

◆ 重複組合せがよく分からない。

回答

異なる n 個のものから、重複を許して r 個取る組合せを重複組合せといい、その総数を ${}_nH_r$ で表します。

まず、 ${}_nH_r$ は ${}_nC_r$ と違って、 $n < r$ でも意味をもちます。「異なる n 個のものから重複を許して r 個取る」とは、「異なる n 種類**のものがたくさんある中から**重複を許して r 個取る」というように考えるからです。

では、例として

3 個の文字 a, b, c から、重複を許して 5 個取る組合せは何通りか。

という問題を考えてみましょう。 a や b や c の書かれているカードがたくさん入った箱から 5 枚取り出すような状況をイメージして下さい。取り出した 5 枚のうち、何枚が a で、何枚が b で、何枚が c か、という点に注目して違いを数えることになります。違う選び方かどうかは、

a b b b c

a a a c c

b b b c c

のように、左から a, b, c の順になるように横一列に並べてしまえば一目瞭然です。取り出したものを並べた列を「順列」といいましたね。つまり、5 枚のカードの選び方は順列に対応させられるのです。

○ | ○ ○ ○ | ○ ↔ a b b b c

○ ○ ○ | | ○ ○ ↔ a a a c c

| ○ ○ ○ | ○ ○ ↔ b b b c c

のように、取り出す 5 枚のカード (の置き場所) を ○ で表し、2 本の仕切り | で区切られた 3 つのスペースによって a, b, c の枚数を表す、という方法が教科書にもよく載っています。この順列は、いわゆる「同じものを含む順列」ですね。7 箇所から ○ を配置する 5 箇所を選ぶ場合の総数に等しいので、 ${}_7C_5$ 通りになります。よって、

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21 \text{ 通り}$$

となります。

一般に、

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

となりますが、これは上の例と同様に考えて、 r 個の \bigcirc と $(n-1)$ 個の $|$ を一列に並べた順列の総数に等しくなります。**選ぶ個数の分だけ \bigcirc を用意し、選ばれるものの種類の数に応じて仕切りを用意する**、と理解しておきましょう。

また、一見すると重複組合せではないように見える問題もあります。

10 枚の同じカードを 3 人に分ける方法は何通りか。

1 枚も受け取らない人がいてもよい。

これは、1 枚目のカードは A さん、2 枚目のカードは C さん、3 枚目のカードは B さん、... のように、「カードをあげる人を 3 人の中から選ぶ」という作業を 10 回行うことになりすから、求める場合の数は

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = 66 \text{ 通り}$$

となります。