海城生に答えます　～答えの一案～

K. K.

◆ 実数係数の方程式が虚数解をもつとき、その共役な複素数も解であるのはなぜか。

回答

複素数 $z = a + bi$ に対して、$\overline{z} = a - bi$ を共役な複素数といいます。

実数係数の方程式が虚数解をもつとき、共役な複素数もその方程式の解になっています。係数に実数でないものがある場合は、共役な複素数もその方程式の解になるとは限りません。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が虚数解をもつのは、解の公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ の根号の中が負になる場合ですから、根号の前に複号がついていることから分かります。

例えば、$3x^2 - x + 2 = 0$ を解くと $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-23}}{6}$ より $x = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{23}}{6}i, \dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{23}}{6}i$ となり、確かに共役な複素数がペアで解になっています。

3 次以上の方程式については、解の公式が複雑な形をしているため、このように確かめることは難しいですし、そもそも 5 次以上の方程式については解の公式が存在しません。教科書や参考書では、多くの場合はこの事実を説明するのに”共役な複素数のもつ性質”を利用して説明しています。その性質とは、複素数 z, w に対して、

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w} \quad , \quad \overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w} \quad , \quad z = w \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{w}$$

というものです。これを用いると、3 次方程式の場合については、次のように説明することができます。

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が $x = \alpha$ を解にもつとき、

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

です。これより

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{0}$$

よって、

$$\overline{a}(\overline{\alpha^3}) + \overline{b}(\overline{\alpha^2}) + \overline{c}(\overline{\alpha}) + \overline{d} = \overline{0}$$

ここで、$\underline{0, a, b, c, d \text{ は実数であるから}}$

$$\overline{0} = 0 \quad , \quad \overline{a} = a \quad , \quad \overline{b} = b \quad , \quad \overline{c} = c \quad , \quad \overline{d} = d$$

となり、また

$$\overline{\alpha \times \alpha} = \overline{\alpha} \times \overline{\alpha} \text{より } (\overline{\alpha^2}) = (\overline{\alpha})^2 \quad , \quad \text{同様に } (\overline{\alpha^3}) = (\overline{\alpha})^3$$

であるから

$$a(\overline{\alpha})^3 + b(\overline{\alpha})^2 + c(\overline{\alpha}) + d = 0$$

となります。この式は、$\overline{\alpha}$ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解であることを示しています。

4 次以上の方程式についても、同様に説明することができます。