで，先人たちはこの量を“ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との内積 ”とよび，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ という記号で表すことにしました．つまりは，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

というわけです．

通常，$\times$ も $\cdot$ で表すので紛らわしいです．内積を表す記号が他のものならよかったのに…

そんな嘆きをしばしば耳にします．なるほどごもっともな意見です．とはいうものの，今さら記号を変えるわけにもいきません．ここは先人たちに敬意を表しておきましょう．

ここで，

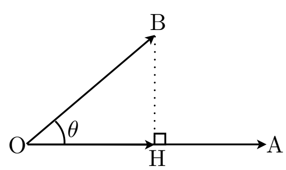
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ が具体的に「何を表すのか？」

が分かれば内積がしっくりくるのではないでしょうか．

そこで，右図を見てください．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{h}$ とし，$\angle\mathrm{BOA} = \theta$ として，

三角比における $\cos\theta$ の定義を思い出すと，



$$\cos\theta = \frac{|\vec{h}|}{|\vec{b}|}$$

ですから，両辺に $|\vec{b}|$ を掛ければ，

$$|\vec{h}| = |\vec{b}|\cos\theta \ \cdots \text{③}$$

となるので，結局，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{h}|$$

となります．

すなわち，標語的に言えば，

“ 内積とは２つの線分の長さの積である ”

といえるのです．

以上をまとめてみましょう．ベクトルの内積とは，

余弦定理がピタゴラスの定理になるかどうかのカギを握る量（の半分のマイナス）のことで，それはつまるところ

２つの線分の長さの積

を表すのだ，というわけです．ベクトルの内積がしっくりきたでしょうか．

では，最後にひとつだけ注意をしてこの回答を終えることにします．③をみてください．

当然，θ が鈍角であれば，$\cos\theta$ の値は負になります．

長さ（大きさ）なのに負というのはどうも気持ちがよくない

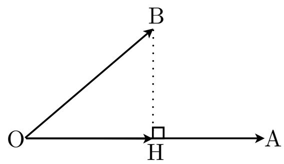
と思われるかもしれませんが，こういった事情から，$|\vec{h}|$ は，いわば

“ 符号付きの長さ ”

であり，長さ（大きさ）ではあるものの負の値も許すものとします．

ではベクトルの内積の意味の理解を深めるために練習問題をひとつやってみましょう．

（問）下の図で，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．



（答）$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{h}$ とします．ベクトルは“ 大きさ ”と“ 向き ”で決まるので，$\vec{h} = |\vec{h}| \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ として，スタートしましょう：

$$\begin{aligned} \vec{h} &= |\vec{h}| \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \end{aligned}$$

【ひとこと】

$\vec{h}$ と $\vec{a}$ は平行なので，$\vec{h}$ は $\vec{a}$ の何倍かで表されることはすぐに分かりますね．すなわち，$\vec{h} = k\vec{a}$ となるような k が存在するというわけです．そして，その倍率 k は，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ であるということをこの結果は意味しているといえます．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が鈍角の場合でも，$\vec{h} = -\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ とはならず，$|\vec{h}|$ が“ 符号付きの長さ ”ゆえ，$\vec{h} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ になります．