

KSプロジェクト（2017～2020）

# 新城門プロジェクト 国公立医学部入試数学講座

Vol①



新モンゴル小中高一貫学校&海城中学高等学校 共同講座

## はじめに

いよいよ「新城門プロジェクト」が開始されます。

日モ教育界に新たな一石を投じる試みであることを担当者一同自負しております。そして、なによりも本講座から多くの国公立医学部合格者が出現し、その合格者が将来、日モの医療をつなぐ架け橋とならんことを祈念し、本講座は開講されます。

さて、テキストは毎回、原則として

§ 1. 基本問題, § 2. 練習問題, § 3. 添削問題

の3つの章で構成されます。

§ 1については、詳細な解答を掲載しますので、各自のペースで学習してください。

§ 2については、講座当日に詳しい解説をします。§ 1よりも難しい問題が少なくありません。必ず予習をして講座に臨んでください。

§ 3は添削問題です。これは

「次回の講座のテーマに関する問題」

で、講座終了後10日以内に、君の作成した答案を、次回講座を担当する海城の先生宛へメールに添付して送ってください。次回の講座までに添削をして返却し、提出された答案の何点かを講座の中で紹介します。

なお、講座は4回終了する毎に

「新城門数学模試」

を80分で実施します。

この試験は前の4回の講座のそれぞれ§ 1～§ 3で扱われた問題やそれらの類題で構成されます。平均点や標準偏差、順位を算出し、日モ受験者の成績上位者を発表します。

それに伴い、テキストは4回分の講座で一冊発行します。

当座の予定は次の通りです：

回・実施時期	①11月	②12月	③1月	④2月	⑤3月
テーマ	数と式	方程式 の理論	整数問題 (その1)	順列組合せ	新城門 数学模試①
担当者	川崎真澄	村山雅之	平山裕之	中村哲也	
イベント	開講セレモニ ー	医療ディスカ ッション①	医療ディスカ ッション②	医学部受験 作戦講話①	模試解説

ともあれ、実り豊かな楽しい講座にしようではありませんか。大いに頑張りましょう。

最後に本テキストは新興出版社啓林館刊「システム数学ⅠⅡAB 入試必修 練磨」を活用させていただきました。利用を快諾いただきました同社ならびに、両校の学術友好に一方ならぬお世話を賜りました同社濱崎展行様に心からの感謝を申し上げます。

## 新城門プロジェクト(第1回)

### テーマ:数と式

#### § 1. 基本問題(自習用)

【1】

- (1)  $2x^3+5x^2+7x+9$ を $2x+3$ で割った余りと商を求めよ.
- (2)  $x^3-x^2+ax+4$ を $x+1$ で割った余りが $-3$ のとき,  $a$ の値を求めよ.
- (3)  $x^3-x^2+ax+4$ が $x-2$ で割り切れるとき,  $a$ の値を求めよ.

【2】

$x$ の式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ を展開して $x$ について整理したときの定数項を求めよ.

【3】

$x^2+x+1=0$ の解 $\omega$ に対して,  $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}$ の値を求めよ.

【4】

- (1)  $a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=7x-1$ が $x$ についての恒等式として成立するとき, 定数 $a, b, c$ の値を求めよ.
- (2)  $\frac{1}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{p}{x+2}+\frac{q}{x+1}+\frac{r}{(x+1)^2}$ が $x$ についての恒等式として成立するとき, 定数 $p, q, r$ の値を求めよ.

【5】

多項式 $P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ると $4x-3$ 余り,  $(x-2)(x+2)$ で割ると $3x+5$ 余る. このとき,  $P(x)$ を $(x+1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ.

(慶應義塾大)

【6】

$a \neq 0$ のとき $x$ の式 $(1+x+ax^2)^6$ を展開したときの $x^4$ の係数は,  $a = \square$ のときに最小値 $\square$ をとる.

(上智大)

【7】

$\omega$ を1の虚数立方根とすると、 $\omega^{2n} + \omega^n + 1$ の値を求めよ。ただし、 $n$ は正の整数とする。

【8】

$x = 1 - \sqrt{3}i$ のとき、 $5x^4 + 3x^3 + 22x^2 + 40$ の値は  である。ただし、 $i$ は虚数単位とする。

【9】

整式 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りが $2x-5$ であり、 $x-1$ で割った余りが5であるとき、 $P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りを求めよ。

【10】

$x$ の4次式 $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + 1$ は $x$ の2次式の平方とはならないことを証明せよ。ただし $a$ は一定の実数とする。

(お茶の水女子大)

【11】

整式 $f(x)$ が $x$ についての恒等式

$$xf(x^2-1) - 5f(x) = (x^3+1)f(x-1) - 2(x-1)f(x+1) - 4x - 29$$

を満たすとする。

- (1)  $f(x)$ の次数を求めよ。
- (2)  $f(x)$ を求めよ。

(宮崎大・改)

【12】

文中の空欄にあてはまるものを下の選択肢①～④のうちから1つ選び、番号で答えよ。  
文中の $x$ は実数である。

$$p: x \leq 2, \quad q: x \leq 0, \quad r: -3 \leq x \leq 1$$

のとき、 $q$ は $p$ であるための 。また、 $p$ は $r$ であるための 。

[選択肢]

- ① 必要十分条件である
- ② 十分条件であるが必要条件ではない
- ③ 必要条件であるが十分条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

【13】

$a > 2$ ,  $b > -1$ のとき,  $ab - 2 > 2b - a$ が成り立つことを示せ.

【14】

$a, b$ が実数のとき,  $a^2 + 5b^2 \geq 4ab + 2b - 1$ が成り立つことを示せ.

【15】

次の(1)~(6)の文中の空欄にあてはまるものを下の選択肢①~④のうちから1つ選び, 番号で答えよ. 文中の $x, y$ はともに実数である.

- (1) 「 $x > 0$ 」は「 $x \geq 0$ 」のための .
- (2) 「 $x = 0$ 」は「 $x^2 + y^2 = 0$ 」のための .
- (3) 「 $xy = 0$ 」は「 $x = 0$ かつ $y = 0$ 」のための .
- (4) 「 $x^2 + y^2 = 1$ 」は「 $x + y = 0$ 」のための .
- (5) 「すべての $x$ について $xy = 0$ である」は「 $y = 0$ 」のための .
- (6) 「 $(xy)^2$ が無理数である」は「 $x$ または $y$ が無理数である」のための .

[選択肢]

- ① 必要十分条件である.  
② 十分条件であるが必要条件ではない.  
③ 必要条件であるが十分条件ではない.  
④ 必要条件でも十分条件でもない.

(慶應義塾大)

【16】

次の命題の真偽を述べ, その理由を説明せよ. ただし,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてよい.

- (1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である.  
(2)  $x$ が実数であるとき,  $x^2 + x$ が有理数ならば,  $x$ は有理数である.  
(3)  $x, y$ がともに無理数ならば,  $x + y, x^2 + y^2$ のうち少なくとも一方は無理数である.

(北海道大)

## § 2. 練習問題

【1】

次の不等式を解け.

(1)  $x^2 \geq x^2$

(2)  $(x+2)(x+1)^2 x^3 (x-1)^4 (x-2)^5 \leq 0$

(3)  $\frac{3}{1+\frac{2}{x}} \geq x^2$

(4)  $\frac{(x+1)x^2(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$

【2】

$a, b, c$  を  $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$  を満たす実数とするとき, 次の不等式を証明せよ.

(1)  $ab+1 > a+b$

(2)  $abc+1 > a+bc$

(3)  $abc+2 > a+b+c$

【3】

$a > 0, b > 0$  とする. このとき,  $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + b\right)$  の最小値を求めよ. またそのときの  $a, b$

の値も求めよ.

【4】

実数係数の3つの2次方程式

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0, \quad cx^2 + 2ax + b = 0$$

のうち, 少なくとも1つは実数解をもつことを証明せよ.

(広島大)

### § 3. 添削用問題

【1】

整式  $P(x)$  を  $(x+1)^2$  で割ったときの余りは 9 であり,  $(x-1)^2$  で割ったときの余りは 1 で

ある.  $P(x)$  を  $(x+1)^2(x-1)^2$  で割ったときの余りを求めよ.

(山形大・医)

【2】

$a, b, c, k$  を正の定数とする.  $x, y, z$  を  $ax+by+cz=k$  を満たす任意の正の数とする.

(1) 不等式  $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}$  が成り立つことを証明せよ.

(2) 上の不等式において等号が成り立つ場合の  $x, y, z$  を  $a, b, c, k$  の式で表せ.

(島根大・医)

<基本問題の解答と解説>

【1】

- (1)  $2x^3+5x^2+7x+9$ を $2x+3$ で実際に割り算すると  
よって

$$\begin{cases} \text{商は} & x^2+x+2 \\ \text{余りは} & \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^2+x+2 \\ 2x+3 \overline{) 2x^3+5x^2+7x+9} \\ \underline{2x^3+3x^2} \phantom{+9} \\ 2x^2+7x \phantom{+9} \\ \underline{2x^2+3x} \phantom{+9} \\ 4x+9 \\ \underline{4x+6} \\ 3 \end{array}$$

- (2)  $x^3-x^2+ax+4=P(x)$ とおくと $P(x)$ を $x+1$ で割った余りは、剰余の定理から

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - (-1)^2 + a \cdot (-1) + 4 \\ &= -a + 2 \end{aligned}$$

である。よって余りが $-3$ のとき、

$$-a + 2 = -3 \text{ より, } a = 5$$

- (3) (2)の $P(x)$ を $x-2$ で割った余りは、剰余の定理から

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + a \cdot 2 + 4 = 2a + 8$$

である。よって割り切れるとき

$$2a + 8 = 0 \text{ より, } a = -4$$

【2】

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ を展開したときの $x^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{8-k} = x^{2k-8}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 8$ )の係数は ${}_8C_k$ である。定

数項は $2k-8=0$ より $k=4$ の場合だから、

$$\text{定数項は } {}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

【3】

$x = \omega$ は $x^2+x+1=0$ を満たすから $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ であり、 $\omega \neq 0$ であるから両辺を $\omega$ で割る

$$\text{と } \omega + 1 + \frac{1}{\omega} = 0 \text{ つまり } \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} &= \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega} \\ &= (-1)^2 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$



**【4】**

(1) (与式の左辺) =  $(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a$

であるから、与式の右辺と係数を比較して、

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=7 \\ -a=-1 \end{cases}$$

これを解いて、

$$(a, b, c) = (1, 3, -4)$$

(2) 与式の分母を払うと、

$$1 = p(x+1)^2 + q(x+2)(x+1) + r(x+2) \quad \dots\dots(*)$$

これが $x$ の恒等式となるような定数 $p, q, r$ の値を求めればよい。

$$((*)\text{の右辺}) = (p+q)x^2 + (2p+3q+r)x + (p+2q+2r)$$

であるから、(\*)の左辺と係数を比較して、

$$\begin{cases} p+q=0 \\ 2p+3q+r=0 \\ p+2q+2r=1 \end{cases}$$

これを解いて、

$$(p, q, r) = (1, -1, 1)$$

**【5】**

$P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ると $4x-3$ 余るので、商を $Q_1(x)$ とおくと、

$$P(x) = (x-1)(x+1)Q_1(x) + 4x-3 \quad \dots\dots①$$

と書ける。また、 $P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ると $3x+5$ 余るので商を $Q_2(x)$ とおくと、

$$P(x) = (x-2)(x+2)Q_2(x) + 3x+5 \quad \dots\dots②$$

と書ける。 $P(x)$ を $(x+1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ 、余りは1次以下だから $ax+b$ とおくと、

$$P(x) = (x+1)(x+2)Q_3(x) + ax+b$$

と表せて、この式で $x=-1, -2$ を代入すると、
$$\begin{cases} -a+b=P(-1) \\ -2a+b=P(-2) \end{cases} \quad \dots\dots③$$

一方、①で $x=-1$ を代入すると、 $P(-1)=-7$

②で $x=-2$ を代入すると、 $P(-2)=-1$

だから、これらを③に用いると、

$$\begin{cases} -a+b=-7 \\ -2a+b=-1 \end{cases}$$

これを解くと、 $(a, b) = (-6, -13)$ だから、求める余りは、 $-6x-13$

【6】

$x$ の式 $(1+x+ax^2)^6$ を展開したときの $1^p x^q (ax^2)^r = a^r x^{q+2r}$

(ただし $p+q+r=6$ ,  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $r \geq 0$ )の係数が,  $\frac{6!}{p!q!r!}$ であるから,  $x^4$ の係数について

は $q+2r=4$ として,  $p+q+r=6$ ,  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $r \geq 0$ を満たす $p, q, r$ の組を求めると,

$$(p, q, r) = (2, 4, 0), (3, 2, 1), (4, 0, 2)$$

これより $x^4$ の係数は

$$\begin{aligned} \frac{6!}{2!4!0!} \cdot a^0 + \frac{6!}{3!2!1!} \cdot a^1 + \frac{6!}{4!0!2!} \cdot a^2 &= 15 + 60a + 15a^2 \\ &= 15(a+2)^2 - 45 \end{aligned}$$

よって,  $x^4$ の係数は,  $a = -2$ のときに最小値 $-45$ をとる.

