数学科だよりVOL④

平成25年11月26日発行

目次

§1. 中１数学Ｂ報告 「平面幾何 Part.1」を上梓して 記念座談会

本校では中２時において、幾何の授業を分割して行っています。これは習熟度別ではなく、学習内容の深い理解と論理を展開する力と表現力、記述力の獲得を目指して、１クラスを単純に２分割するものです。その前段階における中１の２学期は来年度の内容の基盤づくりを開始する時期です。そこで、今回、平面幾何のオリジナル教材を上梓した宮崎教諭ならびに、同科目を担当している柴山、天野両教諭を交えて、この教材を用いての授業についてのあれこれを、学科主任の川崎が聞きました。

公理から始める幾何教材

川崎（以下、司会）：今日は今年度、本校で中１の幾何を担当されている３人の方々に色々とお話を伺いたく存じます。皆さん、よろしくお願い致します。まずは、この２学期から使用を開始されたという宮﨑さんの御著書「平面幾何 Part.1」ですが、この本は、公理から出発して、いわば“手作りの幾何”が味わえる印象を持ちました。本書を著したきっかけを教えてください。

宮﨑：この３月まで６年間、森学習指導部長とコンビを組んで数学を教えていました。森先生はオリジナルの教材を多く出版されていて、まずはその影響が非常に大きいです。加えて、幾何についていいますと、小平邦彦先生の「幾何へのいざない」に感銘を受けたことと、春木先生や小澤先生の作られた諸教材にも大いに触発されまして、今年度、中１を担当することが決まった時点で、折角なので体系立てて幾何を扱ってみたいと思ったのがきっかけです。

司会：なるほど。実際に授業で使用してみた感想はいかがでしょうか。

（宮崎・柴山・天野の三教諭）

天野：正直、最初は中１には難しいかな、と思ったんです。
司会：公理から出発する点が、ですか。
天野：ええ。ところが、案に相違して、生徒たちの反応はすこぶる良いのです。
柴山：そうなんです。私も意外でした。生徒はとてもよく授業を聞いていますね。
宮﨑：私も思った以上に手応えを感じています。
司会：それはうれしいことですね。こういった、小学校時代には経験しなかった学び方に対して、一種、ペダンチックな部分をくすぐるというのはあるかもしれませんね。この本を使用しての成果などは感じられますか。
宮﨑：なにぶん、今学期に始めたばかりですから、目に見える成果というのはなんとも言えません。しかし、生徒が楽しんで取り組んでいますから、末には記述力のアップを期待したいところです。

検事になったつもりで矛盾を暴く？！背理法

天野：さきほどペダンチックと言われましたが、例えば私の授業でこんな印象を受けたことがあるんです。
司会：と言いますと？
天野："背理法"を扱った時なんですが､…
司会：本書はまことに早い段階で、「背理法」、「対偶法」、「転換法」が登場していますね。
天野：ええ。で、背理法を扱った時に、「なるほど！」という声があちらこちらで聞こえてきまして。

司会：ほぉ。

天野：すごく、背理法の証明法に魅力を感じるようなんです。

司会：それはまたどういうことでしょうかね。

天野：はい。私もなんでだろう？と考えてみたんですが、どうやら、「矛盾」を暴く、ということに、ある種、検事さんにでもなったかのような気になるんじゃないかと…。

司会：なるほど。これは面白いですね。その気持ちは分かる気がします。

柴山：私のところでも、背理法は生徒に評判いいですね。

宮崎：実は、こんなことをやってみたんです。背理法、対偶法、転換法のうち、自分の一番好きな証明法はどれか？と挙手をさせてみましたら…

司会：みましたら？

宮崎：背理法が全体の約２／３でトップ、残りは対偶法で、転換法はゼロでした。

柴山：それはうなづける結果ですね。私のところでもそんな感じになるんではないでしょうか。

天野：鉄は熱いうちに打て、といいますが、背理法をはじめとしたロジックは高校になってからよりも、中１くらいに紹介するのが丁度いいのかもしれませんね。

司会：皆さんの、現場を踏まえたご意見を伺っているとそう思いますね。

宮崎：それは確かに低学年なんだからと手心を加えることは必要です。しかし、加え過ぎないことも大事なことのように思いますね。

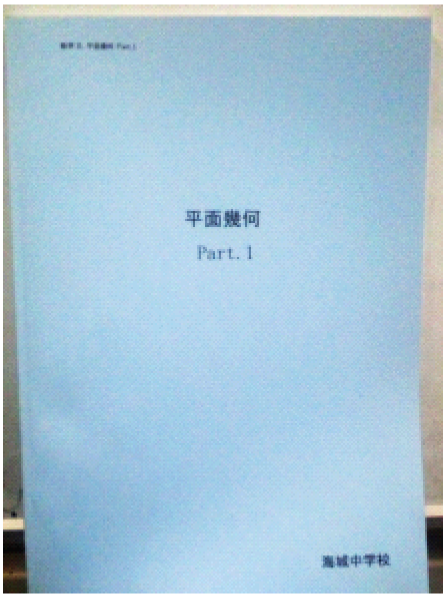
手段が目的になってしまわないような素材選び

司会：これは勇気づけられる話ですね。と申しますのは、先日、公立高校の先生とお話しする機会がありましてね、背理法に背を向けてしまう生徒は少なくない、とのことでした。（背理法は）中学で教えられることは稀なようで、まぁ、これは中学生には難しいであろうという判断からかもしれませんが､それが高１で､多くの場合は“$\sqrt{2}$が無理数であることを示せ”で出会うようで、そこではなんとなく過ぎてしまい勝ちだというんです。

