海城生に答えます　〜答えの一案〜　　H. U.

◆ 真数はなぜ正なのか．負のときの値はどうなるのか．

回答

前半の疑問を解決するために，まず対数の定義を思い出してみましょう．$a > 0$, $a \neq 0$ のとき，指数関数のグラフより，任意の正の数 b に対して $a^r = b$ を満たす実数 r がただ1つ存在します．この r の値を a を**底**とする b の**対数**といい，$\boldsymbol{\log_a b}$ と表します．また，b をこの対数の**真数**といいます．したがって，真数が正であることは真数の定義から明らかなのです．

次に，後半の疑問に答えましょう.「ついさっき真数は正であると言ったばかりではないか」と思う人もいるかもしれませんが，それは実数の世界でのお話です．対象を複素数まで拡げると新たな世界が拓けていきます！

複素数 $z \neq 0$ の絶対値を r，偏角を θ とすると，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が成り立ちますが，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いることで，z は $z = re^{i\theta}$ と書くことができます．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の底です．さて，複素変数の対数関数 $w = \log z$ は，同じく複素変数の指数関数 $z = e^w$ の逆関数として定義されます．すると，$w = x + iy$ とおくことで，$z = e^w$ より，

$$re^{i\theta} = e^w = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

すなわち，$re^{i\theta} = e^x e^{iy}$ が成り立ち，両辺の複素数の絶対値と偏角が等しいことから，

$$r = e^x, \quad y = \theta + 2n\pi$$

を得ます．ただし，n は整数です．特に，第1式から $x = \log r$ とわかります.（x も r も実数なので，この log は冒頭で紹介した実数変数の対数です.）したがって，$w = \log z$ から，

$$\log z = w = x + iy = \log r + i\theta + 2n\pi i,$$

すなわち，

$$\log z = \log r + i\theta + 2\pi i \times n$$

が得られます．注意として，偏角の取り方が無限個存在するため，複素数の対数は無限個の値を取ります．そこで，絶対値が r，偏角が θ である複素数 z の対数を，

$$\boldsymbol{\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)}$$

で定義しましょう．すると，z が実数のとき偏角が 0 であることから，これは実数変数の対数関数と一致します．これを $\log z$ の**主値**と呼びます.（ただし，これは主値の一般的な定義ではなく，今回の解説のために用いる便宜的な定義です.）

それでは，真数が負の場合の対数の値（主値）を求めてみましょう．特に，真数が -1 のときを調べると，-1 は絶対値が 1，偏角が π の複素数なので，

$$\mathrm{Log}\,(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

がわかります．一般に，真数が負である対数の値（主値）は虚数となります．