【7】

$$x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1, \quad x^2+x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

だから,  $\omega$ は $x^2+x+1=0$ の解であり,

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

を満たす. これより,  $f(n) = \omega^{2n} + \omega^n + 1$ とおくと,

(i)  $n$ が3の倍数のとき,  $n=3k$ ( $k$ は自然数)と表せて,

$$\begin{aligned} f(n) &= \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 \\ &= (\omega^3)^{2k} + (\omega^3)^k + 1 \\ &= 1^{2k} + 1^k + 1 = 3 \end{aligned}$$

(ii)  $n$ が3で割ると1余るとき,  $n=3k+1$

( $k$ は0以上の整数)と表せて,

$$\begin{aligned} f(n) &= \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 \\ &= (\omega^3)^{2k} \omega^2 + (\omega^3)^k \omega + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

(iii)  $n$ が3で割ると2余るとき,  $n=3k+2$

( $k$ は0以上の整数)と表せて,

$$\begin{aligned} f(n) &= \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1 \\ &= (\omega^3)^{2k+1} \omega + (\omega^3)^k \omega^2 + 1 \\ &= \omega + \omega^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

以上(i), (ii), (iii)より,  $\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \begin{cases} 3 & (n \text{が} 3 \text{の倍数のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$

【8】

$x=1-\sqrt{3}i$  のとき,  $\sqrt{3}i=1-x$  だから両辺2乗して整理すると,

$$3^2=(1-x)^2 \Leftrightarrow -3=1-2x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+4=0$$

ここで, 整式  $5x^4+3x^3+22x^2+40$  を  $x^2-2x+4$  で実際に割り算すると, 商が  $5x^2+13x+28$  で余りが  $4(x-18)$  であるから,

$$\begin{aligned} & 5x^4+3x^3+22x^2+40 \\ & = (x^2-2x+4)(5x^2+13x+28)+4(x-18) \end{aligned}$$

と表せて,  $x=1-\sqrt{3}i$  のとき  $x^2-2x+4=0$  に注意すると,  $5x^4+3x^3+22x^2+40$  の値は,

$$\begin{aligned} 5x^4+3x^3+22x^2+40 & = 4\{(1-\sqrt{3}i)-18\} \\ & = -68-4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

別解

$x^2-2x+4=0$  より  $x^2=2x-4$  だから,

$$x^3=(2x-4)x=2(2x-4)-4x=-8$$

$$x^4=-8x$$

これより,  $5x^4+3x^3+22x^2+40$

$$=5(-8x)+3(-8)+22(2x-4)+40$$

$$=4x-72$$

$$=4(1-\sqrt{3}i)-72$$

$$=-68-4\sqrt{3}i$$

【9】

$P(x)$  を  $(x-3)^2$  で割った余りが  $2x-5$  であるから, 商を  $Q(x)$  とおくと,

$$P(x)=(x-3)^2Q(x)+2x-5 \quad \cdots \cdots (*)$$

と表せる. ここで,  $Q(x)$  を  $x-1$  で割った商を  $q(x)$ , 余りは定数だから  $a$  とおくと,

$$Q(x)=(x-1)q(x)+a$$

となるから, (\*) に用いると,

$$P(x)=(x-3)^2Q(x)+2x-5$$

$$=(x-3)^2\{(x-1)q(x)+a\}+2x-5$$

$$=(x-3)^2(x-1)q(x)+a(x-3)^2+2x-5$$

より,  $P(x)=(x-3)^2(x-1)q(x)+a(x-3)^2+2x-5 \quad \cdots \cdots (**)$

となる. これに  $x=1$  を代入すると,  $P(1)=4a-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$P(x)$  を  $x-1$  で割った余りが  $5$  であるので剰余の定理から,  $P(1)=5$

これを①に用いて、 $5=4a-3$  つまり、 $a=2$

よって(\*\*)に用いて、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)^2(x-1)q(x) + 2(x-3)^2 + 2x - 5 \\ &= (x-3)^2(x-1)q(x) + 2x^2 - 10x + 13 \end{aligned}$$

以上より、 $P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りは、 $2x^2-10x+13$

### 【10】

$x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+1$ が $x$ の2次式の平方となるとすると、 $p, q$ を定数として、

$$x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+1=(x^2+px+q)^2 \quad \dots\dots(*)$$

と表せる。

$$((*)\text{の右辺})=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

となるから、(\*)の左辺と係数比較すると、

$$\begin{cases} a=2p & \dots\dots\text{①} \\ a^2=p^2+2q & \dots\dots\text{②} \\ a^3=2pq & \dots\dots\text{③} \\ 1=q^2 & \dots\dots\text{④} \end{cases}$$

①より  $p=\frac{a}{2}$  だから②に用いると、 $a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+2q$  つまり  $q=\frac{3}{8}a^2$

$p=\frac{a}{2}$ 、 $q=\frac{3}{8}a^2$  を③に用いると、 $a^3=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{8}a^2$  つまり  $a=0$

これを  $q=\frac{3}{8}a^2$  に用いると  $q=0$  となるが、これは④に反する。

以上より、 $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+1$ が $x$ の2次式の平方とはならない。

### 【11】

(1) (i)  $f(x)$ が定数のとき、 $f(x)=C$ とおくと与式は、

$$xC-5C=(x^3+1)C-2(x-1)C-4x-29$$

すなわち、 $Cx^3-(3C+4)x-29+8C=0$

となり、これが $x$ についての恒等式となる条件は、 $C=3C+4=-29+8C=0$

であるが、これを満たす $C$ は存在しないので不適。

(ii)  $f(x)$ が定数でないとき、 $f(x)$ の次数を $n$ (自然数)とおくと、与式の左辺は $2n+1$ 次式、右辺は $n+3$ 次式となり、両辺の次数が等しいことより、 $2n+1=n+3$ つまり $n=2$

以上(i)と(ii)より、 $f(x)$ の次数は2

(2) 与式で $x=0, \pm 1$ を代入して $f(0), f(1), f(-1)$ について解くと、

$$\begin{cases} -5f(0) = f(-1) + 2f(1) - 29 \\ f(0) - 5f(1) = 2f(0) - 33 \\ -f(0) - 5f(-1) = 4f(0) - 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5f(0) + 2f(1) + f(-1) = 29 \\ f(0) + 5f(1) = 33 \\ f(0) + f(-1) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (f(0), f(1), f(-1)) = (3, 6, 2)$$

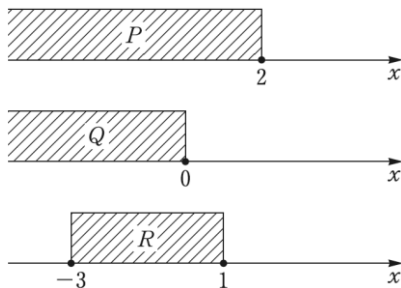
$f(x)$ の次数は2だから、 $a, b, c$ を定数として $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと、

$$(f(0), f(1), f(-1)) = (3, 6, 2) \text{より} \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 6 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \text{となり} (a, b, c) = (1, 2, 3) \text{を得る.}$$

よって、 $f(x) = x^2 + 2x + 3$

【12】

$p, q, r$ の真理集合をそれぞれ $P, Q, R$ とし、 $P, Q, R$ を数直線上に図示すると、次のようになる。



$Q \subset P$ であるから $q$ は $p$ であるための②

$P \supset R$ であるから $p$ は $r$ であるための③

【13】.

$ab - 2 > 2b - a$  ……(\*)に対して

$$\begin{aligned} & ((*) \text{の左辺}) - ((*) \text{の右辺}) \\ &= ab - 2 - 2b + a \\ &= b(a - 2) + (a - 2) \\ &= (a - 2)(b + 1) \end{aligned}$$

であるから $a > 2, b > -1$ のときこの値は正となり(\*)は成り立つ。

【14】.

$a^2 + 5b^2 \geq 4ab + 2b - 1$  ……(\*)に対して

$$\begin{aligned} & ((*)\text{の左辺}) - ((*)\text{の右辺}) \\ &= a^2 + 5b^2 - 4ab - 2b + 1 \\ &= a^2 - 4ba + 5b^2 - 2b + 1 \\ &= (a - 2b)^2 - (2b)^2 + 5b^2 - 2b + 1 \\ &= (a - 2b)^2 + b^2 - 2b + 1 \\ &= (a - 2b)^2 + (b - 1)^2 \end{aligned}$$

であるから、 $a, b$ が実数のときこの値は0以上となり(\*)は成り立つ。

【15】

(1) 「 $x > 0$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x \geq 0$ 」は真だが、「 $x > 0$ 」 $\Leftarrow$ 「 $x \geq 0$ 」は偽(反例は $x = 0$ )であるから、「 $x > 0$ 」は「 $x \geq 0$ 」のための②

(2) 「 $x = 0$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x^2 + y^2 = 0$ 」は偽だが(反例は $(x, y) = (0, 1)$ ), 「 $x = 0$ 」 $\Leftarrow$ 「 $x^2 + y^2 = 0$ 」は真( $\because x, y$ が実数より $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ )であるから、「 $x = 0$ 」は「 $x^2 + y^2 = 0$ 」のための③

(3) 「 $xy = 0$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x = 0$ かつ $y = 0$ 」は偽だが(反例は $(x, y) = (0, 1)$ ), 「 $xy = 0$ 」 $\Leftarrow$ 「 $x = 0$ かつ $y = 0$ 」は真であるから、「 $xy = 0$ 」は「 $x = 0$ かつ $y = 0$ 」のための③

(4) 「 $x^2 + y^2 = 1$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x + y = 0$ 」は偽(反例は $(x, y) = (0, 1)$ ), 「 $x^2 + y^2 = 1$ 」 $\Leftarrow$ 「 $x + y = 0$ 」も偽(反例は $(x, y) = (-1, 1)$ )であるから、「 $x^2 + y^2 = 1$ 」は「 $x + y = 0$ 」のための④

(5) 「すべての $x$ について $xy = 0$ である」とき、 $x = 1$ で成立することが必要であるから、 $y = 0$ が必要である。また「 $y = 0$ 」 $\Rightarrow$ 「すべての $x$ について $xy = 0$ である」は真であるから、「すべての $x$ について $xy = 0$ である」は「 $y = 0$ 」のための①

(6) 「 $(xy)^2$ が無理数である」 $\Rightarrow$ 「 $x$ または $y$ が無理数である」は真である。なぜなら、対偶の「 $(xy)^2$ が有理数である」 $\Leftarrow$ 「 $x$ と $y$ がともに有理数である」が真であるから。「 $(xy)^2$ が無理数である」 $\Leftarrow$ 「 $x$ または $y$ が無理数である」は偽(反例は $x = y = \sqrt{2}$ )であるから、

「 $(xy)^2$ が無理数である」は「 $x$ または $y$ が無理数である」のための②

【16】

(1) 真である。

もし、偽だと仮定すると $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数であるから、正の有理数 $p$ を用いて、

$$p = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

とおくことができる。これより

$\sqrt{2} = p - \sqrt{3}$ だから両辺2乗すると、

$$2 = p^2 - 2\sqrt{3}p + 3$$

すなわち

$$\sqrt{3} = \frac{p^2 + 1}{2p}$$

$p$ が有理数より右辺は有理数, 一方, 左辺の $\sqrt{3}$ は無理数だから矛盾である.

よって $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である.

(2) 偽である.

反例は,  $x^2 + x = 1$  (有理数)であっても $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ は無理数である.

(3) 偽である.

反例は,  $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ とすると,  $x, y$ はともに無理数だが,  $x + y, x^2 + y^2$ はそれぞれ

0, 4となりいずれも有理数である.