宮崎：そのお話については我が意を得たり、と思うんです。と、言いますのは、本書の背理法の項目には当初、「素数が無限個あることを証明せよ」も入れる予定でいたのです。

司会：あれも高校の数Ｉの教科書で扱われることが多いですね。それは本書には入っていませんね。

宮崎：ええ。と、言いますのは、背理法を学ばせる第一段階において、$\sqrt{2}$や素数の件は不適であろう、と。



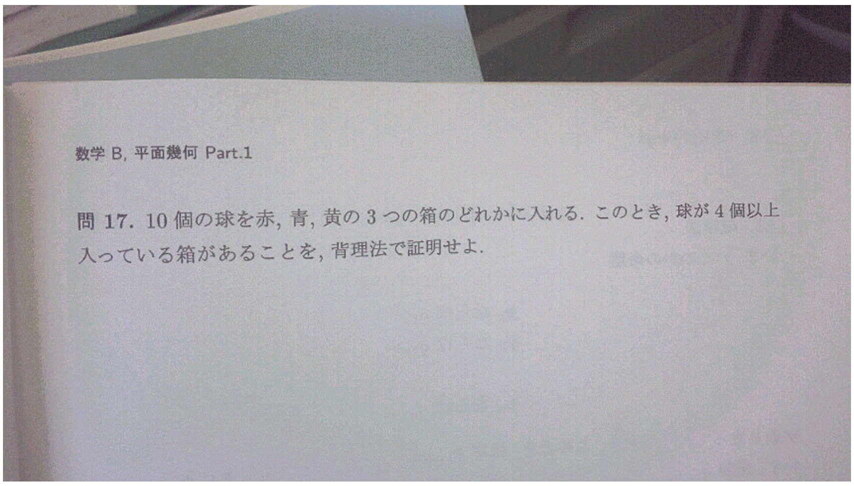
（本書の表紙）

司会：興味深いお話です。それはなぜでしょうか。

宮崎：これらは、背理法を用いているとはいうものの、その道すがらに整数の重要性質が使われますね。と、なると、その整数の性質のところで「おやっ？」と思った生徒は止まってしまうんです。

司会：はぁはぁ、なるほど。つまり、目的は背理法を学ばせることで、その手段として整数の性質が出てきているのだけれど、手段が目的にまで“出張ってくる”、主役を張りかねないというわけですね。

宮崎：その通りです。そういうわけで、本書には、背理法そのものを理解させるためのシンプルな好例、これは東京書籍さんの数Ｉの教科書から引用したものですが、扱っています。


数学 B, 平面幾何 Part.1

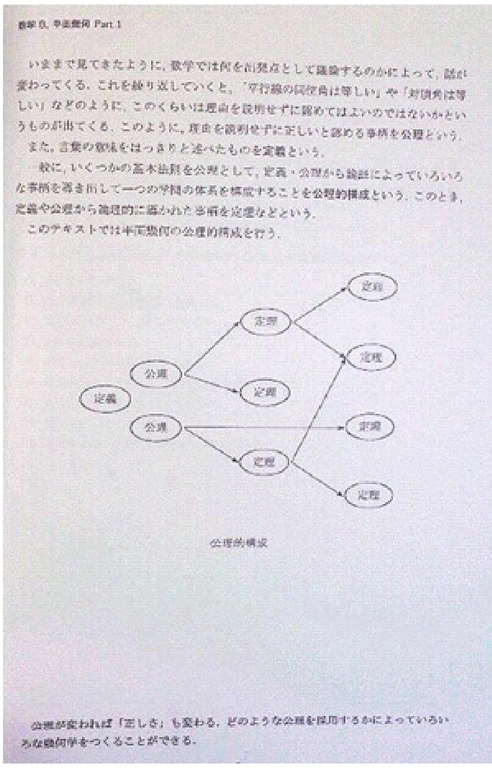
問 17. 10 個の球を赤, 青, 黄の 3 つの箱のどれかに入れる. このとき, 球が 4 個以上入っている箱があることを, 背理法で証明せよ.

（背理法の導入に利用している問題）

司会：いや、実は本書は意欲的な内容を扱いつつも、選ばれている問題は、禁欲的と言ってもよい印象を受けました、こういった自主教材における作り手の「こだわり」と独善性について伺おうと思っていたのですが、図らずも宮﨑さんの意向を知ることができました。
天野：そのあたりの兼ね合いというか、匙加減が我々の見識というか、センスでしょうね。
一同：（大きくうなずく）

公理は授業で決める！？

司会：それは教え手にとって常に意識せねばならないことですね。とかく、「こだわり」を見せすぎると、ややもすると生徒不在で、教員自身が「すっきりする」、まぁ、ここでいうすっきりする、という意味は、例えば、自分自身が中高生のときにモヤモヤしたまま終えていた事柄が、大学や大学院、そして現場で学ぶことによって体系立てて理解できた、実に悲願十余年にしてのことであった、などということを指すと思っていただければよいのですが、送り手の意欲と、受け手の意欲が一致すれば最高でしょうが、そうそう一致するわけもないですからね。「いやぁ、なにか知らないけれど、このおじさん、えらく張り切っているなぁ」なんて生徒に思われかねない。
一同：（爆笑）
司会：いえ、笑いごとでなく、自戒しないといけないと思っているのでございますよ。
柴山：自己満足じゃまずいですもんね。
宮﨑：まぁ、私はこの本の著者なわけですが、もう、極力そういった（独善的な）雰囲気を授業では出すまいと思ってやっています。本書も、構想当時は、もっと大胆なことを考えていまして、例えば、生徒と僕で公理を決めよう！それをスタートとしよう、と。
一同：おお！
宮﨑：とはいうものの、クラス毎に公理が違うことになるだろうから、それで授業をするのもつらい、と。
司会：それはそうでしょうね。で、どのあたりで妥協されましたか？
宮﨑：そうですね、たとえば、教科書では三角形の合同条件は公理としていますよね。
司会：ええ。
宮﨑：でも、我々はその手前までに（公理を）とどめよう、と。
司会：それだって、十分に斬新でしょうね。
宮﨑：それと、本書を用いた授業、それも特に中１の諸君に対して大切にしたいことは、「小学生の頃、直感的に理解していたことを論理的に考えられるようにする」ということです。



数学 0. 平面幾何 Part.1

いままで見てきたように，数学では何を出発点として議論するのかによって，話が変わってくる．これを繰り返していくと，「平行線の同位角は等しい」や「対頂角は等しい」などのように，このくらいは理由を説明せずに認めてはよいのではないかというものが出てくる．このように，理由を説明せずに正しいと認める事柄を公理という．

また，言葉の意味をはっきりと述べたものを定義という．

一般に，いくつかの基本法則を公理として，定義・公理から論証によっていろいろな事柄を導き出して一つの学問の体系を構成することを公理的構成という．このとき，定義や公理から論理的に導かれた事柄を定理などという．

