

◆ 円順列は何で $(n-1)!$ になるのか？

回答

一般に、教科書では次のような説明になっています。

A, B, C, D の 4 人が手をつないで円に並ぶ方法は、

図 1 の円の 1 ～ 4 に順番に並ぶ方法が、

$4!$ (通り) … ①

しかし、1 ～ 4 に並ぶ順番が、

A → B → C → D

B → C → D → A

C → D → A → B

D → A → B → C

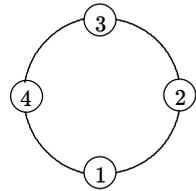


図 1

の 4 つの並び方 (図 2) は、回転すれば同じ並び方になります。

このように回転をすれば同じになる 4 つの並び方を①では違う並び方として数えています。

したがって、実際の並び方 (円順列) は、

$$\frac{4!}{4} = (4-1)! \quad (\text{通り})$$

となります。

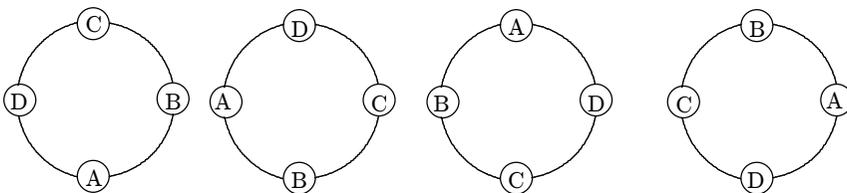


図 2

ここで面倒なのは、「回転をすると同じになるものがある」ということです。

恐らくここがわかりにくいポイントなのではないでしょうか。

では、

「回転を考えずに数える方法はないでしょうか？」

実はあるのです。

例えば、自分の周りを見回してみてください。

机、椅子、パソコンなどがあると思いますが、実はそれらも常に動いているのです。

「え？」

と思うでしょうが、地球の外から見れば自転、公転によって常に動いているのです。

「では、なぜそれが止まって見えるのでしょうか？」

そう、自分が地球上にいるからです。

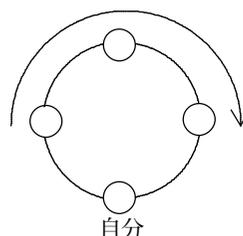
円順列でもこれと同じ考え方をすれば、この面倒な回転を考えずに求めることができるのです。

上の例ならば、自分が4人の中の1人になって輪を作ってみましょう。
そうすれば、自分から見た他の3人との位置関係（左隣り、正面、右隣り）は
回転とは関係なくなります。

そこで、自分以外の3人の並び方を数えれば、

$$3! = (4 - 1)! \text{ (通り)}$$

となるのです。



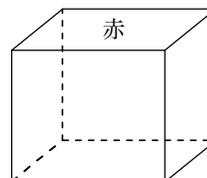
ここまでは4人が円に並ぶ方法でしたが、これを一般的に n 人が円に並ぶ方法とすれば、

$$(n - 1)! \text{ (通り)}$$

となるのです。

では次にこの考え方を使って立方体を赤、青、黄、緑、黒、
白の異なる6色に塗る方法を求めてみましょう。

この問題も、見た目は異なる塗り方でも立方体が回転を
すると同じになることを考えなければいけないところが
面倒なところです。



そこで、さっきと同じように今度は自分が立方体の面の
上、例えば赤の面に乗ってみましょう。

そうすると、今度は、立方体がどんなに回転をしても
自分から見て他の5つの面との関係はいつも同じになる
ので、他の5つの面の塗り方数えればよいことになります。

では、塗り方が何通りあるか求めてみましょう。

まず、裏側の面の塗り方は、赤以外の5色から選べるので

$$5 \text{ (通り)}$$

次に側面の塗り方ですが、側面の塗り方は円順列になる
ので、残りの4色を塗る方法は、

$$(4 - 1)! = 3! = 6 \text{ (通り)}$$

したがって、立方体を異なる6色に塗る方法は、

$$5 \times 6 = 30 \text{ (通り)}$$

となります。

このように、回転をすることで同じものがあられるような問題を解くとき、外から全体を数えるのではなく、並べられるものの中から何か一つに注目をし、そこから見て他の並び方を数えるという方法をぜひ覚えておいてください。