## 新城門プロジェクト(第2回)

### テーマ:方程式の理論

#### § 1. 基本問題(自習用)

【1】

$y=|x-2|$ のグラフを描き, 方程式 $|x-2|=1$ と, 不等式 $|x-2|>2$ を解け.

【2】

$y=x^2+3x-1$ の(1) $-2\leq x<-1$ (2) $x\geq 0$ (3) $-4\leq x\leq 0$ の各範囲における最大値, 最小値を求めよ.

【3】

すべての実数 $x$ に対して $x^2+ax+a>0$ となるような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

【4】

(1) 関数 $f(x)=|x-1|+|x-2|$ の最小値を求めよ.

(2) 関数 $g(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ の最小値を求めよ.

【5】

関数 $y=(x^2-2x)^2+6(x^2-2x)+1$ の最小値を求めよ.

【6】

定義域を $1\leq x\leq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+2a+b$ の最大値が9, 最小値が1のとき,  $a, b$ の値を求めよ.

【7】

一辺の長さ1の正方形ABCDの辺AB, BC, CD, DA上にそれぞれ点E, F, G, Hを $AE=BF=DG=AH$ となるようにとる.  $AE=a(0<a<1)$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 四角形EFGHの周の長さを $L$ とするとき $L$ を $a$ を用いて表せ.

(2)  $L$ の最小値を求めよ.



**【8】**

2次方程式 $x^2+4x+1=0$ の2解を $\alpha$ ,  $\beta$ とする. 以下の値を求めよ.

- (1)  $\alpha + \beta$  と  $\alpha\beta$
- (2)  $\alpha^2 + \beta^2$  と  $\alpha^3 + \beta^3$
- (3)  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  と  $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

**【9】**

$x$ の方程式 $x^2-2(a+1)x+a^2+2a=0$ が $x<0$ の範囲と $x>1$ の範囲に1つずつ解をもつような, 定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

**【10】**

$m$ が整数で, 2次方程式 $x^2+mx+2m-4=0$ の1つの解が他の解の3倍に等しいとき,  $m=\square$ である.

**【11】**

2つの2次方程式 $x^2-3x+k-1=0$ ,  $x^2+(k-2)x-2=0$ が, 共通の実数解をただ1つもつとする. このとき,  $k$ の値は $\square$ であり, その共通解は $\square$ である.

**【12】**

$a < b < c$ を満たす3つの実数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ に対して,  $x$ に関する方程式

$$2(x-b)(x-c)-(x-a)^2=0$$

の2解 $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )と $a$ ,  $b$ ,  $c$ を大小順に並べよ.

(一橋大)

**【13】**

$k$ は実数の定数であるとする. 方程式 $x^2-2kx+2k^2-2k-3=0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) この方程式が2つの実数解をもち, 1つの解が正でもう1つの解が負であるための $k$ の値の範囲を求めよ.
- (2) この方程式の2解がともに正であるための $k$ の値の範囲を求めよ.

**【14】**

方程式 $x^3-6x^2+ax-6=0$ が $x=1$ を解にもつような $a$ の値を求め, 残りの解を求めよ.

【15】

$z = a + bi$ のとき、 $z^2 = 4i$ となる実数 $a$ 、 $b$ の値を求めよ。ただし $i$ は虚数単位である。

【16】

$x$ の方程式 $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ を解け。

【17】

3次方程式 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ の3解を $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ とすると、 $\alpha + \beta + \gamma$ 、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値を求めよ。

【18】

3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 14 = 0$ の1つの解が $2 + \sqrt{3}i$ であるとき、実数の定数 $a$ 、 $b$ の値を求めよ。（琉球大）

## § 2. 練習問題

【1】

どんな実数 $x$ をとっても $x^2-3x+2>0$ または $x^2+ax+1>0$ の、少なくとも一方を満足するよ  
うな、 $a$ の値の範囲を求めよ.

(名古屋市立大)

【2】

$a$ を実数の定数とする.  $x$ の関数 $f(x)=x|x-2a|$ の $0\leq x\leq 1$ における最大値を $M$ とおく. 以下  
の問いに答えよ.

(1)  $M$ を $a$ を用いて表せ.

(2)  $a$ の値がすべての実数を変化するとき,  $M$ の最小値を求めよ.

(岐阜大)

【3】

$x$ に関する方程式

$$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$$

が4個の異なる実数解をもつような点 $(a, b)$ の存在する範囲を図示せよ.

(一橋大)

### § 3. 添削問題

【1】

$a, b$  を実数の定数とし,  $f(x) = x^2 + ax + b$  を  $x$  の 2 次関数とすると, 次の問いに答えよ.

- (1)  $y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したところ, 頂点が点  $(1, 2)$  の放物線になった. このとき,  $a, b$  の値を求めよ.
- (2) 2 次方程式  $f(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解をもち, それらがともに  $-1$  より大きく  $1$  より小さくなるための  $a, b$  の条件を求めよ. このとき, さらに,  $a, b$  が  $a = 2b$  をみたすとき,  $b$  の値の範囲を求めよ.
- (3) 2 次関数  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最小値を  $m$  とする.  $a, b$  が不等式  $a + 2b \leq 2$  をみたすとき,  $m$  を最大にする  $a, b$  と, そのときの  $m$  の値をそれぞれ求めよ.

(秋田大・医)

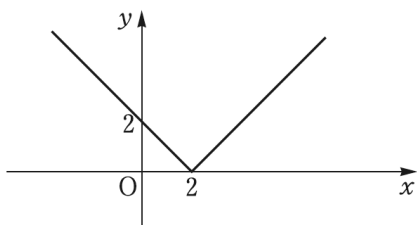
【2】

$x$  の方程式  $x^2 - ax + b = 0$  が  $0 < x < 1$  の範囲に少なくとも 1 つ解をもつような  $(a, b)$  の範囲を図示せよ.

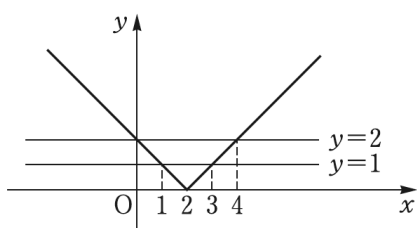
<基本問題の解答と解説>

$$【1】 |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2 \text{ のとき}) \\ -(x-2) & (x < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから  $y = |x-2|$  のグラフは以下のようなになる。



このグラフに  $y=1$  と  $y=2$  を描き入れると



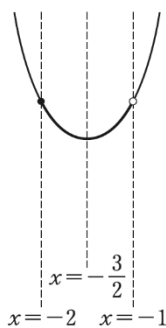
このグラフより、

$$|x-2| = 1 \text{ の解は } x=1, 3$$

$$|x-2| > 2 \text{ の解は } x < 0, x > 4$$

$$【2】 y = x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

(1)

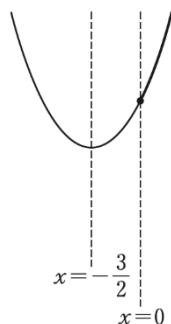


$-2 \leq x < -1$  における最大値は  $x = -2$  のとき

$$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1 = -3$$

最小値は  $x = -\frac{3}{2}$  のとき  $-\frac{13}{4}$

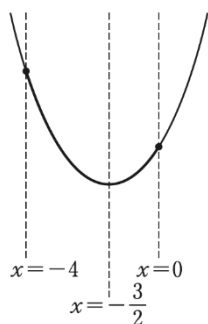
(2)



$x \geq 0$ における最大値はなし.

最小値は $x=0$ のとき  $-1$

(3)



$-4 \leq x \leq 0$ における最大値は $x = -4$ のとき

$$(-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 3$$

最小値は $x = -\frac{3}{2}$ のとき  $-\frac{13}{4}$

【3】

$x^2 + ax + a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$ であるから、すべての実数 $x$ に対して $x^2 + ax + a > 0$ となる $a$ の

値の範囲は、

$$-\frac{a^2}{4} + a > 0$$

を解いて

$$0 < a < 4$$

別解

$y = x^2 + ax + a$ とおくと、すべての実数 $x$ に対して $y > 0$ より、判別式 $D$ について、

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0 \quad a(a-4) < 0$$

これを解いて、 $0 < a < 4$

【4】(1)

(i)  $x \geq 2$ のとき,

$$f(x) = (x-1) + (x-2) = 2x-3$$

(ii)  $1 \leq x < 2$ のとき,

$$f(x) = (x-1) - (x-2) = 1$$

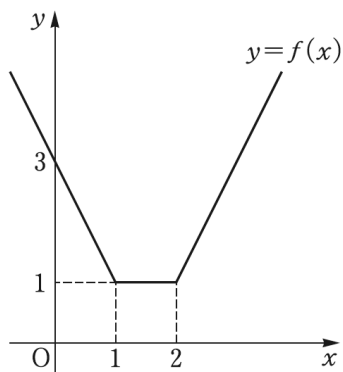
(iii)  $x \leq 1$ のとき,

$$f(x) = -(x-1) - (x-2) = -2x+3$$

以上(i)~(iii)より,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & (x \leq 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ 2x-3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

であり,  $y=f(x)$ のグラフは次のようになる.



よって $f(x)$ の最小値は1である.

(2)

(i)  $x \geq 3$ のとき,

$$g(x) = (x-1) + (x-2) + (x-3) = 3x-6$$

(ii)  $2 \leq x < 3$ のとき,

$$g(x) = (x-1) + (x-2) - (x-3) = x$$

(iii)  $1 \leq x < 2$ のとき,

$$g(x) = (x-1) - (x-2) - (x-3) = -x+4$$

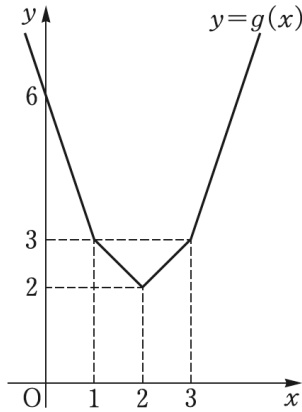
(iv)  $x \leq 1$ のとき,

$$g(x) = -(x-1) - (x-2) - (x-3) = -3x+6$$

以上(i)~(iv)より,

$$g(x) = \begin{cases} -3x+6 & (x \leq 1) \\ -x+4 & (1 \leq x < 2) \\ x & (2 \leq x < 3) \\ 3x-6 & (x \geq 3) \end{cases}$$

であり、 $y=g(x)$ のグラフは次のようになる。



よって $g(x)$ の最小値は2である。

【5】

$t=x^2-2x$ とおくと、

$$y=t^2+6t+1=(t+3)^2-8$$

$x$ が全実数を動くとき、 $t=(x-1)^2-1$ は $t \geq -1$ の範囲を動くので、 $y$ は $t=-1$ のとき最小値

$$-4$$

をとる。

【6】 $a=0$ のとき $f(x)=b$ となり、このとき最大値が9、最小値が1とはならないので、 $a \neq 0$ である。

$$f(x)=a(x-2)^2-2a+b$$

(i)  $a > 0$ のとき、 $f(x)$ は $x=2$ で最小値 $-2a+b$ をとり、これが1となることから、

$$-2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $f(x)$ は $x=4$ のとき最大値 $2a+b$ をとり、これが9となることから、

$$2a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②を解いて、

$$(a, b)=(2, 5) \quad (\text{これは} a > 0 \text{を満たす})$$

(ii)  $a < 0$ のとき、 $f(x)$ は $x=2$ で最大値 $-2a+b$ をとり、これが9となることから、

$$-2a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $f(x)$ は $x=4$ のとき最小値 $2a+b$ をとり、これが1となることから、

$$2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③と④を解いて、

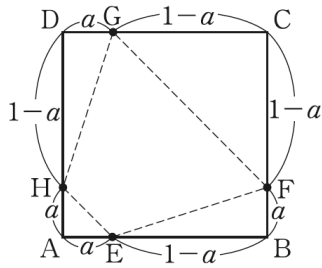
$$(a, b)=(-2, 5) \quad (\text{これは} a < 0 \text{を満たす})$$

以上(i)と(ii)より、

$$(a, b)=(2, 5), (-2, 5)$$



【7】



(1)  $EB=FC=CG=DH=1-a$

より, 三平方の定理から

$$EF=GH$$

$$=\sqrt{a^2+(1-a)^2}$$

$$=\sqrt{2a^2-2a+1}$$

$$FG=\sqrt{2}(1-a)$$

$$HE=\sqrt{2}a$$

となるので, 四角形EFGHの周の長さLは,

$$L=\sqrt{2}+2\sqrt{2a^2-2a+1}$$

(2)  $L=\sqrt{2}+2\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$

であるから, Lは $a=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる.