このテキストでは平面幾何の公理的構成を行う．

公理的構成

公理が変われば「正しさ」も変わる．どのような公理を採用するかによっていろいろな幾何学をつくることができる．

（公理、定義、定理の相関の模式図）

司会：これは本書中にメッセージとして書かれていましたよね。どこだったかな…

宮﨑：１６ページです。このあたりの問題を彼らは「ああ、そうなのか！」と言いながら奮闘しています。

司会：なるほど。まぁ、なんと申しましょうか、この前まで小学生だった彼らが、ある種、「アカデミックな学び」の楽しさを感じているのではないでしょうかね。ちょっと、背理法に戻るのですが、中１にとっては対偶法も背理法は、どちらも結論を否定している証明方法に見えると思うんです。

宮﨑：ええ。

司会：そうすると、対偶法と背理法の違いってあるんですか？同じじゃないですか？という質問はないでしょうか。

天野：それは今のところないですね。

柴山：私のところもないですね。

宮﨑：まだそこまではないですね。

司会：では、仮にそういった質問があったとしますと、どう答えられますか？

柴山：それは考えておく必要がありますね。

天野：そうですね。

宮﨑：こんな風に答えますかね。

司会：お願いします。

宮崎 :対偶法は使えるのは($\overline{Q} \to \overline{P}$ に対しての $\overline{Q}$ だけなわけですが､背理法ですと､ $P \cap \overline{Q}$ から矛盾を導くわけですからいろいろ使えるわけですよね。そういった違いで説明すると思います。

柴山：それはいい説明ですね。

本書は時代の反逆児？

司会：さて、こういったコンセプトで作られた本書ですが、一方で、これは先日、ある出版社さんと話をしたことなのですが、これまでは公理論的アプローチを重んじた作り方を幾何の本に対してしてきたのだけれども、どうも現場で使用する場合に芳しくない、と。そこで、直感を重視したつくりに代えたところおかげさまで好評を得ている、ということなんです。仮にこれを“現在の世なみ”と考えると、本書はいわば「逆コース」という印象もなくはないのですが、これに関してはご意見ございますか。

宮崎：一理あるでしょうね。しかし、小平先生の御著書にも同様のことが書かれていることなんですが、直感で理解できる公理ならば、ロジカルに扱っても中１生であっても問題ない、というのが授業の裏付けを以ていえることだと思うんです。

柴山：本書を用いたとしても、別に公理一辺倒というわけではないですからね。ただ、なんでも直感で押していくというのは望ましくないと思いますし、私自身の伝えたいことは本書を用いた方法で、宮崎先生に大いに共鳴しています。

天野：私も同意見です。

幾何教育に対するモットー

司会：かく語る、意気軒昂なお三方なわけですが、幾何教育に対してのモットーなどはおありでしょうか。

天野：とにかく図形を楽しむことです。恐らく、計算よりも楽しめるのではないか、と思うからです。それと、計算ですと、授業の際、その方法を一方的に示すことに終始しがちなわけですが、図形ですとインタラクティブに行えますんでね。

柴山：それは特にそう思いますね。それだけに、一問一問をみんなで考えるように心がけています。

宮崎：巷間、難問と言われるものにはいくつかの種類があると思うのですが、その場限りの面白さを狙った問題は、なるべく初期段階においては扱わないようにしています。

司会：なるほど。とかく、中学入試の申し子みたいな生徒は、パズル的難問が解けてこそ数学の力だ、と思いがちな感じもありますが、そうではないのだ、と。

宮﨑：はい。ヒラメキも大事ですが、それ以上に、理詰めで結論が出る、そしてそれがテーマにかなうものである、そんな問題をセレクトして授業をすることをモットーにしているつもりです。

司会：すると、“ラングレーの問題”などは…

宮﨑：楽しむという観点ではよい素材でしょうが、それができたから幾何ができる、できないから幾何ができないという類のものではないと思います。

司会：私自身、こう伺っていますと、思わず小膝を叩く意見ばかりなのですが、そんな皆さんに、好きな幾何の定理をお伺いしたいのですが、如何でしょうか。

天野：私は「三平方の定理」ですね。幾何の根幹をなす定理であり、そしてなによりもあれほど多くの別証が出されていて、素晴らしいな、美しいな、と中学生の時に思いまして、その感激は今も新たですね。

柴山：私は「デザルグの定理」です。以前から命題自体は知っていたんですが、なぜそんなことを考えたのだろう？という思いをずっと抱えていまして。で、今年の夏の講習で…

司会：本校の夏期数学リレー講座ですね。第４回目の今年は「現代幾何の広がり」と題して行いましたものね。私と柴山先生は初日にご一緒して…

柴山：そうでした。その準備のために、幾何をたくさんの方向から考えてみたところ、三角柱と水平線の関係から、デザルグの定理は自然な定理なんだと自分の中で腑に落ちました。

司会：あれはまぁ、名解説だったわけですけれども、レジュメが年内に出る予定（この学科ＨＰでご覧いただける予定です）ですからこの記事をご覧の皆様には是非、ご一読頂きたく存じます。

柴山：丁度今、その作業の大詰めです。それにしても、いまさらながらに思うことですが、幾何はいろいろな考え方をすることができる点に面白さを感じます。

宮﨑：私は定理ではないですが、「掛谷の問題」が好きですね。

司会：おお！あれは確か「長さ 1 の線分を一回転させることのできる図形の中で，面積が最も小さくてすむものは何か？」でしたっけ。

宮﨑：ええ。凸図形の中で、でしたね。

司会：有難うございます。で、あれは何でしたっけ、侍の槍が云々という…

宮﨑：そうです。どうもできすぎた話で伝説めいていますが、よいエピソードですよね。

司会：どんなものでしたっけ？うろ覚えでして…

宮﨑：確か、侍ははばかりにも槍を持っていった、と。で、はばかりで戦うことになったら、そこで槍を振り回さなければならない、ということから思いついた問題とされているようですね。あの問題は面白いですね。

数学を学ぶ中学生の君へ

司会：さて、種々、お伺いしてきたわけですが、最後に、数学を学ぶ中学生に対してのメッセージを頂けますか。

柴山：「なぜ？」、「どうして？」という思いを常に持って数学に取り組んで欲しいと思います。問題を解けるようになることはもちろん大事ですが、それだけではいけないと思います。数学が得意な生徒でも、「２次方程式の解の公式を導け」という問題で、解と係数の関係を駆使する生徒が多発した、とう事例を聞いたことがあります。「なぜ？」を意識することは社会に出てからも大事なことだと思います。是非、中学数学を通じてその習慣を身に着けてほしいと思います。

