

◆ 背理法の使い方はわかるが、それで証明されているのには違和感がある。

回答

背理法は今一しっくりとこない人は、まず次の二つの場合を考えてみてください。

[1] 容器Aと容器Bに異なる白い粉が入っている。

何が入っているのかわからないので容器Aの粉を舐めてみたら甘かった。

[2] 塩と砂糖が容器Aと容器Bに入っていることがわかっている。

どっちがどっちだかはわからないので容器Aの粉を舐めてみたら甘かった。

[1] では容器Aに塩が入っていないことはわかったが、だからといって容器Bが塩であるとは断言できない。もしかすると片栗粉かもしれないし、小麦粉かもしれない、あるいは両方とも砂糖が入っているのかもしれない。ようするに、容器Aの粉を舐めてみても、容器Bは白い粉だということしかわからない。

しかし、[2] では一方に塩が、他方に砂糖が入っていることがわかっているから、容器Aの粉を舐めて甘ければ（塩でなければ）容器Bには塩が入っていることになる。

そこで背理法の話になるが、背理法でものを論ずるときには、[2] のように、必ず二つのうちのどちらかであるということが前提になっているのである。

したがって、

「 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。」

とあれば、「 $\sqrt{2}$ は必ず有理数か無理数のどちらかである。」、もう少し細かくいえば、「 $\sqrt{2}$ は実数で虚数などを考える必要はなく、しかも、実数には有理数と無理数の2種類しかない。」ということが前提になる。そして、この前提のもと、 $\sqrt{2}$ が有理数ではないことが証明される（有理数だと矛盾が生じる）ので、 $\sqrt{2}$ はもう一方の「無理数だ」という結論になる。

同じように、

「行列Aは逆行列を持たないことを証明せよ。」

とあれば、「行列Aは必ず逆行列をもつかもたないかどちらかだ。」ということが前提になる。そして、この前提のもとに、逆行列を持つと仮定すると矛盾が生じる。だから、「行列Aは逆行列を持たない」という結論になるのである。

背理法が今一しっくりとこないという人は、この前提をしっかりと踏まえてもらえとしくりとくるのでないだろうか。