$3x^2-4x+a=0$  ……(\*)の判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-3\cdot a=4-3a$$

である. 重解をもつのは $D=0$ のときであるから

$$4-3a=0 \text{ より } a=\frac{4}{3}$$

このとき(\*)は

$$3x^2-4x+\frac{4}{3}=0 \text{ より } 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

となるから重解は $x=\frac{2}{3}$

【8】.

(1) 解と係数の関係より  $\alpha + \beta = -4, \alpha \beta = 1$

(2)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= (-4)^2 - 2 \cdot 1$$

$$= 14$$

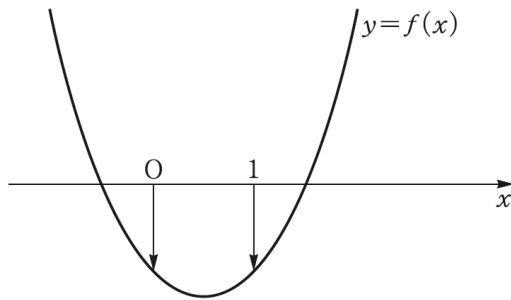
$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-4)^3 - 3 \cdot 1 \cdot (-4) \\ &= -52\end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{14}{1} = 14$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{-52}{1} = -52$$

【9】

$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a$ とおくと  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と  $x < 0$ ,  $x > 1$  の範囲にそれぞれ1つずつ共有点をもつような  $a$  の値の範囲を求めればよい.



求める条件は  $f(0) < 0$  かつ  $f(1) < 0$  だから

$$\begin{cases} a^2 + 2a < 0 \\ a^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 0 \\ -1 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 0$$

【10】2解は  $\alpha$ ,  $3\alpha$  とおくことができ、解と係数の関係から、

$$\alpha + 3\alpha = -m, \quad \alpha \cdot 3\alpha = 2m - 4$$

より、

$$4\alpha = -m, \quad 3\alpha^2 = 2m - 4$$

$\alpha$  を消去すると、

$$3\left(-\frac{m}{4}\right)^2 = 2m - 4$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 32m + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3m - 8)(m - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8}{3}, 8$$

$m$  は整数であるから、

$$m = 8$$

【11】.

$x^2-3x+k-1=0$ と $x^2+(k-2)x-2=0$ の共通の実数解を $\alpha$ とすると,

$$\begin{cases} \alpha^2-3\alpha+k-1=0 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha^2+(k-2)\alpha-2=0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②-①より

$$\begin{aligned} (k+1)\alpha-(k+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+1)(\alpha-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -1, \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

(i)  $k=-1$ のとき, ①と②はともに

$$\alpha^2-3\alpha-2=0$$

となる. これより $\alpha=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ であるから, 共通の実数解がただ一つとはならない.

(ii)  $\alpha=1$ のとき, ①と②より $k=3$ となり,

①と②はそれぞれ

$$\alpha^2-3\alpha+2=0, \quad \alpha^2+\alpha-2=0$$

となり, 共通解 $\alpha$ は $\alpha=1$ ただ一つである.

以上(i)と(ii)より, 共通の実数解がただ一つである $k$ は $k=3$ で, このときの共通の実数解は1

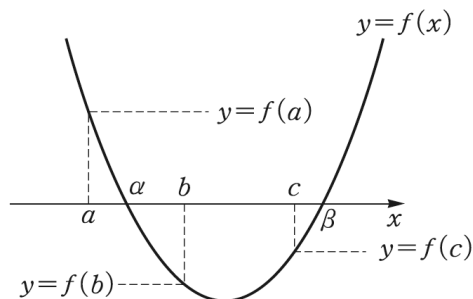
【12】.

$f(x)=2(x-b)(x-c)-(x-a)^2$ とおく.

$a < b < c$ より $f(a)=2(a-b)(a-c) > 0$ ,  $f(b)=- (b-a)^2 < 0$ ,  $f(c)=- (c-a)^2 < 0$ ,

$f(\alpha)=f(\beta)=0$

であるから,  $y=f(x)$ が下に凸の放物線であることも合わせると, 次の図のようになる.



よって,

$$a < \alpha < b < c < \beta$$

【13】.

$$f(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 - 2k - 3$$

$$= (x-k)^2 + k^2 - 2k - 3 \quad \text{とおく.}$$

(1) 求める条件は、 $y=f(x)$ が $x$ 軸と正の範囲と負の範囲で1つずつ共有点をもつことだから、 $f(0) < 0$ である。よって、 $2k^2 - 2k - 3 < 0$ より、

$$\frac{1-\sqrt{7}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

(2) 求める条件は、 $y=f(x)$ が $x$ 軸と正の範囲で異なる2つの共有点をもつか接することだから、 $k > 0$ かつ $f(k) \leq 0$ かつ $f(0) > 0$ である。よって、

$$\begin{cases} k > 0 \\ k^2 - 2k - 3 \leq 0 \\ 2k^2 - 2k - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ -1 \leq k \leq 3 \\ k < \frac{1-\sqrt{7}}{2}, k > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

より、

$$\frac{1+\sqrt{7}}{2} < k \leq 3$$

【14】

$x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0$  ……(\*)が $x=1$ を解にもつことから代入して

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 6 = 0$$

よって $a=11$

このとき(\*)は

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

よって残りの解は $x=2, 3$

【15】.

$z = a + bi$ を $z^2 = 4i$ に代入すると

$$(a + bi)^2 = 4i$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = 4i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2(ab - 2)i = 0$$

$a, b$ は実数だから

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1} \text{かつ} ab - 2 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

①より $b = \pm a$ である.

(イ)  $b = a$ のとき, ②に代入して

$$a^2 - 2 = 0 \text{より} a = \pm\sqrt{2}$$

よって

$$(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

(ロ)  $b = -a$ のとき, ②に代入して

$$-a^2 - 2 = 0 \text{より} a^2 = -2$$

となるがこれを満たす実数 $a$ はない.

以上(イ)(ロ)より

$$(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

【16】.

$$2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2x^3 + 3x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, \frac{1}{2}, x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$$

【17】

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

の3解が $\alpha, \beta, \gamma$ であるから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases}$$

これより,

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^2 - 2 \cdot 1 \\
&= 2 \\
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\
&= 2(2-1) + 3 \cdot 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

【18】

実数係数の3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx - 14 = 0$  の1つの解が  $2 + \sqrt{3}i$  であるとき、その共役な複素数である  $2 - \sqrt{3}i$  も解にもつので、残りの解を  $k$  とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases}
(2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) + k = -a \\
(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i)k + k(2 + \sqrt{3}i) = b \\
(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)k = 14
\end{cases}$$

つまり、

$$\begin{cases}
4 + k = -a \\
7 + 4k = b \\
7k = 14
\end{cases}$$

これを解いて、

$$(a, b, k) = (-6, 15, 2)$$

## 新城門プロジェクト(第3回)

### テーマ:整数問題(その1)

#### § 1. 基本問題(自習用)

【1】

108を素因数分解すると $2^2 \cdot 3^3$ となるから, 108の正の約数は全部で  個あり, それらの正の約数の和は  である.

【2】

$n$ が2以上の整数のとき,  $n^3 - n$ は6で割り切れることを示せ.

(宮崎大)

【3】

$x^2 - y^2 = 5$ をみたす整数  $x, y$ の組  $(x, y)$ をすべて求めよ.

【4】

$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ. なお, 証明には「 $n$ を整数とすると,  $n^2$ が3の倍数ならば $n$ は3の倍数である」ことを用いてよい.

【5】

2次方程式 $x^2 + (2n+1)x + n - 1 = 0$ の2つの解が整数となるように, 整数 $n$ の値を決めよ.

【6】

$a$ を整数とすると,  $a$ と $a+1$ は互いに素であることを示せ.

【7】

- (1)  $100!$ が $5^n$ で割り切れるような最大の自然数 $n$ を求めよ.
- (2)  $1000!$ を計算したとき, 末尾に現れる0の個数を求めよ.

【8】

- (1)  $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ.
- (2)  $n$ が正の整数のとき,  $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ.

(千葉大)

【9】

多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ は実数)を考える.  $f(-1), f(0), f(1)$ がすべて整数ならば, すべての整数 $n$ に対し,  $f(n)$ は整数であることを示せ.

(名古屋大・改)

【10】

$2x + y = 7$ を満たす正の整数 $x, y$ の組 $(x, y)$ をすべて求めよ.

【11】

$(n-1)^2$ が7の倍数となる自然数 $n$ を7で割った余りを求めよ.

(千葉大)

【12】

$m$ を5で割ると2余り,  $n$ を5で割ると4余るとき,  $m+n$ と $mn$ を5で割った余りをそれぞれ求めよ.

【13】

正の整数 $x, y$ が $x \leq y$ と $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ を満たすとき,  $x, y$ の組 $(x, y)$ を求めよ.

【14】

- (1) 方程式 $13x + 5y = 0$ を満たす整数 $x, y$ の組 $(x, y)$ をすべて求めよ.
- (2) 方程式 $13x + 5y = 1$ を満たす整数 $x, y$ の組 $(x, y)$ を1つ求めよ.
- (3) 方程式 $13x + 5y = 1$ を満たす整数 $x, y$ の組 $(x, y)$ をすべて求めよ.

【15】

$x, y, z$ を $x \leq y \leq z$ を満たす自然数とするとき,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ を満たす $x, y, z$ の組

$(x, y, z)$ をすべて求めよ.

【16】

方程式 $x^2 + 2xy + 3y^2 = 17$ を満たす整数 $x, y$ の組 $(x, y)$ をすべて求めよ.

【17】

$n$ を2以上の整数とするとき,  $n^5 + 4n$ が5で割り切れることを示せ.



【18】

3で割ると2余り，5で割ると3余り，11で割ると9余る正の整数のうちで，1000を超えない最大のものは  である.

(早稲田大)

## § 2. 練習問題

### 【1】

$n$ を正の整数とする.

- (1)  $n^2$ と $2n+1$ は互いに素であることを示せ.
- (2)  $n^2+2$ が $2n+1$ の倍数になる $n$ を求めよ.

(一橋大)

### 【2】

$\frac{2p-1}{q}$ ,  $\frac{2q-1}{p}$ がともに整数のとき, 整数 $p$ ,  $q$ の組を求めよ. ただし,  $p > q > 1$ とする.

### 【3】

- (1) 素数 $p$ と $1 \leq r \leq p-1$ なる整数 $r$ に対して, 二項係数についての等式 $r {}_p C_r = p {}_{p-1} C_{r-1}$ を証明し,  ${}_p C_r$ は $p$ の倍数であることを示せ.
- (2) 素数 $p$ に対して $2^p$ を $p$ で割った余りを求めよ.

(奈良女子大)

### § 3. 添削問題

【1】

(1)  $a, b$  を  $a < b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$  をみたす任意の自然数とすると、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  の最大値が  $\frac{5}{6}$  であることを証明せよ.

(2)  $a, b, c$  を  $a < b < c, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$  をみたす任意の自然数とすると、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  の最大値が  $\frac{41}{42}$  であることを証明せよ.

(富山大・医)

【2】

$a, b, c$  はどの 2 つも 1 以外の共通な約数をもたない正の整数とする.  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = c^2$  を満たしているとき、次の問いに答えよ.

- (1)  $c$  は奇数であることを示せ.
- (2)  $a, b$  の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ.
- (3)  $a, b$  の少なくとも一方は 4 倍数であることを示せ.