天野：「好きこそ物の上手なれ」という言葉がありますが、数学をまず楽しむ、好きになることが大切です。つい最近ですが、東京理科大学に「数学体験館」という施設ができました。そこでは身の回りにある数学を体験できたり、教科書で学習した公式や定理について、道具を使って学べるそうです。数学が好きな人はより好きに、数学があまり好きではない人は、好きになるきっかけになるかもしれません。もしよかったら訪ねてみてはいかがでしょうか。

宮﨑：本書のあとがきに予定していたものの、結局は収録しなかった原稿があります。しかしこういう機会なので紹介することで私のメッセージに代えたく思います：

いくつかの基本法則を公理として、その公理からさまざまな定理を導き出し、体系的に理論を構築していくことは、論理的思考力を養ううえでとても大切なことである。本書では、公理を選択する上で

・直感的にわかりやすいこと
・意識的に使うことができること
・論理体系の構成が容易であること
・できるだけ独立していること
・矛盾していないこと
・できるだけ厳密にすること

などに重点をおいた。例えば、順序の公理や連続の公理などは無意識に使ってしまうものであり、これを公理の中に組み込むと、厳密にはよいかもしれない。しかし、中学生にとっては程度を超えており、煩雑でわかりにくい。ゆえに、本書では次の約束のもとで話を進めている。

『点、線、面（平面）という言葉は既知のものとし、普通公理は煩雑になるので、 省略し認めるものとする。また、「交点」「線分ＡＢの延長」「∠ＡＢＣの内部」など混乱することがない言葉は改めて定義していない。その他、順序の公理や「任意の線分の垂直二等分線は唯一つ存在する」などの存在・一意性の定理なども扱っていない。これらは図を見れば明らかなことであり、公理や定理として意識して使うには

敷居が高く、程度が高すぎる厳密性は学校の授業では無意味だと考え割愛した。したがって、本書で

・定義されない

・公理として採用されない

・定理として証明されていない

ものであっても、（言っていることは矛盾しているかもしれないが）直感的にわかることは常識的に解釈して構わない』

また、平行線の公理はできるだけ遅く導入したほうが、非ユークリッド幾何学でも成り立つ定理が多くなる。数学的にはそのほうが良いのだろうが、「中学生が学ぶテキスト」という観点から早めに導入した。したがって、三角形の内角の和は２∠Ｒであるなどの証明は、数学を生業とする人からすると拍子抜けかもしれない。しかし、中学で公理系を学ぶ生徒にとっては十分に厳密的であると思われる。

したがって、本書では「数学的に厳密である」ことともに、「中学生がこのテキストは厳密的だとおもってくれる」ことを大切にしている。

司会：いやはや、今日はいささか、座談会に名を借りて、司会の私にとっての絶好の勉強の場となったようで恐縮しております。本書は中２の１学期一杯を使って完成させるとのことですが、その中途での生徒の様子や興味深い事例などありましたらまた教えてください。ともあれ、今後とも、中学生が楽しんで勉強できる幾何の授業、そして教材作成を期待しております。今日はお三方、どうも有難うございました。

一同：有難うございました。

（平成 25 年 11 月 15 日　本校学習指導部にて）

§２．　エッグドロップ甲子園にマス・フェスタトリオが入賞

昨年および本年のマスフェスタへ参加し、海城＆ＹＳＦＨ数学交流会でも活躍中である高２の井上、恩田、増田の 3 君が、東京大学柏キャンパスで行われた「エッグドロップ甲子園 TODAI EXPERIENCE 2013」で 3 位に入賞しました。

その模様を、高２学年通信・第 137 号より転載します。発行者の高２学年主任の内田教諭に感謝申し上げます。

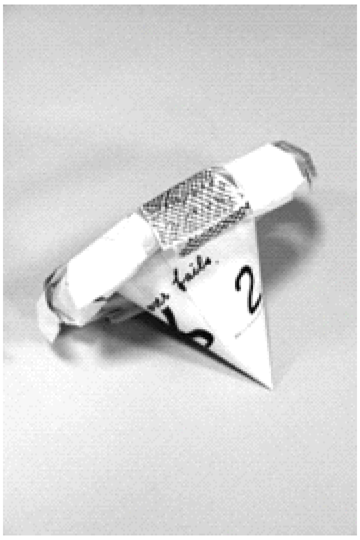
まずは、チーム代表の井上君の参加報告をご覧ください。

エッグドロップ甲子園 参加報告　　　　　　　　　　海城高校２年 井上 立之

エッグドロップ甲子園とは？

エッグドロップ®とは、ある一定の高さから落とす生タマゴを紙で制作したプロテクターで保護し、割れないようにする科学実験の１つです。米スタンフォード大学の機械科１年では以前は必修の実験でもあり、全米各地の主な大学で広まっている科学実験です。
エッグドロップ甲子園は日本での開催にあたり、当基金が従来の楽しいだけの理科実験で終わることなく、様々な観点から見直し、ゲームフィケーションの導入、文理関係なく楽しみながら物理などの科学知識を身につけつつ、競技性の高い理科実験科学イベントに昇華、開発しました。
また技術立国日本は、「ものづくり日本」でもあります。単なる理科実験だけではなく、ものづくりの魅力を感じてもらえるような楽しいサイエンスイベントです。
また「科学」や「ものづくり」などの通常のイベントやコンテストは競技者の活躍する姿を応援するだけでしたが、エッグドロップ甲子園は応援するみんなも参加者の１人となる日本初かつ唯一の参加型総合頭脳競技です。
その参加方法が“エッグプロテクター総選挙”です。お気に入りのエッグプロテクターや応援したいチームのエッグプロテクターを見つけて、投票しましょう！
あなたの１egg（１票の意）が優勝への重要なカギとなります！！！
ものづくりキッズ基金ホームページ(http://monodzukurikidsfund.org/eggdropkoshien/)より

