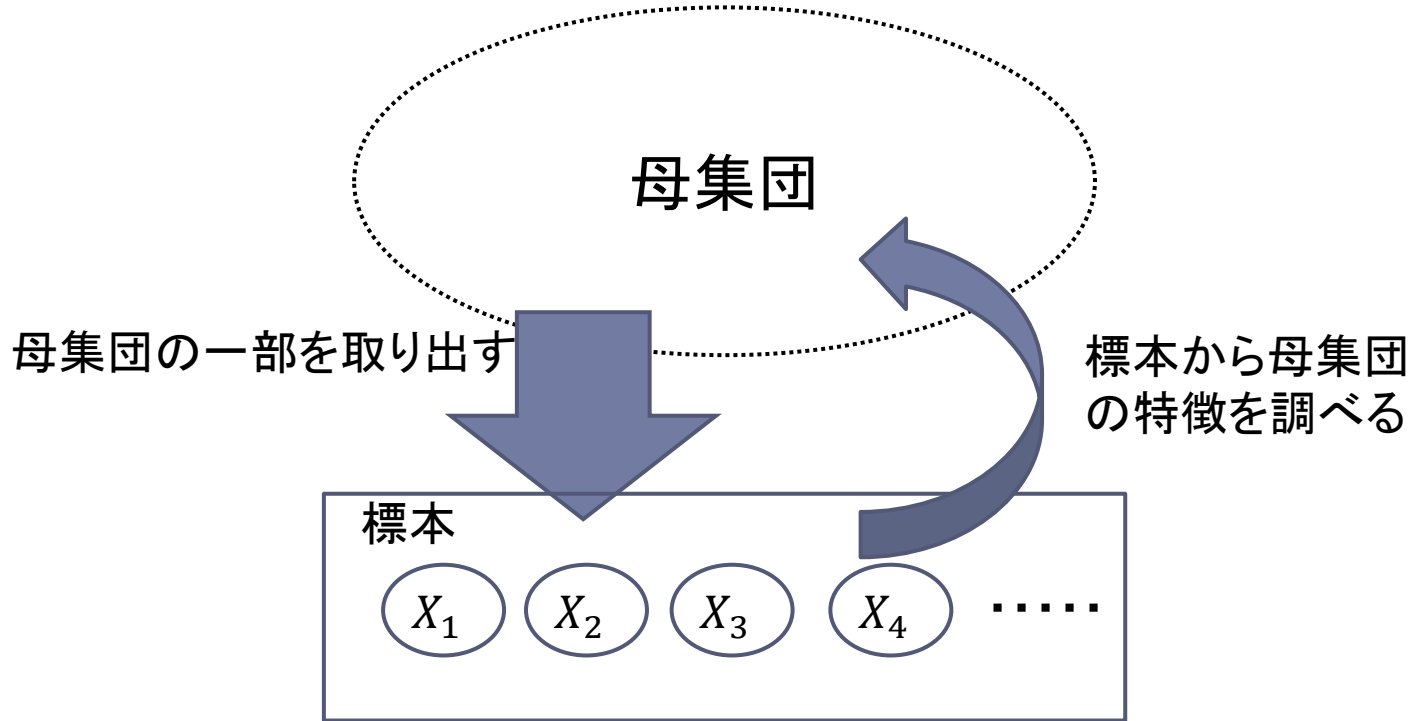


2015 数学科リレー講座

6日目 検定 担当：兼子

1.検定とは

no.1



母集団の特徴を調べる際, 数学的根拠を与えるのが検定である.

1.検定とは

no.2

あるビン詰め製品Aを製造している会社がある.この会社では製品Aの容量が20.0mlになるように設定している.ところが,最近どうも容量が設定値の20.0mlからずれているのではないかという声が聞かれるようになったので,データを10個とったところ,以下のデータが得られた.