(旭川医大)

### <基本問題の解答と解説>

#### 【1】

108の正の約数は

$$2^m \cdot 3^n (m=0, 1, 2, n=0, 1, 2, 3)$$

の形をしており  $m, n$  の組  $(m, n)$  の個数だけ正の約数の個数があるので

$$3 \times 4 = 12 (\text{個})$$

また、これらの和は

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \\ &= (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9 + 27) \\ &= 7 \cdot 40 \\ &= 280 \end{aligned}$$

#### 【2】

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

であり、 $n-1, n, n+1$  は連続する3整数であるから、これらの中に2の倍数と3の倍数は必ず含まれる。よって  $n^3 - n$  は6で割り切れる。

#### 【3】

$x^2 - y^2 = 5$  は  $(x+y)(x-y) = 5$  と変形でき、 $x, y$  が整数のとき  $x+y, x-y$  は整数だから、

$$(x+y, x-y) = (5, 1), (1, 5), (-5, -1), (-1, -5)$$

に限る。これを  $x, y$  について解いて

$$(x, y) = (3, 2), (3, -2), (-3, -2), (-3, 2)$$

#### 【4】

$\sqrt{3}$  が無理数でない、つまり有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{3} = \frac{q}{p} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくことができ、 $p\sqrt{3} = q$  となるから両辺2乗すると、

$$3p^2 = q^2$$

この左辺が3の倍数であるから右辺の  $q^2$  も3の倍数、つまり  $q$  が3の倍数となるから、

$$q = 3q' \quad (q' \text{ は自然数})$$

とおくことができ、 $3p^2 = q^2$  に用いると、

$$3p^2 = (3q')^2 \text{ すなわち } p^2 = 3q'^2$$

この右辺が3の倍数であるから左辺の  $p^2$  も3の倍数、つまり  $p$  が3の倍数となる。

以上から $p$ と $q$ がともに3の倍数となるが、これは $p$ と $q$ が互いに素であることに反する。よって $\sqrt{3}$ は有理数でなく無理数である。

【5】

$x^2 + (2n+1)x + n - 1 = 0$ の2つの整数解を $\alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ )とおくと、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -(2n+1), \quad \alpha\beta = n-1$$

$n$ を消去すると、

$$\alpha + \beta = -2(\alpha\beta + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + 2\alpha\beta = -3$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1+2\beta) + \beta = -3$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1+2\beta) + \frac{1}{2}(1+2\beta) = -3 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(1+2\beta) = -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = -5$$

$\alpha, \beta$ が整数より $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ も整数だから、これを満たす $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ は $2\alpha + 1 \leq 2\beta + 1$ に注意すると

$$(2\alpha + 1, 2\beta + 1) = (-5, 1), (-1, 5)$$

つまり、

$$(\alpha, \beta) = (-3, 0), (-1, 2)$$

に限る。これと $n = \alpha\beta + 1$ より、

$$n = \pm 1$$

【6】

$a$ と $a+1$ の最大公約数を $g$ とすると、

$a = g\alpha, a+1 = g\beta$  ( $\alpha, \beta$ は互いに素な整数)と表せる。 $a$ を消去すると、

$$1 = g(\beta - \alpha)$$

であり、 $g$ が1の正の約数となるから $g=1$

よって、 $a$ と $a+1$ は互いに素である。

【7】.

(1)  $100!$ が $5^n$ で割り切れるような最大の自然数 $n$ は、 $100!$ を素因数分解したときの素因数5の個数、つまり1, 2, 3, ..., 100に含まれる素因数5の総数である。1, 2, 3, ..., 100の

中に5を1個以上含むものは $\frac{100}{5} = 20$ 個、2個以上含むものは $\frac{100}{5^2} = 4$ 個あり、3個以上含む

ものはないから,

$$\begin{aligned}n &= 1 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}1 \text{個含むもの}) + 2 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}2 \text{個含むもの}) \\ &= 1 \times (20 - 4) + 2 \times 4 \\ &= 24\end{aligned}$$

(2)  $1000!$ を計算したとき, 末尾に現れる0の個数は,  $1000!$ が $10(=2 \cdot 5)$ で何回割り切れるか数えればよい. それは $1000!$ を素因数分解したときの素因数5の個数である. なぜなら,  $1000!$ を素因数分解したとき, 5の個数より2の個数の方が明らかに多いからである. よって, 1, 2, 3,  $\dots$ , 1000に含まれる素因数5の総数( $m$ とする)を求めればよい.

1, 2, 3,  $\dots$ , 1000の中に5を1個以上含むものは $\frac{1000}{5}=200$ 個あり, 2個以上含むものは

$$\frac{1000}{5^2}=40 \text{個あり, 3個以上含むものは} \frac{1000}{5^3}=8 \text{個あり, 4個以上含むものは} \frac{1000}{5^4}=1.6 \text{よ}$$

り1個あり, 5個以上含むものはないから,

$$\begin{aligned}m &= 1 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}1 \text{個含むもの}) \\ &\quad + 2 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}2 \text{個含むもの}) \\ &\quad + 3 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}3 \text{個含むもの}) \\ &\quad + 4 \times (\text{素因数}5 \text{をちょうど}4 \text{個含むもの}) \\ &= 1 \times (200 - 40) + 2 \times (40 - 8) + 3 \times (8 - 1) + 4 \times 1 \\ &= 249(\text{個})\end{aligned}$$

## 【8】

(1)  $\log_2 3$ が無理数でない, つまり有理数であると仮定すると,  $\log_2 3 > 0$ に注意して

$$\log_2 3 = \frac{q}{p} \quad (p \text{と} q \text{は互いに素な自然数})$$

とおくことができ,  $3 = 2^{\frac{q}{p}}$ となるから両辺 $p$ 乗すると,

$$3^p = 2^q$$

$p$ と $q$ が自然数より左辺は奇数だが右辺は偶数である. これは矛盾である. よって $\log_2 3$ は有理数でなく無理数である.

(2)  $n$ が正の整数のとき,

$n = 2^a m$  ( $a$ は0以上の整数,  $m$ は正の奇数)と表すことができ, このとき,

$$\log_2 n = \log_2 2^a m = a + \log_2 m$$

だから,  $\log_2 n$ が整数でない有理数となる条件は $\log_2 m$ が整数でない有理数となることである.

(i)  $m=1$ のとき,  $\log_2 m=0$

(ii)  $m \geq 3$ のとき,  $\log_2 m$ が有理数だとすると,

$$\log_2 m = \frac{q}{p} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくことができ、 $m = 2^{\frac{q}{p}}$ となるから両辺 $p$ 乗すると、

$$m^p = 2^q$$

$p$ と $q$ が自然数、 $m$ が奇数であることより、左辺は奇数だが右辺は偶数である。  
これは矛盾である。

以上(i)と(ii)より、 $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはない。

【9】

$f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ がすべて整数のとき、それぞれ $k$ ,  $l$ ,  $m$ (整数)とおくと、

$$\begin{cases} -1+a-b+c=k \\ c=l \\ 1+a+b+c=m \end{cases}$$

であるから、 $a$ ,  $b$ ,  $c$ について解くと、

$$(a, b, c) = \left( \frac{m+k}{2} - l, \frac{m-k}{2} - 1, l \right)$$

これより、整数 $n$ に対して $f(n)$ は、

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + \left( \frac{m+k}{2} - l \right) n^2 + \left( \frac{m-k}{2} - 1 \right) n + l \\ &= n^3 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot m + \frac{n(n-1)}{2} \cdot k - ln^2 - n + l \end{aligned}$$

となる。 $n(n+1)$ と $n(n-1)$ はともに連続する2つの整数の積であるので偶数である。

これより $\frac{n(n+1)}{2}$ と $\frac{n(n-1)}{2}$ はともに整数であるから、すべての整数 $n$ に対して $f(n)$ は整数

となる。

【10】

$2x+y=7$  ……(\*)より $y=7-2x$ であるから、 $y>0$ より

$$7-2x>0 \text{ つまり } x < \frac{7}{2}$$

である。 $x>0$ でもあるから

$$x=1, 2, 3$$

に限る。これらを(\*)に代入して

$$(x, y) = (1, 5), (2, 3), (3, 1)$$

【11】

7は素数であるので $(n-1)^2$ が7の倍数となるのは $n-1$ が7の倍数となるときであるから

$$n-1=7k \quad (k \text{は整数})$$

と表せる. このとき

$$n=7k+1$$

となるから $n$ を7で割った余りは1

【12】.

条件より

$$m=5k+2, \quad n=5l+4 \quad (k, l \text{は整数})$$

と表せて,

$$m+n=(5k+2)+(5l+4)$$

$$=5(k+l+1)+1$$

$$mn=(5k+2)(5l+4)$$

$$=25kl+20k+10l+8$$

$$=5(5kl+4k+2l+1)+3$$

となるから $m+n$ ,  $mn$ を5で割った余りはそれぞれ1と3

【13】

$0 < x \leq y$ より  $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$  だから

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

よって  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  ……(\*)より

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{x} \text{ つまり } x \leq 4$$

である.  $x > 0$ と合わせると

$$x=1, 2, 3, 4$$

に限る.

・  $x=1$ のとき(\*)より $y=-2$ となり不適

・  $x=2$ のとき(\*)より $\frac{1}{y}=0$ となり不適

・  $x=3$ のとき(\*)より $y=6$ となり適する

・  $x=4$ のとき(\*)より $y=4$ となり適する

以上より,  $(x, y)=(3, 6), (4, 4)$



**【14】**

(1)  $13x+5y=0$  ……(\*)より,

$$13x=-5y$$

この右辺が5の倍数なので左辺も5の倍数だが、13と5は互いに素であるから $x$ が5の倍数でなければならない。これより $x=5k$  ( $k$ は整数)とおくことができて(\*)に用いると、

$$13 \cdot 5k+5y=0 \text{ より } y=-13k$$

よって、(\*)を満たす整数 $x, y$ の組は、

$$(x, y)=(5k, -13k) \quad (k \text{ は整数})$$

(2)  $13 \cdot 2+5 \cdot (-5)=1$  ……①

であるから、

$$(x, y)=(2, -5)$$

(3)  $13x+5y=1$  ……(\*\*)と(2)の①を辺々引くことにより、

$$13(x-2)+5(y+5)=0$$

よって(1)の結果よりこれを満たす整数 $(x-2, y+5)$ の組は

$$(x-2, y+5)=(5k, -13k) \quad (k \text{ は整数})$$

となり、(\*\*)を満たす整数 $x, y$ の組は、

$$(x, y)=(2+5k, -5-13k) \quad (k \text{ は整数})$$

**【15】**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad \text{……} (*)$$

$x \leq y \leq z$ より  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$  であるから、

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

より、

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

よって、(\*)の左辺に用いると、

$$1 \leq \frac{3}{x}$$

つまり、

$$x \leq 3$$

となり、 $x$ は自然数だから

$$x=1, 2, 3$$

に限る。

(i)  $x=1$ のとき, (\*)は $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ となり,

これを満たす自然数 $y, z$ は存在しない.

(ii)  $x=2$ のとき, (\*)は $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$  ……①

となる. ここで,  $2 \leq y \leq z$ より $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ であるから,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

より,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$$

よって, ①の左辺に用いると,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{y}$$

つまり,

$$y \leq 4$$

となり,  $y$ は $y \geq 2 (=x)$ を満たす自然数だから,

$$y = 2, 3, 4$$

に限る. このうち①に代入して $z$ が $z \geq y$ を満たす自然数となるものを求めて,

$$(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4)$$

(iii)  $x=3$ のとき, (\*)は $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$  ……②

となる. ここで,  $3 \leq y \leq z$ より $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ であるから,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

より,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$$

よって, ②の左辺に用いると,

$$\frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$$

つまり,

$$y \leq 3$$

となり,  $y$ は $y \geq 3 (=x)$ を満たす自然数だから

$$y=3$$

に限る. このとき②より  $z=3$  だから

$$(x, y, z) = (3, 3, 3)$$

以上 (i) ~ (iii) より,

$$(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

### 【16】

$x^2 + 2xy + 3y^2 = 17$  ……(\*) を  $x$  の2次方程式とみて判別式を  $D$  とすると,  $x$  が実数であることより  $D \geq 0$  だから,

$$y^2 - (3y^2 - 17) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}y - \sqrt{17})(\sqrt{2}y + \sqrt{17}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{34}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$5 < \sqrt{34} < 6$  と  $y$  が整数であることから  $y$  は,

$$y = 0, \pm 1, \pm 2$$

に限る.

(ア)  $y=0$  のとき, (\*) は  $x^2 = 17$  となりこれを満たす整数  $x$  はない.

(イ)  $y=1$  のとき, (\*) は  $x^2 + 2x - 14 = 0$  となりこれを満たす整数  $x$  はない.

(ウ)  $y=-1$  のとき, (\*) は  $x^2 - 2x - 14 = 0$  となりこれを満たす整数  $x$  はない.

(エ)  $y=2$  のとき, (\*) は  $x^2 + 4x - 5 = 0$  となりこれを満たす整数  $x$  は  $x = -5, 1$

(オ)  $y=-2$  のとき, (\*) は  $x^2 - 4x - 5 = 0$  となりこれを満たす整数  $x$  は  $x = 5, -1$

以上より, (\*) を満たす整数  $x, y$  の組は,

$$(x, y) = (-5, 2), (1, 2), (5, -2), (-1, -2)$$

### 【17】

$f(n) = n^5 + 4n$  とおく.  $n$  を5で割った余りで分類する.

