

海城生に聞きました ～数学，ここがわからない～

はじめに

7年ほど前になりますが，高校範囲の学習をばっちり終えた（はずの）高3生に，予告なしで次のようなアンケートをとりました。

- 形式的には解けるんだけど，実は理由が未だによくわからない。
 - わからなかった。
 - 授業でもっと詳しく説明してほしい。
- というようなことを1つか2つ具体例で教えて下さい。

これはかつてちょっとした思いつきで，自分自身が教える側としての反省材料になると考え実施したもので，興味深い回答がたくさん得られました。彼らの回答は海城生だけに特有のものではなく，おそらく，全国の高校生が等しく，よくわからない，納得いかない，腑に落ちないものに違いありません。この資料は，われわれ教授者が留意すべきポイントがたくさん含まれているという意味で財産です。私にとっては今でも授業を組み立てる上でのバイブルとなっています。

中には，抽象的な回答，余りに昔のことですっかり忘れてしまっているだけの回答，悩みをぶっちゃけているだけの回答，何を言っているのかわからない回答もありますが，生徒ひとりひとりにとってはそれぞれ切実な訴えです。これからの授業では，生徒の立場に立ち一つ一つ「腑に落とさせる」作戦を立てていきたいと思えます。

尚，これは旧課程（現高3が履修してきた課程）による科目分類です。今後，新課程（現高2以下）に対しては数学科としてアンケートを採る予定です。その際「整数の性質」や「データの分析」についてどんな回答が出てくるか，とても興味深いところです。

2013年7月18日

海城中学高等学校 数学科 森 昭大

数学 I・数学 A

<数と式>

- ◆ 交代式, 対称式の意味と利用法は?
- ◆ 因数分解 (根本, 高次などの難しいものまで) がよくわからない.
- ◆ 対称式が基本対称式だけで表せる理由がわからない.

<場合の数・確率>

- ◆ 立方体の面を塗り分ける問題の解法が納得いかない.
- ◆ P と C の使い分け方がわからない. 不得手.
- ◆ 円順列でなぜ $(n - 1)!$ となるのか不明.
- ◆ 重複組合せがよくわからない.
- ◆ 確率になじめない.
- ◆ 期待値とは何なのか.

<集合>

- ◆ ド・モルガンの法則がわからない.
- ◆ 必要条件, 十分条件の区別の仕方がわからない.

数学 II・数学 B

<図形と方程式>

- ◆ $y = f(x)$ を x 軸方向 p , y 軸方向 q 平行移動すると, なぜ $y - q = f(x - p)$ となるのか.
- ◆ 2円の交点を通る円や直線の式が $f(x, y) + kg(x, y) = 0$ などと表せる理由が不明.
2直線の交点を通る直線が $f(x, y) + kg(x, y) = 0$ などと表せる理由が不明.
2球面の交線を含む平面の方程式が $f(x, y) - g(x, y) = 0$ と表せる理由が不明.
- ◆ 正領域, 負領域って何?
- ◆ 点と直線の距離の公式が導けない.
- ◆ 三角形の面積公式 $S = \frac{|ad - bc|}{2}$ の証明がわからない.
- ◆ x 切片が a , y 切片が b の直線はなぜ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ となるのか.
- ◆ 軌跡の問題, 何となくできるがそれでなぜ求まるのかわからない.
- ◆ なぜ軌跡上の点を (x, y) でなく (X, Y) とおくのか.
- ◆ 順像法, 逆像法がよくわからない.

<不等式の証明>

- ◆ 絶対不等式 (相加相乗, コーシーシュワルツ) の成立する理由が不明.

<三角関数>

- ◆ 三角関数がよくわからない.
- ◆ 加法定理の成立する理由がわからない.
- ◆ 三角関数の合成, なぜそうなるのかがわからない.
- ◆ 倍角の公式の成立する理由が不明.
- ◆ 積和, 和積の成立する理由が不明.
- ◆ 積和, 和積, どうやって覚えるか.
- ◆ $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ など計算はできるが, それがどんな量を表すのかイメージできない.
- ◆ 弧度法がよくわからない.

<指数対数>

- ◆ 指数対数がよくわからない.
- ◆ a^{-2} がなぜ $\frac{1}{a^2}$ なのか.
- ◆ 2^{-3} がなぜ $\frac{1}{2^3}$ なのか.
- ◆ $2^{\frac{1}{5}}$ がなぜ 2 の 5 乗根なのか.
- ◆ 2 の有理数乗 (例えば 2 の $\frac{1}{3}$ 乗) をイメージしたいができない.
- ◆ 真数条件, 底の条件がわからない.
- ◆ 真数はなぜ正なのか, 負のときの値はどうなるのか.
- ◆ \log の一連の公式 (底の変換など) がわからない.
- ◆ 常用対数になじめない.
- ◆ \log を取るとなぜ桁数がわかるのか不明.
- ◆ グラフ $y = \log x$ について一体何なのか.
- ◆ 対数の応用になると解けない.