容量 (ml)	20.3	20.5	19.8	20.2	20.4	20.8	20.7	20.7	19.7	19.9
------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

問1. 製品Aの容量は20.0mlと言ってよいか？



1.検定とは

no.3

先ほどの問いに君達が答えられない原因は何か？

→何を基準として,母集団の平均($\mu = 20.0$)とデータの平均($\bar{x} = 20.30$)の値の差があるといえるのかが明確でない.

→母集団が $N(\mu, 0.4^2)$ (平均 μ , 分散 0.4^2 の正規分布)に従うという仮定を与え,そこで, $\mu = 20.0$ としてよいかという問題として捉える.



1.検定とは

no.4

$\mu = 20.0$ という仮説を立てる.

→得られたデータに不自然な個所はないだろうか.

→母集団からランダムにデータを10個取り出したとき,その平均がどのくらいの確率で20.30になるか調べてみよう.



\bar{X} の分布

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立であり, $N(\mu, \sigma^2)$ に従っている時,

\bar{X} は $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

\bar{X} の分布の標準化

$u = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ は $N(0, 1^2)$ に従う.

1.検定とは

no.6

$|u|$ が1.960以上もしくは以下になる確率は

$$\begin{aligned}P(|u| \geq 1.960) &= P(u \leq -1.960) + P(u \geq 1.960) \\ &= 2P(u \geq 1.960) \\ &= 0.05\end{aligned}$$

$\mu = 20.0, \bar{x} = 20.30$ としたとき, u の値は

$$u = \frac{20.30 - 20.0}{\sqrt{\frac{0.4^2}{10}}} \approx 2.37$$

→つまり, 仮説が正しければ, データの平均値が20.30以上になる確率は5%以下ということになる. これは仮説が成り立っていないと考えるほうが妥当ではないかという結論を下す根拠となる.

1.検定とは

no.7

<まとめ>

この問題における統計の検定とは,

(1)ある仮説を用意($\mu = 20.0$)

(2)(1)の分布のもとで,得られたデータの平均値が20.30になる確率を求める。

(3)小さな確率であれば(1)の仮定は正しいと言えないという結論を出せた。



2. 検定用語

no.1

“ $\mu = 20.0$ が成り立っている”という事柄 → **帰無仮説**
“ μ は20.0ではない”という事柄 → **対立仮説**
と呼び, 以下のように書く.

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 20.0$)
対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$

このように仮説を立ててどちらの仮説が妥当か判定する手法なので, **仮説検定**とも呼ばれる. そして, H_0 が正しいとした下で計算される u を新たに u_0 と書いて**検定統計量**と呼ぶ.

2. 検定用語

no.2

検定統計量と比較した1.960という値を**臨界値**と呼ぶ。

そして、臨界値を定める0.05という確率の値を**有意水準**と呼び、 α で表す。

さきほどの例において、有意水準を0.05としたとき、 $|u_0| \geq 1.960$ のときに H_0 を排除して H_1 と判定した。このことを H_0 を**棄却する**もしくは有意水準5%で有意であるという言い方をする。逆に $|u_0| < 1.960$ なら H_0 を**採択する**といい、有意でないという。そこで、 $|u_0| \geq 1.960$ を**棄却域**と呼び R で表し、 $|u_0| < 1.960$ のほうは**採択域**と呼ぶ。