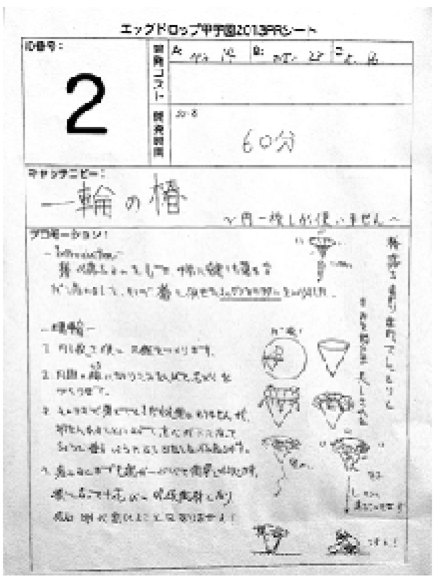
エッグドロップ甲子園は去年までは京都の立命館大学衣笠キャンパスでのみ開催されていましたが、今年からは東日本大会（本大会予選？）のような形で東京大学柏キャンパスでも開催され、これに僕らを含めて２チームが海城から出場しました。参加チームは全33チーム、総勢なんと99名でした。 全33チームともなると、プロテクターは多彩でしたが、僕らのものはかなり単純なつくりです。



（海城チームのプロテクター）

使う部品は直径 22 センチの円１枚のみ！それを丸めて(母線)：(直径)＝3：1 の円錐にし、底面の円周を 8 等分する形で切り込みを入れ、それを外側に向かってカールさせます。そして適度な比率＆重心の高さになるように調整して、卵を搭載するだけで完成です。ちなみに、機体には願掛けとして海城の校章を描き、さらに“It falls, but never fails.”と書きました。

この案は恩田君が僕らがプロテクター試作に取りかかってから比較的早い段階に提唱し、他にもいろいろと試作したもののこれに勝るものができず、直前に改良を加えた上で本番でも使うことになりました。



（海城のＰＲ文）

実際に落下させると、少し回転しながら円錐の頂点を下に向けたまままっすぐ落下し、頂点が潰れることによって衝撃をある程度吸収してから横に倒れ、カールさせた底面がクッションとなって横からの衝撃を吸収し、卵を守ります。落下前と落下後のものを掲載します。

落下直後のプロテクターと恩田君

落下成功後の１枚

☆順位の決定方法

卵を割らないという必要条件の他は、３つの項目により採点されました。

１つ目はコスト。これは用意された紙のうち、残った紙の量で判断されます。ちなみに紙はグラシン紙（トレーシングペーパーにようなもの）、方眼紙（コピー紙より少し薄）、画用紙（オレンジ）の３種類あり、僕たちは方眼紙のみを使って作りました。コストは全チームの中で多分３番目に安かったはずです。

２つ目は制作時間。60 分～90 分の範囲でプロテクターを制作するんですが、60 分経過後の 30 分は使わなければ使わないほど評価が高いです。僕たちは構造が単純だったのもあり、50 分程度で全て終わりました。（記録は 60 分）

そして３つ目は人気投票。これは参加チームに各３票、現場にいる見学者に各１票が渡され、さらに facebook にアップロードされた写真に一般の方々が投票し、票数が多いチームは幾分かコストが下がり有利になるというものです。ページの不具合でスマホからの投票ができなかったのもあり、得票はそれほど多くありませんでした。

☆メンバーの感想

（井上君）文化祭も終わり、何か他に面白いことがないかと思っていたある日、このエッグドロップ甲子園の存在を知り、面白そうだったのでとりあえず隣の席の恩田君に話したところ、参加を快諾、あと一人どうしよう→このメンツだったらあとは増田君かな、というかんじで急遽結成されたこのチーム。技術の井上、発想の恩田、万能の増田と偶然にも三拍子揃っていたのがよかったのでしょう、見事に賞を持って帰ることができました。

僕も自分なりにいくつかの案を家で作って試してみたものの、傷のつかない卵はひとつとしてありませんでした。恩田、増田両君がいなければこの３位という結果はおろか、卵を守ることすらできなかったと思います。この大会を通して「誰かと協力して作業をする」ことの大切さを本当に痛感しました。エッグドロップ甲子園 2013 は僕にとって貴重な経験になったと思います。「３位は、海城高等学校の井上さんたちのチームです！」と呼ばれたときの達成感は最高でした！

（恩田君）　僕は数学が好きなのですが、数学が直接世の役に立つことはそうそうありません。なので、開発、マーケティング、物理の３要素が入った今大会と僕はほとんど無縁でした。しかしいざやってみると、卵を割らないように色んな手を模索して善い手を探すことは、まさに数学の面白さと直結していました。皆で協力できたのも魅力的だったと思います。３位嬉しいです！

（増田君）　今回、３位という名誉ある賞をいただいてうれしい限りです。様々な実験をし、試作をつくり試行錯誤したことはそれ自体楽しく、良い経験だったと思います。

その中で思ったことのうちの一つが、「地球、すごい！」です。実験の中で卵が次々と無残に割れていく姿を見るにつけ、「卵よ、そう簡単に割れるなよ」との思いを強くした一方、なんでもひきつけてやまない地球の頼もしさに、一人感動したというわけです。
しかし、「いつどんな時も、卵の側に立ちます。」との言葉を胸に、我々のチームはひらひらと舞い落ちる花をモチーフにエッグプロテクターを作り上げ、「一輪の花」とのキャッチコピーのもとに入賞することができました。実際に会場に出向いて、ほかのチームの様々な発想にも触れられた、貴重な機会でした。この機会を与えてくださったすべての先生方とクラスメイトに感謝します。スクランブルエッグはおいしい。

（表彰状）


（受賞直後）

§3.　海城＆ＹＳＦＨ　第６回数学定期交流会報告

11 月 16(土)の午後２時より、「海城＆YSFH 定期数学交流会」が行われました。

今回は、第４回からご参加の広尾学園様に会場をご提供頂きました。

さて、この交流会もはや第６回目。俗に、「３号雑誌」なる言葉あり。曰く、意欲的に創刊しても、ほとんどの雑誌は４号発刊の坂が登れずに廃刊していくことを言い表したものだそうですが、本会はそれとは無縁とばかりに、その倍の開催数となり、気勢はあがる一方です。今回のプログラムは以下の通りでした。