<微分積分>

- ◆ 微分と積分はなぜ逆算の関係にあるのか.
- ◆ 微分と積分はなぜたし算とひき算の関係なのか.
- ◆ 接線の方程式はなぜ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ なのか.
- ◆ $(x^n)' = nx^{n-1}$ でどうして傾きが求まるのか.
- ◆ 積分はそもそも何を表しているのか.
- ◆ 定積分がなぜ面積 (体積) を表すといえるのか.
- ◆ 回転体の体積はなぜあの公式で求まるのか.
- ◆ なぜ $-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ で面積が求まるのか.
- ◆ 積分方程式の解き方がわからない.

<複素数と方程式>

- ◆ 解と係数の関係の使いどころがわからない.
- ◆ 解と係数の関係 (2次, 3次) の成立理由がわからない.
- ◆ $P(\alpha)$ が余りになる理由がわからない.
- ◆ 余りの求め方がわからない.
- ◆ 因数定理で代入する数の候補が, $\frac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次の係数の約数})}$ である理由が不明.
- ◆ 組立除法があればいい理由が不明.
- ◆ ω の使い方がわからない.
- ◆ なぜ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ なのか.
- ◆ 虚数の考え方がわからない.
- ◆ i って何者なのか. i のイメージがわからない.
複素数の実用性はあるのか.
- ◆ 実数係数の方程式で解がコンビ (共役複素数) として出てくるのはなぜか.

<ベクトル>

- ◆ ベクトルを勉強する意義がわからない。
- ◆ ベクトルはどんなときに使えばいいのか。
- ◆ ベクトルの内積が何を表しているのかわからない。形式的には解けるが、解いた気がしない。
- ◆ なす角が 90° のとき、 a と b の内積が 0 になるのはなぜか不明。
- ◆ $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1a_2 + b_1b_2$ となる理由は？
- ◆ 三角形の垂心、傍心、外心、内心とベクトルのつながりがわからない。
- ◆ ベクトル方程式が何を意味しているかわからない。
ベクトル方程式はどのようにとらえればいいのかわからない。
- ◆ $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$, $0 < s + t < 1$ が何を意味しているのか不明。
- ◆ ベクトル方程式で表される円の中心を求めるときなど、解法がケースバイケースに見える。
- ◆ 空間内の平面上の点の位置ベクトルを1次独立な3つのベクトルの1次結合で表す問題が苦手。
- ◆ 空間ベクトルで球面などの扱いが苦手。
- ◆ 平面の方程式って何なのか。
ベクトルでなぜ平面が表せるのか。
平面の方程式がその法線ベクトルを係数として表せる理由がわからない。
- ◆ 正射影の使いどころがわからない。
- ◆ 外積の公式がよくわからない。

<数列・数学的帰納法・漸化式>

- ◆ 数列は解き方を覚えているだけでわかった感じにはなっていない。
- ◆ $\sum k^2, \sum k^3$ の公式の導出方法がわからない。
- ◆ \sum の式が苦手。
- ◆ 数列の応用問題になると解けなくなる。
- ◆ 数学的帰納法がよくわからない。
(なぜ k のときを仮定して $k+1$ のときを示せば証明になるのか)
($k, k+1$ のときを両方仮定しなければならないのはどういうときか)
- ◆ 2項定理の証明ができない。
- ◆ $\sum {}_n C_r =$ などの証明ができない。
- ◆ 漸化式がよくわからない。
- ◆ 特性方程式の解を利用して漸化式を変形できるのはなぜか。
- ◆ $a_n = b_n - 2$ などとして置き換えるのがよくわからない。
- ◆ 分数型 $a_{n+1} = \frac{ra_n + s}{pa_n + q}$ の漸化式の解き方の理屈がわからない。
- ◆ $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n)$ の漸化式で特殊解を見つけてそれを利用する方法がわからない。
- ◆ $a_{n+1} = \alpha a_n + f(n)$ の漸化式の解法がわからない。
- ◆ 確率と漸化式の融合問題がわからない。
- ◆ 群数列の考え方がわからない。
- ◆ 複利法への応用がわからない。
- ◆ 漸化式は解法、テクニックを覚えるだけなのか。
- ◆ 1次の連立漸化式で、 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列をなす、となぜ仮定できるのか。

数学 III・数学 C

<関数と極限>

- ◆ $y^2 = x^2 + 1$ は関数か.
- ◆ $\lim \frac{6x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3} = 3$ となる見当がつけられない.
- ◆ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ などとなる理由がわからない.
- ◆ はさみうちの原理を用いた証明方法がわからない.
- ◆ 関数の連続性云々がよく理解できない.
- ◆ 無限等比級数と等比数列の和との違いがはっきりしない.
- ◆ $\lim(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$ の意味がよくわからない.
- ◆ 漸化式で表された数列の極限がよくわからない.