2.検定用語

no.3

<対立仮説の置き方>

両側に棄却域をとる検定を

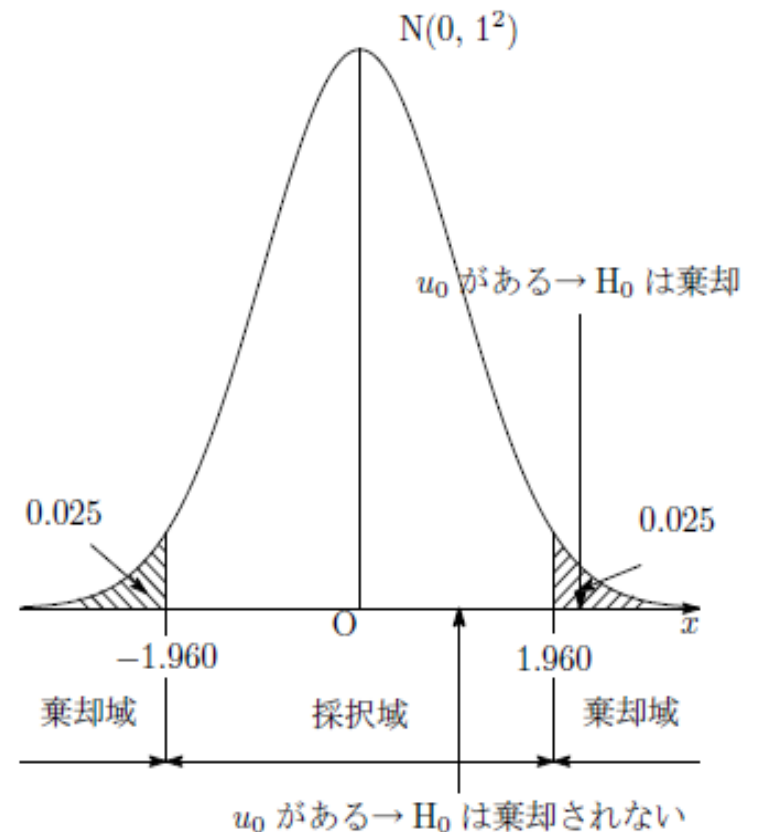
両側検定と呼ぶ。 $\mu < \mu_0$ や

$\mu > \mu_0$ だけの対立仮説の

場合は**片側検定**と呼ばれ、

それぞれ検定の目的に応じて

選ばれる。



3. 検定の手順

no.1

母平均 μ に関する検定手順(σ^2 既知)

- ▶ <手順1>帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 は指定された値)
対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ または $\mu < \mu_0$)
- ▶ <手順2>有意水準 α を定める.(通常0.05または0.01)
- ▶ <手順3>上記に応じて, 棄却域 R を定める.

対立仮説	棄却域 R	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$ u_0 \geq 1.960$	$ u_0 \geq 2.576$
$H_1: \mu < \mu_0$	$u_0 \leq -1.645$	$u_0 \leq -2.326$
$H_1: \mu > \mu_0$	$u_0 \geq 1.645$	$u_0 \geq 2.326$



3.検定の手順

no.2

母平均 μ に関する検定手順(σ^2 既知)続き

- ▶ <手順4> データ X_1, X_2, \dots, X_n をとり, 検定統計量 u_0 の計算をする.

$$u_0 = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad (\sigma^2 \text{は既知の分散の値})$$

- ▶ <手順5> u_0 の値が手順3で定めた棄却域にあれば有意と判定し, H_0 を棄却する.

4.検定における注意

no.1

問2.もし H_0 が棄却されなかった場合, H_0 が正しいと言えるか？

答: 言えない。

あくまで, H_0 を棄却するだけの数学的根拠が得られなかっただけで, H_0 が正しい根拠にはならない。従って H_0 が棄却されなかった場合,

仮説が誤りであるとは言えない

という消極的な答え方になる。

4.検定における注意

no.2

問3.誤って H_0 を棄却する,もしくは H_0 を採択することはないか.

答:ある.

観測データに基づく判断 神のみぞ知る真実	H_0 を棄却する	H_0 を棄却しない
H_0 が真	第1種の誤り	正しい判断
H_1 が真(H_0 が偽)	正しい判断	第2種の誤り



4 実際に検定を行おう

no.1

問4. あるスポーツでは先攻後攻をコインのトスで決めている. このコインが正しく作られているか否かをテストするために, 50回投げたところ, 表が35回出た. このコインは歪んでないと言えるか? 有意水準5%で検定せよ.

→コインの表が出る回数は二項分布 $B(n, p)$ であるが, ド・モアブル—ラプラスの定理により, 正規分布 $N(np, np(1 - p))$ に近似できる.