(i)  $n$  を5で割った余りが0のとき,  $n = 5m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) と表せて,

$$\begin{aligned} f(n) &= (5m)^5 + 4 \cdot 5m \\ &= 5(5^4 m^5 + 4m) \end{aligned}$$

だから  $f(n)$  は5で割り切れる.

(ii)  $n$  を5で割った余りが1のとき,  $n = 5m + 1$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) と表せて,

$$f(n) = (5m + 1)^5 + 4 \cdot (5m + 1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^5 {}_5C_k (5m)^k + 4(5m+1) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k + 1^5 + 4(5m+1) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k + 5(4m+1)
\end{aligned}$$

だから  $f(n)$  は5で割り切れる.

(iii)  $n$  を5で割った余りが2のとき,  
 $n=5m+2$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) と表せて,

$$\begin{aligned}
f(n) &= (5m+2)^5 + 4 \cdot (5m+2) \\
&= \sum_{k=0}^5 {}_5C_k (5m)^k 2^{5-k} + 4(5m+2) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k 2^{5-k} + 2^5 + 4(5m+2) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k 2^{5-k} + 5(4m+8)
\end{aligned}$$

だから  $f(n)$  は5で割り切れる.

(iv)  $n$  を5で割った余りが3のとき,  
 $n=5m-2$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) と表せて,

$$\begin{aligned}
f(n) &= (5m-2)^5 + 4 \cdot (5m-2) \\
&= \sum_{k=0}^5 {}_5C_k (5m)^k (-2)^{5-k} + 4(5m-2) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k (-2)^{5-k} + (-2)^5 + 4(5m-2) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k (-2)^{5-k} + 5(4m-8)
\end{aligned}$$

だから  $f(n)$  は5で割り切れる.

(v)  $n$  を5で割った余りが4のとき,  
 $n=5m-1$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) と表せて,

$$\begin{aligned}
f(n) &= (5m-1)^5 + 4 \cdot (5m-1) \\
&= \sum_{k=0}^5 {}_5C_k (5m)^k (-1)^{5-k} + 4(5m-1) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k (-1)^{5-k} + (-1)^5 + 4(5m-1) \\
&= \sum_{k=1}^5 {}_5C_k (5m)^k (-1)^{5-k} + 5(4m-1)
\end{aligned}$$

だから  $f(n)$  は5で割り切れる.

以上 (i) ~ (v) より, 自然数  $n$  に対して  $f(n)$  は5で割り切れる.

**【18】**

求める正の整数を  $N$  とおくと, 11で割ると9余ることより,

$$N = 11m + 9 \quad (m \text{ は整数})$$

と表せる. この  $m$  を5で割ることにより,

$$m = 5n + r \quad (n \text{ は整数, } r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

と表せるから,  $N$  は

$$\begin{aligned} N &= 11(5n + r) + 9 \\ &= 5(11n + 2r + 1) + 4 + r \end{aligned}$$

$N$  は5で割ると余り3であるから  $r = 4$  であり, このとき

$$N = 55n + 53$$

となる. さらに  $n$  を3で割ることにより,

$$n = 3k + s \quad (k \text{ は整数, } s = 0, 1, 2)$$

と表せるから,  $N$  は

$$\begin{aligned} N &= 55(3k + s) + 53 \\ &= 3(55k + 18s + 17) + s + 2 \end{aligned}$$

$N$  は3で割ると余り2であるから  $s = 0$  であり, このとき

$$N = 165k + 53$$

となる.  $k = 5$  のとき  $N = 878$ ,  $k = 6$  のとき  $N = 1043$  だから, 1000を超えない最大のものは, 878

## 新城門プロジェクト(第4回)

### テーマ:順列組合せ

#### § 1. 基本問題(自習用)

##### 【1】

7つの数字0, 1, 2, 3, 4, 5, 6について考える.

- (1) この7つの数字から4つの数字をとってできる4桁の数の個数を求めよ.
- (2) (1)で考えた4桁の数のうち, 両端が奇数であるものの個数を求めよ.

(自治医科大・改)

##### 【2】

男子5人, 女子3人の中から3人を選ぶ.

- (1) 選び方の総数は何通りあるか.
- (2) 男子2人と女子1人を選ぶ方法は何通りあるか.
- (3) 女子を2人以上選ぶ方法は何通りあるか.

##### 【3】

SCIENCEという単語の文字をすべて使ってできる順列は, 全部で何通りあるか.

##### 【4】

1から9までの整数から3つ選んで積を作る.

- (1) 積が奇数となるような3つの数の選び方は何通りあるか.
- (2) 積が3の倍数となるような3つの数の選び方は何通りあるか.
- (3) 積が6で割り切れないような3つの数の選び方は何通りあるか.

##### 【5】

男女4人ずつ計8人が円形に並ぶことを考える.

- (1) 右図1のように男女が交互に並ぶ方法は何通りあるか.
- (2) 右図2のように男女がそれぞれ固まって並ぶ方法は何通りあるか.



【6】

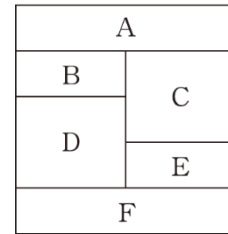
7人の選手A, B, C, D, E, F, Gでリレーをする.

- (1) AがBよりあとに走る場合, 7人の走る順番は全部で何通りあるか.
- (2) AがBよりあとに走るか, またはAがCよりあとに走る場合, 7人の走る順番は全部で何通りあるか.

【7】

ある地域が, 右図のように6区画に分けられている.

- (1) 境界を接している区画は異なる色で塗ることにして, 赤・青・黄の3色で塗り分ける方法は何通りあるか.
- (2) 境界を接している区画は異なる色で塗ることにして, 赤・青・黄・白の4色で塗り分ける方法は何通りあるか.



【8】

6つの数字1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる5つをとりだし, そのうち1つは2度使って, 例えば1, 1, 2, 3, 4, 5のように合計6つの数字をえらぶ. そして, 立方体の6つの面に1つずつ書き込む. このとき,

- (1) 立方体書き込む6つの数字のえらび方は何通りあるか.
- (2) 1, 1, 2, 3, 4, 5をえらんだとき, 2つの1が向かい合う面にあるような数字の書き込み方は何通りあるか.
- (3) 数字の書き込み方は全部で何通りあるか.

【9】

$n$ を自然数とする. 正 $6n$ 角形の異なる3頂点を結んで作られる ${}_{6n}C_3$ 個の三角形のうち, 次のようなものは何個あるか.

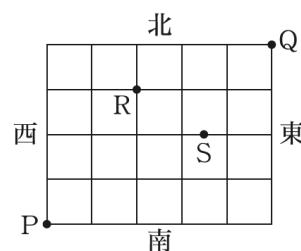
- (1) 正三角形
- (2) 直角三角形
- (3) 二等辺三角形
- (4) 鈍角三角形

【10】

A大学からB大学への移動手段は電車とバスの2通りがある. 3人の学生a, b, cがそれぞれ勝手にA大学からB大学へ移動するとき, 移動手段の選び方は何通りあるか.

【11】

図のように100m間隔で東西方向に5本、100m間隔で南北方向に6本の道がある。これらの道を通ってPからQまで行くとき、次の問いに答えよ。



- (1) PからQまで最短経路で行く場合、移動距離は何mか。また、この場合の経路は何通りあるか。
- (2) Rを通らないでPからQまで行く最短経路は何通りあるか。
- (3) Sを通ってPからQまで行く最短経路は何通りあるか。

【12】

9冊の異なる本がある。

- (1) Aさんに2冊、Bさんに2冊、Cさんに5冊分配する方法は何通りあるか。
- (2) 2冊、2冊、5冊の3つの組に分割する方法は何通りあるか。

【13】

球と立方体と正三角錐の3種類の積み木を製造する会社があり、これらの積み木を組み合わせて10個1組のセットを作るとする。

- (1) 全部でいくつの組合せが考えられるか。
- (2) 3種類の積み木のうち、球と立方体とを少なくとも1個ずつ含む組合せはいくつか。

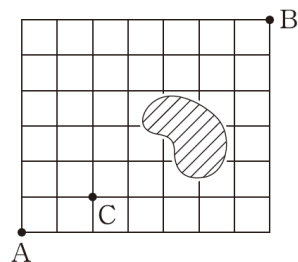
【14】

サイコロを3回振る。出た目を順に $x$ ,  $y$ ,  $z$ とするとき、

- (1)  $x < y < z$ となる出方は何通りあるか。
- (2)  $x \leq y \leq z$ となる出方は何通りあるか。

【15】

図のような市街路をA地点からB地点まで、最短経路で行く方法は何通りあるか。以下の各場合について答えよ。ただし、斜線部分は池があって通行できないものとする。



- (1) C地点を通って行く場合
- (2) C地点を通らないで行く場合



**【16】**

A, B, Cの記号がつけられた3つの袋に, 赤玉5個, 白玉6個すべてを入れる場合の数について考える. 次の問いに答えよ. ただし, 同じ色の玉は区別しないものとする.

- (1) 空になる袋があってもよいとすると, 全部で何通りの入れ方があるか.
- (2) A, B, Cそれぞれの袋に, 赤玉1個と白玉1個は少なくとも入っているようにする入れ方は何通りあるか.
- (3) 空の袋がないようにする入れ方は何通りあるか.

## § 2. 練習問題

### 【1】

ガラスで出来た玉で，赤色のものが6個，青色のものが2個，透明なものが1個ある．玉には，中心を通過して穴が開いているとする．

- (1) これらを1列に並べる方法は何通りあるか．
- (2) これらを丸く円形に並べる方法は何通りあるか．
- (3) これらの玉に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか．

### 【2】

すべて色の異なる7個の球がある．このとき，次の各問いに答えよ．

- (1) 7個の球から6個の球を取り出して，A，B，Cのケースに2個ずつ入れる方法は何通りあるか．
- (2) 7個の球を，A，B，Cのケースに分ける方法は何通りあるか．ただし，各ケースには何個入ってもよいが，それぞれのケースには少なくとも1個は入るものとする．
- (3) 7個の球を，3つのグループに分ける方法は何通りあるか．ただし，各グループには何個入ってもよいが，それぞれのグループには少なくとも1個は入るものとする．

### 【3】

$n$ 個の整数 $1, 2, 3, \dots, n$ のうちから3個の整数を選ぶとき，どの2つの数の差も絶対値が3以上となるような選び方はいく通りあるか．ただし， $n$ は7以上とする．

(お茶の水女子大)

### § 3. 添削問題

#### 【1】

1000から9999までの4桁の自然数について次の間に答えよ.

ただし求める手順をわかりやすく説明すること.

- (1) 1が使われているものはいくつあるか.
- (2) 1, 2の両方が使われているものはいくつあるか.
- (3) 1, 2, 3のすべてが使われているものはいくつあるか.

(名古屋市立大)

#### 【2】

$m$ 個の玉すべてを3つの袋A, B, Cに分けて入れる. このとき, 球は区別しないものとし, また球の入っていない袋があってもよいものとする. 袋A, B, Cに入れる球の数をそれぞれ $x, y, z$ とすると, 次の間に答えよ.

- (1)  $m=18$ のとき,  $x > y > z \geq 0$ を満たす入れ方は何通りあるか.
- (2)  $m=6n$ のとき,  $x > y > z \geq 0$ を満たす入れ方は何通りあるか.  $n$ を用いて表せ.  
ただし,  $n$ は自然数とする.

(山口大)

### <基本問題の解答と解説>

【1】.

(1) 最高位(千の位)の数字の選び方が0以外の6通り, 百, 十, 一の位の選び方が, 残り6つの数字から3つを選んで並べる方法で,  ${}_6P_3$ 通り.

よって, 求める整数の個数は

$$6 \cdot {}_6P_3 = 720(\text{個})$$

(2) 千の位と一の位を3つの奇数から選んで並べる方法が ${}_3P_2$ 通り, 百, 十の位の選び方が, 残り5つの数字から2つを選んで並べる方法で,  ${}_5P_2$ 通り.

よって, 求める整数の個数は

$${}_3P_2 \cdot {}_5P_2 = 120(\text{個})$$

【2】.

