海城生に答えます　〜答えの一案〜　　M. Mo.

◆ 放物線 $y = ax^2$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式がなぜ $y = a(x-p)^2 + q$ になるのでしょうか.

回答

初めに準備として, 放物線 C_1 : $y = x^2$ を x 軸に関して対称移動して得られる放物線 C_2 の方程式を求めてみましょう.

点 (x, y) が C_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点 $(x, -y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$-y = x^2 \qquad \text{すなわち} \qquad y = -x^2$$

となります. したがって求める C_2 の方程式は,

$$y = -x^2$$

ということになります. この考え方を理解すれば, 一般に曲線 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動して得られる曲線の方程式が

$$y = -f(x)$$

であることがわかると思います.

せっかくですから, 曲線 $y = f(x)$ を y 軸に関して対称移動して得られる曲線の方程式と原点に関して対称移動して得られる曲線の方程式についても考えてみましょう.

曲線 $y = f(x)$ を C_1 として, C_1 を y 軸に関して対称移動して得られる曲線を C_2, また, C_1 を原点に関して対称移動して得られる曲線を C_3 とします.

まず, 曲線 C_2 の方程式について考えます.

点 (x, y) が C_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を y 軸に関して対称移動した点 $(-x, y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$y = f(-x)$$

となり, これが求める曲線 C_2 の方程式です.

次に, 曲線 C_3 の方程式について考えます.

点 (x, y) が C_3 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を原点に関して対称移動した点 $(-x, -y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$-y = f(-x) \qquad \text{すなわち} \qquad y = -f(-x)$$

となり, これが求める曲線 C_3 の方程式です.

それでは, 最後に放物線 $P_1:\ y = ax^2$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動して得られる放物線 P_2 の方程式が $y = a(x-p)^2 + q$ になることを説明しましょう.

点 (x, y) が P_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を x 軸方向に $-p$, y 軸方向に $-q$ だけ平行移動した点 $(x-p, y-q)$ が P_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$y - q = a(x-p)^2 \qquad \text{すなわち} \qquad y = a(x-p)^2 + q$$

となり, これが求める放物線 P_2 の方程式になるわけです. 同様に考えれば, 曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式が

$$y = f(x-p) + q$$

であることがわかると思います.