→検定統計量

$$u_0 = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$$

を用いる.



4 実際に検定を行おう

no.2

- ▶ <手順1>帰無仮説 H_0 : コインは歪みが無い.
対立仮説 H_1 : コインには歪みがある.

- ▶ <手順2>有意水準5%

- ▶ <手順3> 棄却域 $|u_0| \geq 1.960$

- ▶ <手順4> 検定統計量 u_0

$$u_0 = \frac{35 - 50 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{12.5}} \approx 2.829$$

- ▶ <手順5> 棄却域に入るので, H_0 は棄却された. すなわち
コインには歪みがある.



4 実際に検定を行おう

no.3

サイコロが公正かどうか調べるために240回投げた結果

サイコロの目	1	2	3	4	5	6	合計
出た回数	22	45	30	18	52	73	240

問5.サイコロは歪んでいると言えるだろうか.

有意水準1%で検定せよ.



4 実際に検定を行おう

no.4

1の目がでる確率が $\frac{1}{6}$ かどうか→さっきと同じ検定でOK

しかし今回は6つのデータを総合的に考えて判断しなくてはならない.

→理論値との差を考える.

検定統計量として

$$u_0 = \sum \frac{(\text{観測度数} - \text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$$

を考える.



4 実際に検定を行おう

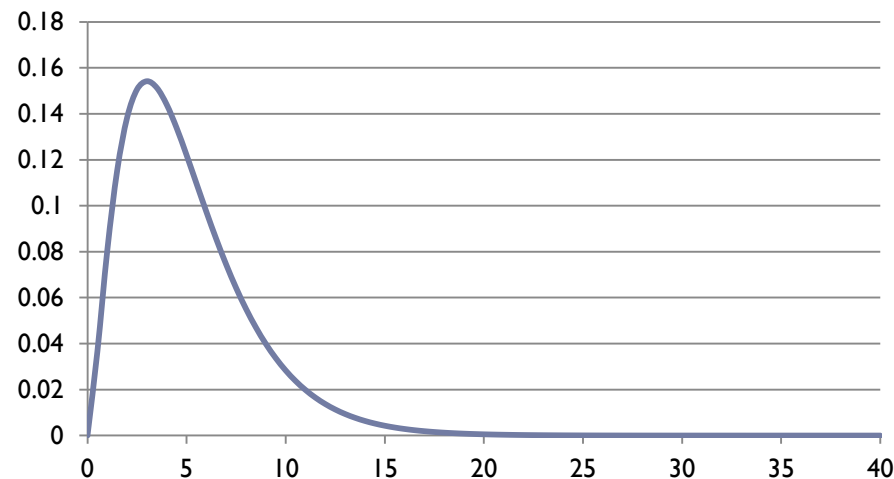
no.5

検定統計量

$$u_0 = \sum \frac{(\text{観測度数} - \text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$$



自由度 $n - 1$ の χ^2 分布に従う



4 実際に検定を行おう

no.6

サイコロの目	1	2	3	4	5	6	合計
①実測度数	22	45	30	18	52	73	240
②理論度数	40	40	40	40	40	40	240
①－②	－18	5	－10	－22	12	33	0
$(①－②)^2$	324	25	100	484	144	1089	2166
$\frac{(①－②)^2}{②}$	8. 1	0. 625	2. 5	12. 1	3. 6	27. 225	54. 15



4 実際に検定を行おう

no.7

- ▶ <手順1>帰無仮説 H_0 :サイコロは歪みが無い
対立仮説 H_1 :サイコロには歪みがある.
- ▶ <手順2>有意水準1%
- ▶ <手順3> 棄却域 $u_0 \geq 15.09$
- ▶ <手順4> 検定統計量 u_0

$$u_0 = 54.15 \geq 15.09$$

- ▶ <手順5>棄却域に入るので, H_0 は棄却された. すなわちサイコロは歪みがある.