

◆ 積和, 和積の成立する理由が不明, どうやって覚えるか.

回答

とても覚えにくいものなので, すぐに暗記しようとするのは危険だと思います. 導き方をここで紹介しましょう. 下の加法定理 (1)~(4) に関しては覚えているものとします.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4)$$

三角関数の積を和・差に, また和・差を積に直したいときはまず上の4つの式から下の4つの式を作ってしまいましょう.

$$(1) + (2) \quad : \quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (5)$$

$$(1) - (2) \quad : \quad \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$(3) + (4) \quad : \quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (7)$$

$$(3) - (4) \quad : \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (8)$$

上の(5)から(8)を見れば, 左辺が和・差で, 右辺が積であることは一目瞭然ですから, もう本質的にはこれで公式がすべて導けたわけです. ではどのように使うのでしょうか.

例1 $\sin x - \sin y$ を積に直すときは $\sin \square - \sin \square$ の形がある(6)に注目しましょう.

今, $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ とおけば良いのですから, この連立方程式を解けば, $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ となります. これを(6)に代入すると, 以下の公式が導かれます.

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

例2 $\sin x \sin y$ を和・差に直すときは $\sin \square \sin \square$ の形がある(8)に注目しましょう.

今, $\alpha = x$, $\beta = y$ とおけば良いのですから, これを(8)に代入すると, $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$ となります. つまり, 以下の公式が導かれます.

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \{ \cos(x+y) - \cos(x-y) \}$$

世間で和積の公式・積和の公式と呼ばれているものはすべて(5)~(8)からこのような方法で導くことができます. 何度も練習すればそんなに時間をかけずに導けるようになりますから, すぐに覚えようとするのではなく少し練習してみてもいいのではないでしょうか.