

$$\blacklozenge \frac{dy^2}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} \text{ となる理由がわからない.}$$

回答

これは「合成関数の微分」です。まず、 $z = y^2$ とおきます。このとき

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

合成関数の微分を用いると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

ここで、 $\frac{dz}{dy}$ は「 z を y で微分する」すなわち「 y^2 を y で微分する」ことを表しています。つまり

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} y^2 = 2y \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

が成り立ちます。

○ **注意点** $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 等との区別を明確にしましょう。

$\frac{d^2y}{dx^2}$ は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

ですから、 y を x で2回微分したもの(第2次導関数)です。

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ は $\frac{dy}{dx}$ を2乗したもの、つまり、 y を x で微分して、それを2乗したものです。

○ 本題の類題を考えてみましょう。

問 $\frac{d}{dx} \left(2 \cos^2 \frac{y}{2} \right) = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}$ を示しなさい。

$z = \frac{y}{2}$, $u = \cos z$, $v = 2u^2$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(2 \cos^2 \frac{y}{2} \right) &= \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{d}{du} 2u^2 \cdot \frac{d}{dz} \cos z \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{2} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 4u \cdot (-\sin z) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 4 \cos z \cdot \left(-\sin \frac{y}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 4 \cos \frac{y}{2} \cdot \left(-\sin \frac{y}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

■