(1) 男女合計8人から3人を選ぶ方法であるから,

$${}_8C_3 = 56(\text{通り})$$

(2) 男子2人の選び方が ${}_5C_2$ 通り. 女子1人の選び方が ${}_3C_1$ 通りあるから, 求める選び方は,

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 30(\text{通り})$$

(3) 女子を2人以上選ぶ方法は, 「男子1人と女子2人」または「女子3人」を選ぶ方法である.

よって, (2)と同様に考えて, 求める選び方は,

$${}_5C_1 \cdot {}_3C_2 + {}_3C_3 = 16(\text{通り})$$

**別解**

(1)で求めた選び方の数から, (2)で求めた選び方の数と, 男子3人を選ぶ方法の数を除けばよいから,

$$56 - (30 + {}_5C_3) = 16(\text{通り})$$

【3】.

CとEが2つずつ, S, I, Nが1つずつの計7つの文字を並べる方法であるから,

$$\frac{7!}{2!2!} = 126(\text{通り})$$

【4】.

(1) 積が奇数となるのは、選んだ3つの数がすべて奇数のときである。したがって、求める選び方は、5つの異なる奇数から3つの数を選ぶ方法であるから、

$${}_5C_3 = 10 \text{ (通り)}$$

(2) 3つの数の選び方の総数は ${}_9C_3$ 通り。

このうち、積が3の倍数にならないような選び方は、3つとも3, 6, 9以外の6つの数から選ぶ方法であるから、 ${}_6C_3$ 通り。

よって、求める選び方は、

$${}_9C_3 - {}_6C_3 = 84 - 20 = 64 \text{ (通り)}$$

(3) 積が6で割り切れないのは、2の倍数でないか、あるいは3の倍数でない場合である。

2の倍数でない、すなわち奇数であるような選び方は、(1)より ${}_5C_3$ 通り。

3の倍数でないような選び方は、(2)より ${}_6C_3$ 通り。

ただし、これらには2の倍数でなく、かつ3の倍数でもない場合が重複している。これは1, 5, 7を選ぶときの1通りである。

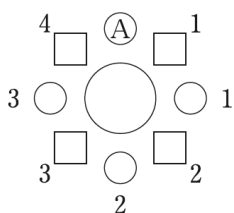
以上より、求める選び方は、

$${}_5C_3 + {}_6C_3 - 1 = 10 + 20 - 1 = 29 \text{ (通り)}$$

【5】

男性用の席を○で、女性用の席を□で表すことにする。

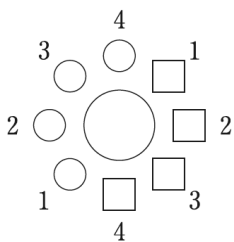
(1) 男性の1人(Aとする)を座らせることで、残りの男性用の席3つと女性用の席4つすべてに区別がつく。



よって、求める並び方は、これらの席に残りの男性3人、女性4人を座らせる方法であるから、

$$3! \cdot 4! = 144 \text{ (通り)}$$

(2) 初めからすべての席に区別がついている。



よって、求める並び方は、これらの席に男性4人、女性4人を座らせる方法であるから、  
 $4! \cdot 4! = 576$ (通り)

【6】.

先に走る順に左から一列に並べて、走る順を表現するものとする.

(1)  $\bigcirc, \bigcirc, C, D, E, F, G$ を並べたあと、2つの $\bigcirc$ に左からB, Aと入れればよい.

$\bigcirc, \bigcirc, C, D, E, F, G$ の並べ方は $\frac{7!}{2!}$ 通り.

2つの $\bigcirc$ に左からB, Aと入れる方法は1通り.

よって、求める場合の数は、

$$\frac{7!}{2!} \cdot 1 = 2520 \text{(通り)}$$

(2) AがBよりあとに走るような順番は、(1)より2520通り.

AがCよりあとに走るような順番も、(1)と同様に2520通り.

ただし、これらには、AがBよりあとに走り、かつAがCよりあとに走るような場合が重複して数えられている. このような順番の決め方は、 $\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, D, E, F, G$ を並べたあと、3つの $\bigcirc$ に左からB, C, AまたはC, B, Aと入れて得られる並べ方の数だけあるから、(1)と同様に考えて、

$$\frac{7!}{3!} \cdot 2 = 1680 \text{(通り)}$$

よって、求める場合の数は、

$$2520 + 2520 - 1680 = 3360 \text{(通り)}$$

別解

$\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, D, E, F, G$ を並べたあと、3つの $\bigcirc$ にA, B, Cを、AがBより右にあるか、またはAがCより右にあるように入れればよい.

$\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, D, E, F, G$ の並べ方は $\frac{7!}{3!}$ 通り.

3つの $\bigcirc$ にA, B, Cを入れる方法の総数は3!通りあり、そのうち、AがBより左にあり、かつ、AがCより左にあるような入れ方はA, B, CまたはA, C, Bの2通りある. したがって、AがBより右にあるか、またはAがCより右にあるような入れ方は $3! - 2$ 通りある.  
よって、求める場合の数は、

$$\frac{7!}{3!} \cdot (3 - 2) = 3360 \text{(通り)}$$

【7】

同色で塗れる区画の組は，AD，AE，AF，BE，BF，CFだけである．とくに，Cと同色にできるのはFだけ，Dと同色にできるのはAだけである．また，A，B，Cは異なる色で塗らなければならないから，塗り分けには最低3色は必要である．

(1) AとDを同色で，BとEを同色で，CとFを同色で塗るしかない．したがって，求める塗り分け方は，AD，BE，CFに使う色を，赤・青・黄の3色から決める方法であるから，

$$3! = 6 \text{通り}$$

(2) 4色すべてを使うなら，同色の区画を2組選ばなければならない．この選び方は

(AD，BE)，(AD，BF)，(AD，CF)，(AE，BF)，

(AE，CF)，(AF，BE)，(BE，CF)

の7組ある．このそれぞれについて色の選び方が4!通りある．

4色のうち3色で塗り分ける場合は，使用する3色の選び方が ${}_4C_3$ 通りあり，そのそれぞれについて塗り分け方が(1)と同じく6通りある．

したがって，求める塗り分け方は，

$$7 \cdot 4! + {}_4C_3 \cdot 6 = 192 \text{(通り)}$$

【8】

(1) 使用する5つの数字の選び方が ${}_6C_5$ 通りあり，そのそれぞれに，2回使う数字の選び方が5通りあるから，求める数字の選び方は，

$${}_6C_5 \cdot 5 = 30 \text{(通り)}$$

別解

使わない数字と2回使う数字を選ぶことと等しいから，

$${}_6P_2 = 30 \text{(通り)}$$

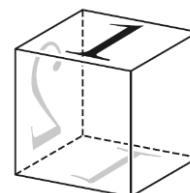
(2) 2つの1が上面と底面にあるように置いて考える．このとき，4つの側面には区別がないから，そのうちの1つの面に2を書き込む．

このとき，2の向かいの面は他の面とは区別されるから，この面に書き込む数字を選ぶ方法は3通り．

2の向かいの面に数字を書き込んでも，残りの2面は回転により同一視できるからここに残りの2数を書き込む方法は1通り．

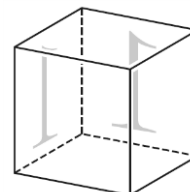
よって，求める書き込み方は，

$$3 \cdot 1 = 3 \text{(通り)}$$



(3) まず, 1, 1, 2, 3, 4, 5を選び, 2つの1が隣り合う面にあるような数字の書き込み方について考える.

この場合, 2つの1を書き込んだ時点で, 2つの1の向かいにある2面(図で残りの2側面)がそれ以外の2面(図で上面と底面)と区別される. そこで, 2, 3, 4, 5を, 残りの2側面に書き込む数とそれ以外の2数に分けて考える. この分け方は ${}_4C_2$ 通りある.



2つの1を書き込んだ時点では, 残りの2側面に区別がないから, 選んだ2数を書き込む方法は1通り.

この時点で, 上面と底面に区別がつくから, 残り2数を書き込む方法は2!通り.

以上より, 1, 1, 2, 3, 4, 5を選んだとき, 2つの1が隣り合う面にあるような数字の書き込み方は,

$${}_4C_2 \cdot 1 \cdot 2! = 12 \text{ (通り)}$$

一方, 1, 1, 2, 3, 4, 5を選んだとき, 2つの1が向かい合う面にあるような数字の書き込み方は, (2)より3通り.

よって, 1, 1, 2, 3, 4, 5を選んだときの数字の書き込み方は,

$$12 + 3 = 15 \text{ (通り)}$$

他の数字の選び方((1)より30通り)についても同様に考えられるから, 求める数字の書き込み方は,

$$30 \cdot 15 = 450 \text{ (通り)}$$

### 【9】.

正 $6n$ 角形の外接円を $C$ とする.

(1) 1つの頂点の位置を選ぶと他の2頂点の位置も定まるから, 重複も考慮して, 正三角形の個数は,

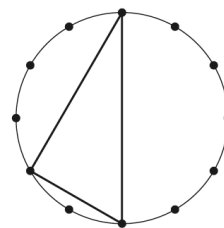
$$\frac{6n}{3} = 2n \text{ (個)}$$

(2) 直角三角形の斜辺は, 円 $C$ の直径になるから, 斜辺の選び方(斜辺の両端の頂点の選び方)は,

$$\frac{6n}{2} = 3n \text{ 通り}$$

ある. このそれぞれに対し, 残りの1頂点の選び方が $(6n-2)$ 通りずつあるから, 直角三角形の個数は,

$$3n \cdot (6n-2) = 6n(3n-1) \text{ (個)}$$

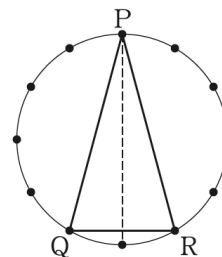




(3) まず、正三角形でない二等辺三角形について考える。この二等辺三角形の頂点を、 $PQ=PR$ であるように反時計まわりにP, Q, Rと名付ける。

このとき、頂点Pの選び方が $6m$ 通りある。

点Pを端点とする円Cの直径に関して、頂点Q, Rは対称な位置にあるから、点Q, Rの選び方は(正三角形になるときを除外して)、



$$\frac{6n-2}{2}-1=3n-2(\text{通り})$$

よって、正三角形でない二等辺三角形は、

$$6n(3n-2)\text{個}$$

これに(1)で求めた正三角形の個数を加え、求める二等辺三角形の個数は、

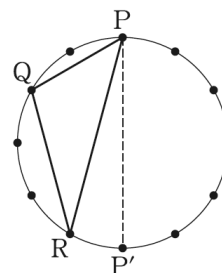
$$6n(3n-2)+2n=2n(9n-5)(\text{個})$$

(4) 鈍角三角形の頂点を、 $\angle PQR$ が鈍角であるように反時計まわりにP, Q, Rと名付ける。

このとき、頂点Pの選び方が $6m$ 通りある。

点Pを端点とする円Cの直径の他端をP'とすると、頂点Q, Rはともに直径PP'に関してP'からPに向かって左側にある。

したがって、点Q, Rの選び方は、



$$\frac{6n-2}{2}C_2=_{3n-1}C_2$$

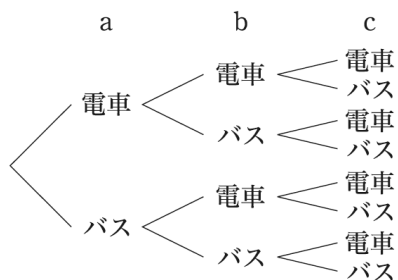
$$=\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)\text{通り}$$

よって、鈍角三角形の個数は、

$$6n \cdot \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)=3n(3n-1)(3n-2)(\text{個})$$

### 【10】

a, b, cの移動手段の選び方を樹形図で表すと、次のようになる。



よって、3人の移動手段の選び方は、 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)

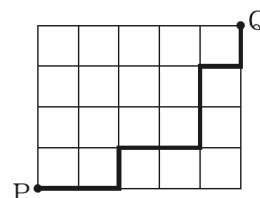
【11】.

(1) PからQまで最短経路で行く場合，東向きに5区画(500m)，北向きに4区画(400m)進むことになるから，移動距離は合計900mである.

東に1区画移動することをE，北に1区画移動することをNと表すと，PからQへの最短経路は，Eが5個，Nが4個からなる文字列と1対1に対応する。(例えば，右図の太線の経路はEENEENNENと表現される.)