第６回　海城＆ＹＳＦＨ　定期数学交流会プログラム

平成 25 年 11 月 16 日　14：00～　　於・広尾学園　６Ｆ　サイエンスラボ

開会

（第１部　海城学園 ）

１、「ナポレオンの定理について」高２前田君

２、「数学の森に参加して・後編(ヒマワリのらせんについて)」高２恩田君

３、「数理の翼に参加して・後編」高１妹尾君

（第２部　ＹＳＦＨ）

１、　　パスカルの三角形とフィボナッチ数列の拡張（その後の発展）高２藤井さん

２、マレーシア研修旅行報告　高２村野さん、紙谷さん

３．漸化式で解くｋ倍角の公式（後編）　高２岡本さん

（第３部　広尾学園）

１．対称群上の Bigrassmanian 置換の個数を数える　高１杉山さん、角田さん、子安さん

２、伝染病の数理　高１　岩永さん，高橋さん，津山さん

３、オイラーの陪関数 伊藤さん、宍倉さん、西堀さん、岡田さん（高２）

（第４部　自由発表）

記念撮影

閉会

では、順を追って各研究内容をご紹介致しましょう。

第１部の本校の発表では、前田君が、まず最初に「ナポレオンの定理」、すなわち

> 三角形（どのような形状でもよい。この面積をSとおく）Tをひとつ固定し、その各辺を１辺とする３つの正三角形を、もとの三角形の外側に描く場合（この面積をS_Oとおく）と、内側に描く場合（この面積をS_iとおく）の２通りで考える（いずれも正三角形となる）とき，$S = S_O - S_i$が成り立つ.

が述べられました。同君は、Tとして３辺の長さが３：４：５の直角三角形の場合についてこの定理が成り立つことを実際に示し、次いでTが正三角形の場合は内側の三角形が１点につぶれてしまう（すなわち、$S_i = 0$となる）ことから、なるほどこの定理が成り立つ、と紹介されました。さっそく証明にチャレンジしてみよう、という参加者の声があり、聴衆の興味を喚起させることに成功していました。なお、「ナポレオンの定理」についてはその一部が、啓林館発行の「フォーカスゴールド数Ⅲ」にコラムとして記載されています。

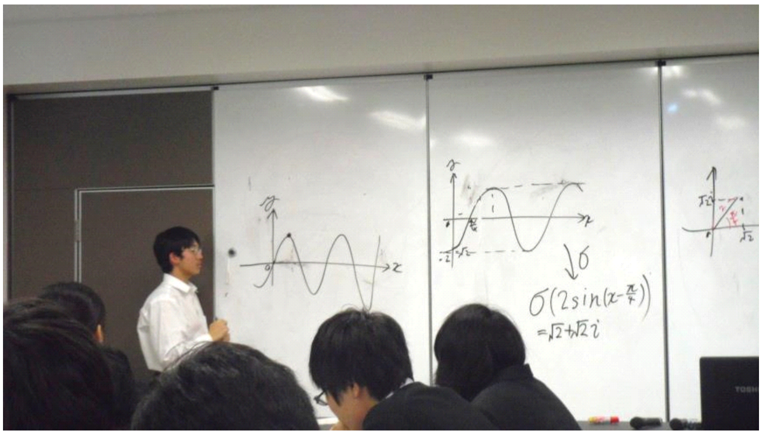
（前田君）

恩田君と妹尾君はともにオリジナルの研究で、前回(第５回)の講演の続きでした(内容は
http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/math_news_003.pdf
を参照ください)。

（恩田君）

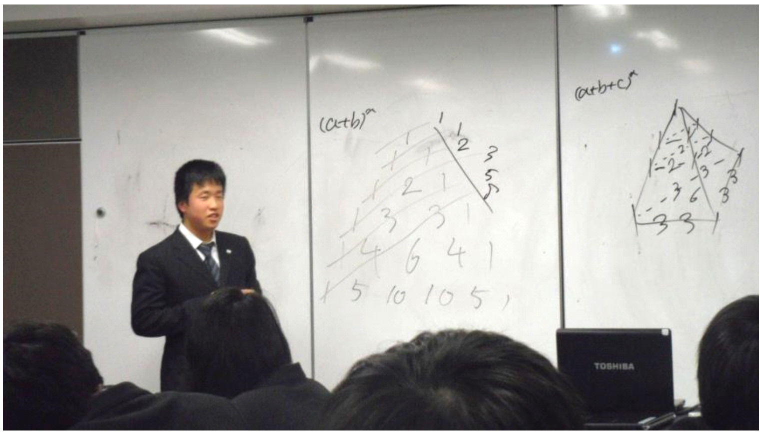
殊に恩田君の内容は、円周のある種の分割により、その分割点が最もまばらになるのは如何なる場合か？という問に答えるものであり、これが殆ど全てのヒマワリの種子の配列に同じであることが興味深いものでした。

妹尾君は正弦関数の集合から複素数平面へのある写像を定義し、それについての興味深い実例を紹介されました。今後はその関数の集合でどのような数学が展開できるかを考え、それに適した距離や位相を入れられるかを建設したい、と語っていました。



（妹尾君）

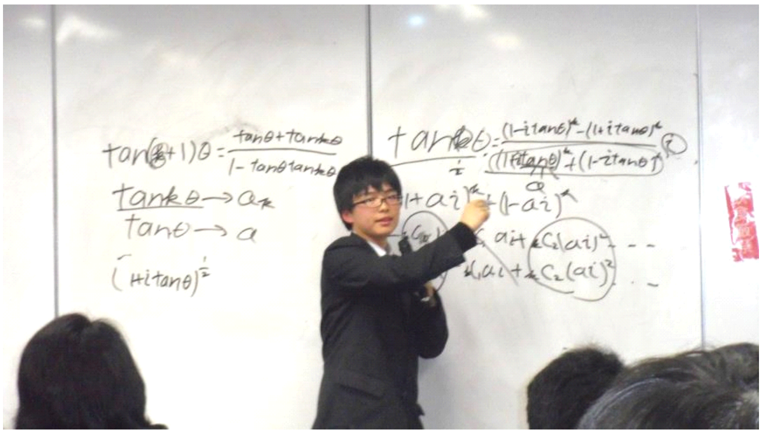
第２部では、藤井さんと岡本さんが、前回の研究についての進展（藤井さん）と疑問点（岡本さん）について述べられました。



