海城生に答えます　～答えの一案～ K. K.

◆ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}=3$ となる見当がつけられない。

回答

この等式は,「分数式 $\dfrac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}$ において, x の値を限りなく大きくすると, この分数式の値は 3 に近づく」ということを意味しています。ここで,「x の値を限りなく大きくする」とありますが, これは x のところには 10 や 20 程度の数ではなく, もっと大きな, 桁外れな数を代入することをイメージします。試しに, x にいくつか値を代入してみます。

$x=10$ のとき,

$$\frac{6\cdot10^2+4\cdot10-1}{2\cdot10^2-3}=\frac{600+39}{200-3}=\frac{639}{197}=3.24365\cdots$$

$x=20$ のとき,

$$\frac{6\cdot20^2+4\cdot20-1}{2\cdot20^2-3}=\frac{2400+79}{800-3}=\frac{2479}{797}=3.1104\cdots$$

$x=100$ のとき,

$$\frac{6\cdot100^2+4\cdot100-1}{2\cdot100^2-3}=\frac{60000+399}{20000-3}=\frac{60399}{19997}=3.0204\cdots$$

$x=1000$ のとき,

$$\frac{6\cdot1000^2+4\cdot1000-1}{2\cdot1000^2-3}=\frac{6000000+3999}{2000000-3}=\frac{6003999}{1999997}=3.0020\cdots$$

確かに 3 に近づきそうですね。ここで, 分母と分子それぞれにおいて, 2 次の項の値と, 1 次の項や定数項の値を比べてみて下さい。後者が圧倒的に小さいことが分かりますね (各場合, 左から 2 番目の式を見てみて下さい)。 2 次の項の値の大きくなるスピードが, 1 次の項に比べて圧倒的に速いのです。ということは,

$$x\text{ の値が十分大きいとき, }\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}\text{ は, ほぼ }\frac{6x^2}{2x^2}\text{ すなわち 3 である}$$

と言っても良いのではないでしょうか。このような問題の場合, 次数の最も大きい項にまず注目すると, おおよその見当がつくわけです。教科書などでよく書かれている解法:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}}=\frac{6+0-0}{2-0}=3$$

という, 分母の最高次である x^2 の項で分母・分子を割る方法は, その見当が正しいことをきちんと記述したものになっています。