<条件つき確率・確率分布>

- ◆ 条件つき確率とは何か.
- ◆ $P_A(B) = P(B)$ で独立であるとはなぜか. 独立とは何か. 二項分布の公式の使い方が曖昧.
- ◆ 確率分布の統計の公式の出てくる理由がわからない.

<微分>

- ◆ 積の導関数の公式の成立理由が不明.
- ◆ e の定義は? e は何の役に立つのか?
なぜ e^x は微分しても変化しないのか.
- ◆ ke^x の形以外で, 微分して変化しない関数はあるのか.
- ◆ 平均値の定理, ロピタルの定理の適用法がわからない.
- ◆ ロピタルの定理が成立する理由がわからない.
- ◆ 定理で $[a, b]$ で連続とか (a, b) で微分可能とあるが, 开区間, 閉区間の区別がわからない.
- ◆ 軸に平行でない漸近線の求め方が不明. (なぜ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ で求まる?)
- ◆ $x' = v, x'' = a$ となる理由がわからない. (速度・加速度)
- ◆ d^2x とか, dy^2 はどういう状態なのか.
- ◆ $\frac{dy}{dx}$ は分数ではないと習ったはずなのに, なぜ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$ や $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ などとなるのか.
 $dt = xdx$ の dx とか dt って何者?
- ◆ $F(x, y) = x^2 + y^2$ のとき, $F'(x, y)$ は $\frac{dy}{dx}$ と同じものか?
- ◆ $\frac{dy^2}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$ となる理由がわからない.
- ◆ $\frac{d^2x}{dy^2}$ のような記号が出てくると混乱する.
- ◆ 置換積分, 部分積分の理屈がよくわからない.
- ◆ 楕円の面積が円の面積を何倍かしたものであるというのがわからない.
- ◆ 球の表面積は $4\pi r^2$, 体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ となるのはなぜか.

<行列>

- ◆ 行列っていったい何なのか.
- ◆ 行列は何に応用できるのか.
- ◆ 逆行列の公式が成り立つ理由が不明.
- ◆ 逆行列を連立漸化式に応用するのがわからない.
- ◆ 行列の積はなぜ成分どうし変なかけ方をするのか.
- ◆ Hamilton Cayley の公式をうまく適用することができない.
- ◆ 固有値を求めて対角化する方法, なぜそれでうまくいくのか.
- ◆ 固有値, 固有ベクトルは何を表しているのか.

<媒介変数表示・極座標・1次変換>

- ◆ 媒介変数を消去するとなぜ軌跡の方程式が出てくるのか.
- ◆ 極座標の公式がわからない.
- ◆ 2次曲線がなぜ $r = \frac{ae}{1 + e \cos \theta}$ と表せるのか.
- ◆ 離心率がしっくりこない.
- ◆ 3種類の2次曲線が統一的に見えてこない.
- ◆ 2次曲線の媒介変数表示がなぜそのようになるか. $(x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, y = \frac{2t}{1-t^2})$ など. 除外点をどう考えるかわからない.
- ◆ 双曲線の焦点を通る直線と双曲線の交点, 一方が (r, θ) なら, 他方は $(r, \theta + \pi)$ となる理由が不明.
- ◆ 1次変換の使い道が見えない.

<統計>

- ◆ 相関は何の役に立つのか.

その他（分野不明のもの，中学分野）

- ◆ 円の面積が半径×半径×円周率で求まるのはなぜか。
- ◆ 背理法の使い方はわかるが，それで証明されているのには違和感がある。
- ◆ 場合分けが全般的に苦手。
- ◆ 十分性を満たすか確認する． どのような場合にやるのかわからない。
- ◆ mod がわからない。
- ◆ 方べき量というのがわからない。
- ◆ 0で割ってはいけない理由がわからない．なぜ分母に0があってはいけないのか。
- ◆ 解の公式はどうやって導くのか。
- ◆ 0の0乗は何なのか．1なのか？
- ◆ 負の数×負の数が正の数になるのはなぜか。
- ◆ 三平方の定理はどうやって証明するのか。
- ◆ メネラウス・チェバの定理，どうやって証明するのか。
- ◆ 垂心，傍心とは何か。
- ◆ 一筆書きできる図形，できない図形の区別は？
- ◆ 球の体積，表面積の公式が出てくる理由は？
- ◆ 円に内接する四角形の対角の和が 180° である理由は？