（藤井さん）

藤井さんの研究にあっては、多項定理の展開式におけるある種の係数和の一般型を導出され、聴衆の耳目を集めました。

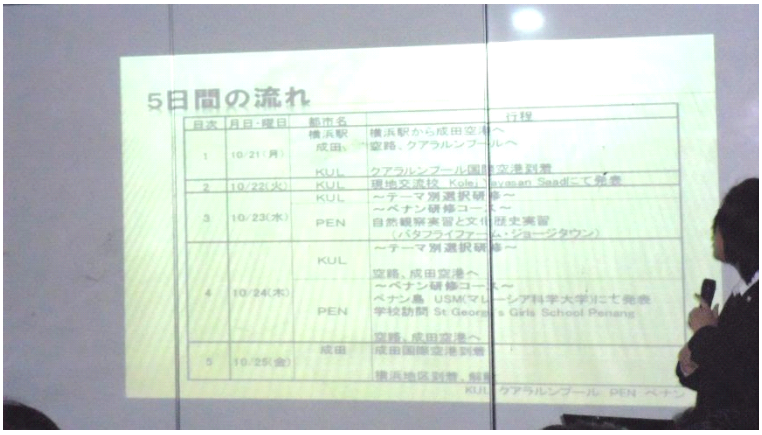
また、岡本さんからは、tan（kθ）におけるkが有理数の場合の考察が述べられ、これは例えば、$w=\sqrt{z}$のリーマン面の話となる興味深いものでした。岡本さんの研究は、横浜市大の先生にも披露され、評価を得たそうで、今後の更なる進展が見込まれます。



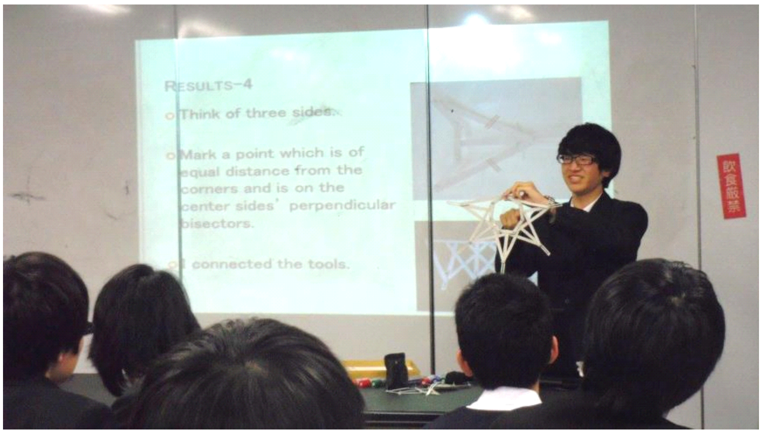
（岡本さん）

最後に村野さんと紙谷さんよりマレーシア研修報告がありました。同校では、修学旅行として、マレーシアのペナン島にあるマレーシア工科大学で、自身の研究発表を英語でプレゼンテーションするそうです。村野さんからは旅行の概要が解説され、紙谷さんからは現地で行った英語でのプレゼンテーションが再現されました。修学旅行の理想的な一形態として、今後さらに注目を集めることは必至でありましょう。

因みにマレー語で「アラマァ」は日本語訳も「あらまぁ」だそうです。



（村野さんによる旅程解説）



（紙谷さん）

第３部では、まず杉山さんと角田さんが、対称群上の Bigrassmanian 置換の定義を具体例とともに丁寧に述べられました。その定義および頂いたレジュメを参照して、３次対称群の場合の Bigrassmanian 置換を計算してみると以下のようになります：

（Bigrassmanian 置換の定義）

$x \in S_n$（n次対称群）に対し，

$D_L(x) := \{s_i \in S_n \mid x^{-1}(i) > x^{-1}(i+1)\},\ D_R(x) := \{s_i \in S_n \mid x(i) > x(i+1)\}$ とする.

このとき，$\#D_L(x) = \#D_R(x) = 1$ を満たす x を Bigrassmanian 置換という.

ここに，s_i は隣接互換，すなわち，S_n において，i 番目と j 番目を入れ替える互換 t_{ij} に対し，特に $j = i+1$ となるものを表すものとする.

（例）３次対称群 S_3 で考えてみる：

	x	$\#D_L(x)$	x^{-1}	$\#D_R(x)$	判定
①	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	0	×
②	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	1	○
③	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	1	○
④	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	1	○
⑤	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	1	○
⑥	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	2	×

∴　S_3 の Bigrassmanian 置換の個数は４

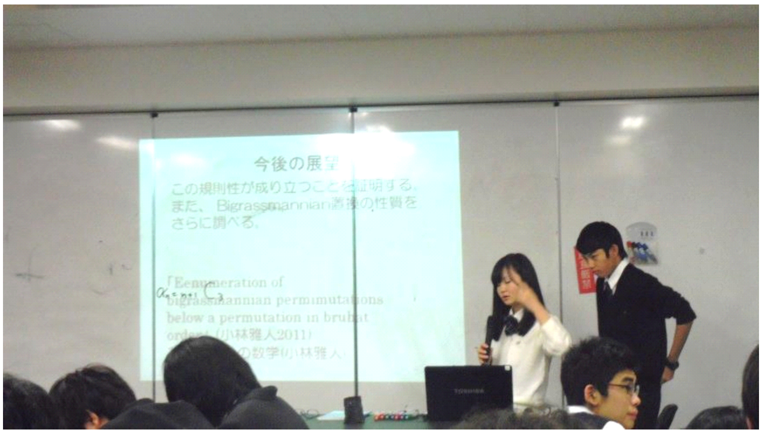
なお，杉山さんらは n=６の場合までを丹念に手計算で求められ、以下の結果を得ました：

n	1	2	3	4	5	6	…
B 置換数	0	1	4（上記）	10	20	35	…

この結果を基に、n 次対称群の場合の Bigrassmanian 置換の個数を ${}_{n+1}C_3$ と予想されました（杉山さんは漸化式による．角田さんは階差数列による）．

この講演に興味をもった本校の恩田君は、翌日、早速この予想に対する証明をつけたそうで、近々に発表する予定です。このような活発な研究が本交流会のよさのひとつと申せましょう。

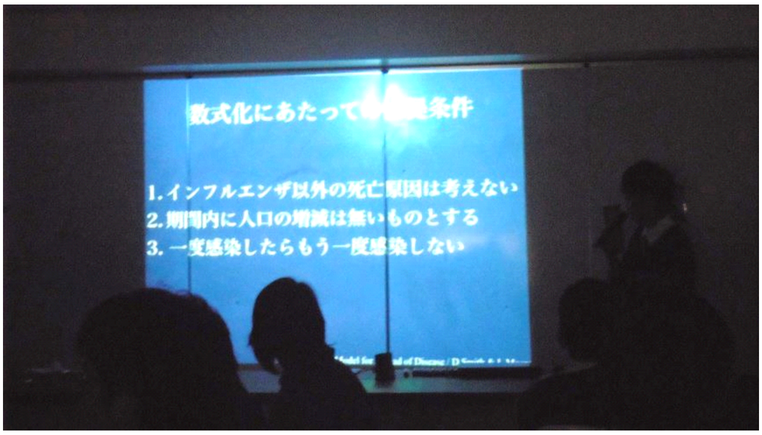
なお、杉山さんは渡米中、n=５と６の計算に没頭されていたそうで、編集子にその研究ノートを公開されました。努力の跡が手に取るように分かり、感銘を受けました。