したがって，最短経路は，Eが5個，Nが4個の合計9文字の並び方の数だけあるから，

$$\frac{9!}{5!4!} = 126 \text{ (通り)}$$



(2) PからRまでは東向きに2区画，北向きに3区画の計5区画であるから，PからRへの最短経路は，

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$

RからQまでは東向きに3区画，北向きに1区画の計4区画であるから，RからQへの最短経路は，

$$\frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ (通り)}$$

よって，Rを通過してPからQまで行く最短経路は，

$$10 \cdot 4 = 40 \text{ (通り)}$$

あるから，Rを通らないでPからQまで行く最短経路は，

$$126 - 40 = 86 \text{ (通り)}$$

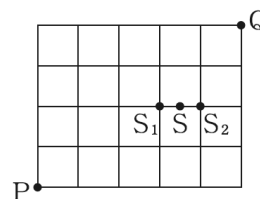
(3) Sを通ることは，右図の $S_1$ ， $S_2$ を通ることと同値である.

(2)と同様に考えて，最短経路の数は，

$$\text{Pから } S_1: \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)},$$

$$S_1 \text{ から } S_2: 1 \text{ 通り},$$

$$S_2 \text{ から } Q: \frac{3!}{1!2!} = 3 \text{ (通り)}$$



であるから，Sを通過してPからQまで行く最短経路は，

$$10 \cdot 1 \cdot 3 = 30 \text{ (通り)}$$

【12】

(1) 異なる9冊の本の中からAさんに渡す本を2冊選ぶ方法が ${}_9C_2$ 通りあり、そのそれぞれに対し、残りの7冊の本の中からBさんに渡す本を2冊選ぶ方法が ${}_7C_2$ 通りある。(残った5冊はすべてCさんに渡す。)

したがって、求める分配方法は、

$${}_9C_2 \cdot {}_7C_2 = 756 \text{ (通り)}$$

(2) 2冊, 2冊, 5冊の3つの組に分割した後, 2冊, 2冊の2組をAさん, Bさんに1組ずつ渡し, 5冊の組をCさんに渡せば(1)で求めた分配方法になる。

2冊, 2冊, 5冊の3つの組に分割する方法が $x$ 通りあるとする。2冊, 2冊の2組(含まれる本は異なる)をAさん, Bさんに1組ずつ渡す方法は $2!$ 通りあるから、

$$x \cdot 2! = 756$$

よって、求める分割方法は、

$$x = 378 \text{ 通り}$$

【13】

(1) 球と立方体と正三角錐の3種から、重複を許して10個の積み木を選べばよいから、求める組合せの数は、

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = 66 \text{ 通り}$$

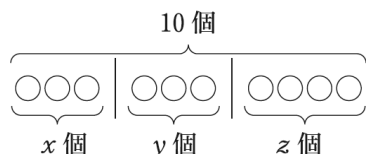
別解

球を $x$ 個, 立方体を $y$ 個, 正三角錐を $z$ 個使うとすると、求める組合せの数は、

$$x + y + z = 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

を満たす整数の組 $(x, y, z)$ の個数だけある。

これは区別のない10個のものを3人に分ける方法と等しく、



のように、10個の○を2本の区切り線で区切る方法と表現できる。

$x, y, z$ のうちに0があってもよいから、これは10個の○と2本の区切り線を自由に並べることに相当する。

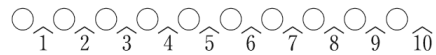
よって、求める組合せの数は、 $\frac{12}{102} = 66$ 通り

(2) 先に球と立方体の積み木を1個ずつ確保しておき、さらに、球と立方体と正三角錐の3種から、重複を許して残り8個の積み木を選べばよいから、求める組合せの数は、

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = 45 \text{ 通り}$$

別解

(1)と同様に10個の○を2本の区切り線で区切る問題と読み替える。ただし、 $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ であるから、区切り線は○と○の間か右端の10箇所のうち2箇所を選んで1本ずつ入れることになる。



よって、求める組合せの数は、

$${}_{10}C_2 = 45 \text{通り}$$

【14】

(1) 1から6の目から異なる3つを選び、それを小さい順に  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とすればよい。

よって、求める出方は、

$${}_6C_3 = 20 \text{通り}$$

(2) 1から6の目から重複を許して3つを選び、それを大きくない順に  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とすればよい。

よって、求める出方は、

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56 \text{通り}$$

別解

求める目の出方は、

$$1 \leq x \leq y \leq z \leq 6 \quad \dots\dots (*)$$

を満たす整数の組  $(x, y, z)$  の個数に相当する。

ここで、一般に整数  $M, N$  について、 $M \leq N$  は  $M < N + 1$  と同値であるから、 $(*)$  は

$$1 \leq x < y + 1 < z + 2 \leq 8$$

と同値である。

したがって、

$$a = x, \quad b = y + 1, \quad c = z + 2$$

の置き換えにより、 $(*)$  を満たす整数の組  $(x, y, z)$  は、

$$1 \leq a < b < c \leq 8$$

を満たす整数の組  $(a, b, c)$  と1対1に対応する。

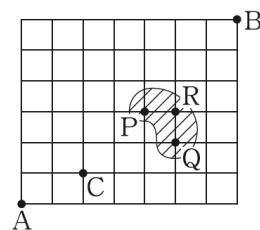
この整数の組は、(1)と同様に1から8の整数から異なる3つを選び、それを小さい順に  $a$ ,  $b$ ,  $c$  としたものと同表現できるから、求める目の出方は、

$${}_8C_3 = 56 \text{(通り)}$$

【15】

街路を池の中まで仮想的に延長して、図のようにP、Q、Rの3地点を定める。

仮想的な街路も含めた上で、A地点からB地点までの最短経路を考えた場合、P地点、Q地点のいずれも通らなければ、R地点も通らない。また、P地点とQ地点をともに通ることもできない。



したがって、池の部分が通行できない場合の経路の数は、仮想的な街路も含めた最短経路全体の数から、P地点を通る経路とQ地点を通る経路(重複なし)の数を除いたものである。以下、とくに断りのない限り、街路は仮想的な街路も含めたものを指すことにする。

(1) A地点からC地点を経由し、B地点に至る最短経路数は、

$$\frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{10!}{5!5!} = 3 \cdot 252 = 756 \text{ (通り)}$$

このうち、P地点を経由する経路は、

$$\frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 3 \cdot 6 \cdot 20 = 360 \text{ (通り)}$$

であり、Q地点を経由する経路は、

$$\frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 3 \cdot 4 \cdot 15 = 180 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める最短経路数は、

$$756 - (360 + 180) = 216 \text{ (通り)}$$

(2) A地点からB地点に至る最短経路数は、

$$\frac{13!}{7!6!} = 1716 \text{ (通り)}$$

このうち、P地点を経由する経路は、

$$\frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 35 \cdot 20 = 700 \text{ (通り)}$$

であり、Q地点を経由する経路は、

$$\frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 21 \cdot 15 = 315 \text{ (通り)}$$

である。よって、池がある場合の、A地点からB地点に至る最短経路数は、

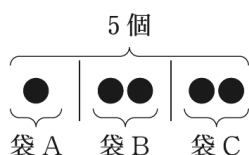
$$1716 - (700 + 315) = 701 \text{ (通り)}$$

これから、(1)で求めたC地点を経由する場合の経路数を除いて、求める最短経路数は、

$$701 - 216 = 485 \text{ (通り)}$$

【16】

(1) 赤玉5個をA, B, Cの3つの袋に分けて入れる方法は,



のように, 5個の●を2本の区切り線で区切る方法で表現できる.

赤玉が入らない袋があってもよいから, これは5個の●と2本の区切り線を自由に並べることに相当する.

よって, 赤玉5個の分け方は,

$$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{通り}$$

白玉6個の分け方についても同様に,

$$\frac{8!}{6!2!} = 28 \text{通り}$$

よって, 求める入れ方は,

$$21 \cdot 28 = 588 \text{通り}$$

(2) まず, A, B, Cそれぞれの袋に赤玉1個と白玉1個を入れた後, 残った赤玉2個, 白玉3個を(1)と同じ方法で分けて入れればよい.

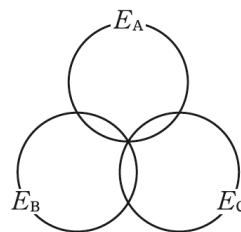
よって, 求める入れ方は,

$$\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 6 \cdot 10 = 60 \text{(通り)}$$

(3) A, B, Cの袋が空であるような入れ方の集合を, 順に  $E_A$ ,  $E_B$ ,  $E_C$  と表すことにする.

Aの袋が空のとき, B, C2つの袋に入れるために赤玉, 白玉をそれぞれ1本の区切り線で分けることになるから,

$$n(E_A) = \frac{6!}{5!1!} \cdot \frac{7!}{6!1!} = 6 \cdot 7 = 42 \text{(通り)}$$



$n(E_B)$ ,  $n(E_C)$ についても同様である.

AとBの袋が空のとき, すべての玉をCの袋に入れることになるから,

$$n(E_A \cap E_B) = 1 \text{通り}$$

$n(E_B \cap E_C)$ ,  $n(E_C \cap E_A)$ についても同様である. また, A, B, Cすべての袋が空になることはない.

以上より, 空の袋があるような入れ方は,

$$\begin{aligned} & n(E_A \cup E_B \cup E_C) \\ &= \{n(E_A) + n(E_B) + n(E_C)\} - \{n(E_A \cap E_B) + n(E_B \cap E_C) + n(E_C \cap E_A)\} + n(E_A \cap E_B \cap E_C) \end{aligned}$$

$$=3 \cdot 42 - 3 \cdot 1 + 0$$

$$=123(\text{通り})$$

したがって、求める入れ方は、

$$588 - 123 = 465(\text{通り})$$

新城門プロジェクト(第5回)

新城門数学模試対策問題

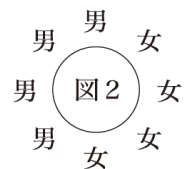
(80分)

※全て第4回までに扱う問題で構成してみました。このようなセットで新城門数学模試を行います。  
合格点は60%以上です。

1

- (1) 多項式 $P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ると $4x-3$ 余り、 $(x-2)(x+2)$ で割ると $3x+5$ 余る。  
このとき、 $P(x)$ を $(x+1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2)  $x=1-\sqrt{3}i$ のとき、 $5x^4+3x^3+22x^2+40$ の値は  である。ただし、 $i$ は虚数単位とする。
- (3) 定義域を $1 \leq x \leq 4$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2a + b$ の最大値が9、最小値が1のとき  
 $a$ 、 $b$ の値を求めよ。
- (4) 3次方程式 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ の3解を $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ とするとき、 $\alpha + \beta + \gamma$ 、  
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値をそれぞれ求めよ。
- (5)  $1000!$ を計算したとき、末尾に現れる0の個数を求めよ。
- (6) 正の整数 $x$ 、 $y$ が $x \leq y$ と $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ を満たすとき、 $x$ 、 $y$ の組 $(x, y)$ を求めよ。
- (7) 9冊の異なる本がある。2冊、2冊、5冊の3つの組に分割する方法は何通りあるか。
- (8) 男女4人ずつ計8人が円形に並ぶことを考える。

右の図2のように男女がそれぞれ固まって並ぶ方法は何通りあるか。





【2】 次の問に答えよ.

$a > 0, b > 0$ とする. このとき,  $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + b\right)$ の最小値を求めよ. またそのときの  $a, b$ の値も求めよ.

【3】 次の問に答えよ.

どんな実数  $x$ をとっても  $x^2 - 3x + 2 > 0$  または  $x^2 + ax + 1 > 0$ の, 少なくとも一方を満足するよ  
うな,  $a$ の値の範囲を求めよ.

【4】 次の問に答えよ. ただし,  $n$ を正の整数とする.

- (1)  $n^2$ と  $2n+1$ は互いに素であることを示せ.
- (2)  $n^2+2$ が  $2n+1$ の倍数になる  $n$ を求めよ.

【5】 次の問に答えよ

A, B, Cの記号がつけられた3つの袋に, 赤玉5個, 白玉6個すべてを入れる場合の数につ  
いて考える. 次の問いに答えよ. ただし, 同じ色の玉は区別しないものとする.

- (1) 空になる袋があってもよいとすると, 全部で何通りの入れ方があるか.
- (2) A, B, Cそれぞれの袋に, 赤玉1個と白玉1個は少なくとも入っているようにする入  
れ方は何通りあるか.
- (3) 空の袋がないようにする入れ方は何通りあるか.