海城生に答えます　～答えの一案～　　Y. K.

◆ 解と係数の関係（２次，３次）の成立理由がわからない

回答

２次方程式　$x^2-7x+12=0$　$\cdots$①　の左辺を因数分解するとき，たすきがけの方法を用いました。これは，足して -7　掛けて 12 になる整数を見つける方法です。$12=2^2\times 3$ なので，12 の約数は，± 1,　± 2,　± 3,　± 4,　± 6,　± 12 の 12 個あります。これらのうち，和が 7，積が 12 になるのは，　$(3, 4)$ または $(4, 3)$　だけです。そこで，左辺は

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=(x-4)(x-3)$$

と因数分解されるわけです。ところで，$(x-3)(x-4)=0$ ならば $x-3=0$ または $x-4=0$ が成り立つので，２次方程式①の解は，　$x=3,\ 4$　$\cdots$②　であることがわかります。

ところで，①の２つの解を，$\alpha,\ \beta$ とすると，①の左辺を因数分解するとき，

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=12\quad\cdots③$$

となる２つの数 α, β を求めて因数分解したことになるわけですが，実は，①の左辺に②を代入すると，

$$3^2-7\times 3+12=9-21+12=0$$
$$4^2-7\times 4+12=16-28+12=0$$

が成り立ちます、この理由を考えてみると，$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ と因数分解できたわけですから，②を代入したとき，$x=3$ なら，$3^2-7\times 3+12=(3-3)(3-4)=0\times(-1)=0$ となり，③を満たす数 α, β をみつければ，方程式①の解が見つかるわけです。ただし，整数が見つかればいいのですが，簡単に整数がみつからないことがあります。では，どうしたらいいでしょう。

例えば，２次方程式　$x^2-7x+9=0$　$\cdots$④　の整数の解は見つかりません。このようなときは，解の公式がありました。２次方程式の解の公式により，

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 9}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

13 が平方数ではないので，２次方程式の整数の解はないわけです。

ここで，$\alpha=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$,　$\beta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ とおいてみます。すると，不思議なことに，

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=\frac{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}{2^2}=\frac{36}{4}=9\quad\cdots⑤$$

が成り立ち，和が 7，積 9 がである２つの数を求めていることになります。

逆に，和が p，積が q である２つの数 α, β は，連立方程式

$$\alpha+\beta=p,\quad \alpha\beta=q\quad\cdots⑥$$

の２つの解ですから，⑥から $\beta = p - \alpha$ で β を消去すると，$\alpha(p-\alpha) = q$ すなわち $\alpha^2 - p\alpha + q = 0$ となり，α が２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の１つの解であることがわかります。

α の方を消去しても，β が２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ のもう１つの解であることもわかります。

まとめると，２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の２つの解を α, β とすると，$\alpha + \beta = p$ かつ $\alpha\beta = q$ が成り立つことがわかります。これを，**２次方程式の解と係数の関係**といいます。

この公式の便利な所は，α, β を因数分解や解の公式で求めなくても，$\alpha^2 + \beta^2$ などの式が簡単に計算できることにあります。２次方程式④の解を代入して計算すると，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{62+14\sqrt{13}}{4} + \frac{62-14\sqrt{13}}{4} = 31$$

ですが，⑤を用いると，$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 7^2 - 2 \times 9 = 31$ のように，簡単に計算できてしまいます。

解と係数の関係の証明には，次のようなもっとうまい方法があります。２つの数，α, β が，２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の２つの解であるということは，２つの解が整数でなくても，左辺が $x^2 - px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるからだと考えるのです。すると，展開公式により，

$$x^2 - px + q = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

と成ります。この等式が常に成り立つとすると，係数を比べて，$-p = -(\alpha+\beta)$ かつ $q = \alpha\beta$ すなわち，

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q$$

となることがわかります。これが，２次方程式の解と係数の関係の証明ということになります。

では，何故こんな証明方法を考えるのでしょう。それは，**３次方程式の解と係数の関係**に拡張するためです。３次方程式の解の公式もあるのですが，高校生には難しい公式なので，解の公式を用いて，「３次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の３つの解を α, β, γ とすると，$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$ が成り立つ。」という定理を証明することができません。ところが，上の証明の考え方を用いると，３次方程式の左辺は，

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解されることになり，右辺を展開して，

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

とすると，係数の比較によって，

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$$

が導かれるのです。