海城生に答えます　～答えの一案～　　H. H.

◆ $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式の導出方法がわからない。

回答

公式は覚えていても導出方法は忘れてしまっていることがよくあります。累乗の和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ も，教科書にきちんと書かれています。

始めに，$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ $\cdots$ ① であることは既にわかっているものとします。(等差数列の和です)

まず，$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を求めます。

恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ を用います。

この式に，$k = 1, 2, \cdots, n$ を順に代入して，

$$\cancel{2^3} - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$\cdots$$
$$(n+1)^3 - \cancel{n^3} = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

これらの n 個の等式を辺々加えると，

$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$

① を代入して

$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$

S について解いていけば

$3S = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2 - 3n - 2\} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots$ ② が得られます。

次に，$S = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ を求めます。

恒等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ を用いて同様にして，

$$\cancel{2^4} - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$
$$\cancel{3^4} - \cancel{2^4} = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$
$$\cdots$$
$$(n+1)^4 - \cancel{n^4} = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

辺々を加えて ①, ② を代入すると

$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n$

$(n+1)^4-1=4S+6\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n$
$4S=(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$
$=n^2(n+1)^2$ より
$S=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が得られます。

　公式を導くために，なぜ恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ が出てくるのか疑問を感じるかもしれませんが,「先人達の試行錯誤により獲得したアイデアもしくは先見性」と考えて下さい。要は「うまくいくから使っている」わけです。(この手のやり方は数学で結構あります) それでも何となくすっきりしない人のために，視覚的に三角形状に並べた数の和を使って 2 乗の和の公式を導く方法を紹介します。
　1 段目には 1 が 1 個，2 段目には 2 が 2 個，3 段目には 3 が 3 個，$\cdots$，n 段目には n が n 個となるように三角形状に数を並べます。この三角形に並んでいる数の個数は $1+2+\cdots+n$ 個，数の総和は $S=1^2+2^2+\cdots+n^2$ です。

$$\begin{array}{c}
1 \\[2em]
2 \qquad\quad 2 \\[2em]
3 \qquad\quad 3 \qquad\quad 3 \\[2em]
\cdots \qquad\quad \cdots \qquad\quad \cdots \qquad\quad \cdots \\[2em]
n \qquad\quad n \qquad\quad \cdots \qquad\quad n \qquad\quad n
\end{array}$$

　この三角形を $120^\circ, 240^\circ$ 回転させた三角形をつくり，3 つの三角形で同じ場所にある 3 つの数をそれぞれ足すと，和はすべての場所で $2n+1$ になります。

$$+\quad\begin{array}{c}
n \\[2em]
n \qquad\quad \cdots \\[2em]
\cdots \qquad\quad \cdots \qquad\quad 3 \\[2em]
n \qquad\quad \cdots \qquad\quad 3 \qquad\quad 2 \\[2em]
n \qquad\quad \cdots \qquad\quad 3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 1
\end{array}
\qquad +\quad\begin{array}{c}
n \\[2em]
\cdots \qquad\quad n \\[2em]
3 \qquad\quad \cdots \qquad\quad \cdots \\[2em]
2 \qquad\quad 3 \qquad\quad \cdots \qquad\quad n \\[2em]
1 \qquad\quad 2 \qquad\quad 3 \qquad\quad \cdots \qquad\quad n
\end{array}$$

　したがって次の等式が成り立ち公式が導かれます。
$3S=(2n+1)(1+2+\cdots+n)$
$S=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$