海城生に答えます　～答えの一案～　　A. Mi.

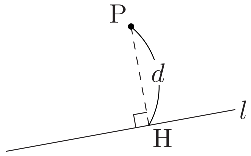
◆ 点と直線の距離の公式が導けない

回答

点と直線の距離の公式というのは以下のようなものでした.

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と直線 $l : ax+by+c=0$ の距離を d とすると,

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



点と直線の距離の公式は多くの証明方法が知られています. ここではそのいくつかを紹介します.

■真っ向から挑む

最初に思いつく方法としては, 点 P から直線 l に下した垂線の足を H とすると, 2 直線 l, PH の交点 H を求め, 2 点 P, H 間の距離を求める方法でしょう. 計算がやや複雑になりますが, できないわけではありません.

直線 PH は傾きが $\dfrac{b}{a}$ で, 点 (x_0, y_0) を通る直線の式ですから,

$$\mathrm{PH} : b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$$

となります. したがって, 2 直線 l, PH の交点の座標は, 連立方程式

$$\begin{cases} l : ax+by+c=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \mathrm{PH} : b(x-x_0)-a(y-y_0)=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を解くことで求めることができます. この連立方程式を解くと,

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2+b^2}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2+b^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left\{\left(a^2x + aby_0 + ac\right)^2 + \left(abx + b^2y_0 + bc\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left\{a^2\left(ax+by_0+c\right)^2 + b^2\left(ax+by_0+c\right)^2\right\} \\ &= \frac{(ax+by_0+c)^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

より, $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となります.

■こんな方法もあります

先ほどの計算はやや複雑になりますが, 実は次のように上手に工夫することもできます. ①を式変形すると,

$$a(x_0-x)+b(y_0-y)=ax_0+by_0+c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となりますから, ②と③の辺々の 2 乗を加えると,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{(ax_{+}by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

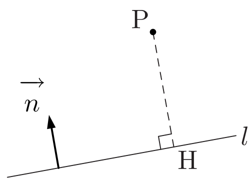
となります. これより, $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

■ベクトルを利用する

ベクトルを利用するのも一つのやり方です.

直線 l の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ は $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ですから, ある実数 t を用いて,

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表すことができます.



これより, 原点を O とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0+ta \\ y_0+tb \end{pmatrix}$$

となりますから, 点 H の座標は (x_0+ta, y_0+tb) と表すことができます. H は直線 l 上の点ですから,

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c=0.$$

t について整理して, $t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$.

したがって,

$$d=\left|t\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=|t|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|=\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

から, $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となります.