海城生に答えます　〜答えの一案〜 T. S.

◆ e の定義は？e は何の役に立つのか？なぜ e^x は微分しても変化しないのか.

回答

《 e の定義 》

e の定義を式で覚えようとすると忘れてしまうので，最初はイメージで覚えましょう.

> **e の定義（こっちを覚える）**　$y = a^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが 1 になるときの a の値を e と定める.

上で書いたことを式にすると，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{(0+h)}-e^0}{h}=1$　つまり，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ ということです．h がものすごく小さいならば，$\displaystyle\frac{e^h-1}{h}\fallingdotseq 1$ と考えることができ，これを式変形すると $e \fallingdotseq (h+1)^{\frac{1}{h}}$ となります.

> **e の定義（こっちは無理に覚えてなくても思い出せる）**　$e=\displaystyle\lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

e の定義は他にも表し方がありますが，上のことを覚えていればすべて導けます.

《 e^x と $\log_e x$ の微分 》

導関数の定義に従って微分してみます.

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\
&= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \qquad (e\text{ の定義により，この }\lim\text{ の部分は 1 です})\\
&= e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\log_e x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\log_e\left\{\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left(\frac{h}{x}+1\right)^{\frac{x}{h}}\right\} \qquad (e\text{ の定義により，この }\lim\text{ の部分は }e\text{ です})\\
&= \frac{1}{x}\log_e e\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

《 e の有用性 》

私たちの願いは,「どんな指数関数, 対数関数でも微分したい」ということです.

a が正の数のとき, 指数関数 a^x を微分したいと思います. $y = a^x$ の両辺に関して底を e として対数をとると, $\log_e y = \log_e a^x = x \log_e a$ であり, この両辺を x に関して微分します.

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= \log_e a \\ y' &= y \log_e a \\ \therefore (a^x)' &= a^x \log_e a \end{aligned}$$

となり, e を使うことで指数関数 a^x の微分ができます.

a が正の数のとき, 対数関数 $\log_a x$ を微分してみると,

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \left(\frac{\log_e x}{\log_e a} \right)' \text{(底を } e \text{ にそろえる)} \\ &= \frac{1}{\log_e a} (\log_e x)' \\ &= \frac{1}{x \log_e a} \end{aligned}$$

となり, e を使うことで対数関数 $\log_a x$ の微分ができます.

ところが, e を知らなかったとして, 定義に従って微分しようとすると,

$$\begin{aligned} (a^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

ここまできて, 極限がわからず先に進めません. 対数関数に関しても同じようにうまくいきません. つまり, e という特別な数に関する指数関数, 対数関数を知ることで, どんな指数関数, 対数関数も解析することが可能となるのです. e は有用だと思えてきましたか？