（角田さんと杉山さん）

現象数理チームの岩永さん、高橋さん、津山さんは、2009 年の我が国のインフルエンザ罹患者数を素材に求めた微分方程式を用いた数理モデルについて講演されました。

とかく、付帯条件の設定が煩雑になる話題ながら、岩永さんらは数値実験を十分に行われて、均衡的数値を得ました。それによれば、この年は、13 人に 2 人が予防接種をすればインフルエンザは流行しないという実に興味深い結果に到達されました。



（現象数理チームの発表）

最後に数論チームの伊藤さん、宍倉さん、西堀さん、岡田さんは、オイラー関数およびシグマ関数のある種の拡張として新しい関数を定義(これを「オイラーの陪関数」と命名された)されました。概要をご紹介いたしましょう。

（オイラー関数の定義）

正整数 n に対して、1 から n までの正整数のうち，n と互いに素なものの個数をオイラー関数といい，$\varphi(n)$ と表す．（例）$\varphi(12) = 4$

☆特に，m, n が互いに素なら $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ が成り立つ．

～積のオイラーはオイラーの積～

（シグマ関数（約数関数とも）の定義）

正整数nの約数xのd乗の総和をシグマ関数といい，$\sigma_d(n)=\sum_{x|n} x^d$ で表される．$d=0$のときはnの約数の個数を表す．また，$d=1$のときはnの約数の総和を表す.

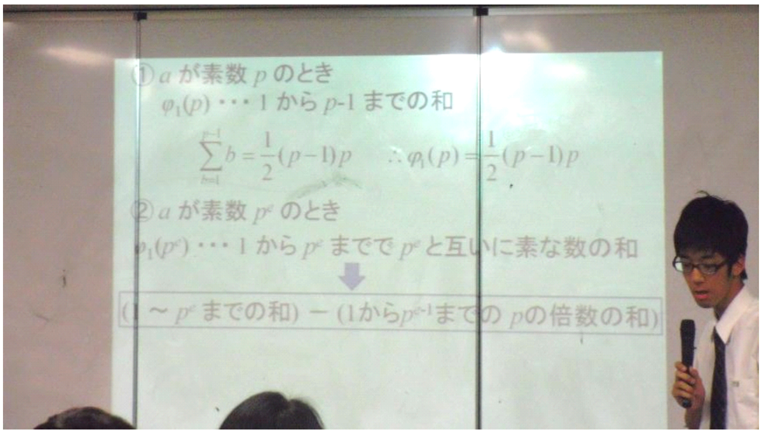
（例）$\sigma_3(6)=1^3+2^3+3^3+4^3=252$

☆特にm,nが互いに素なら$\sigma_d(mn)=\sigma_d(m)\sigma_d(n)$が成り立つ.　～積のσはσの積～

すると、いきおい、１からnまでの整数のうち，nと互いに素である数の総和を$\varphi_1(n)$を考えることは自然なことですが，これについては、m,nが互いに素であっても，$\varphi_1(mn)=\varphi_1(m)\varphi_1(n)$は成り立ちません

（反例）$\varphi_1(2)=1, \varphi_1(3)=1+2=3, \varphi_1(6)=1+5=6$

この不便さを解消するために，正整数nに対して，$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$（素因数分解）のとき，$\tilde{\varphi}(n):=\varphi(n)/2^s$を“オイラーの陪関数”と称して定義され、その性質の一端を発表されました。今後の進展が楽しみです。



（数論チームの発表）

とりわけ、広尾学園数理チームは、さきに高３の塩谷さんがさきに愛媛大学で行われた数学会で発表され、後に続くべく奮励されているそうです(この日は、塩谷さんの講演風景の録画も放映され、聴衆の関心を集めていました)。

（集合写真）

さて、熱心な発表の数々により、質疑応答の時間がほとんどなくなりましたが、最後に、さきに「エッグドロップ甲子園」で銅賞に輝いた本交流会の常連でもある本校の井上君、恩田君、増田君（詳細は本誌§2をご覧ください）のうち、この日は井上、恩田両君により、エッグドロップが再現され、見事、卵は割れずに面目を施し、拍手大歓声のうちに散会となりました。

（井上君が卵を放った瞬間）

ともあれ、参加者の皆様ならびに種々のお心遣いを頂きました広尾学園の堀内先生はじめ諸先生方、誠に有難うございました。

§４．明治図書「数学教育」12月号の特集記事に寄稿して

～小澤教諭に聞く～

昭和 41 年創刊以来、この 12 月号で 54 巻 12 号という伝統を誇る明治図書発行の「数学教育」に数学科の小澤教諭の“確率”に関する記事が掲載されました。

そこで、同氏に記事に関連した諸々を聞いてみました。

川崎：記事を拝読しまして、私は常日頃から小澤さんの確率を教える際のこだわりを伺っていますから、それがとても良い形で、しかも簡明に誌面に現れているのでいいなぁ、と思いました。

小澤：これはどうもありがとうございます。

川崎：そもそも、今回の寄稿の経緯を教えてください。

小澤：数学科の学期末の教科会で「談話会」として、各自が自由にテーマを選んで講演してますでしょ。

川崎：昨年度から開始したものです。

小澤：それで、今年の 3 月に私が担当しまして。

川崎：“高校数学における「試行」の「独立」について”というタイトルでしたね。

小澤：ええ。その講演録を数学科のＨＰにおいてあります。

（http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/danwakai130314.pdf でご覧いただけます）それを明治図書さんがご覧になって、原稿依頼が来ました。

川崎：そうでしたか。

（明治図書「数学教育」2013 年 12 月号）

小澤：見ていらっしゃる方はいるもんだな、と思いまして。

川崎：そうなんですよね。と、いいますのは、今年に入りましてから、「おやっ？」と思うようなところから学科ＨＰについての記事や評価を頂くことが少なくないのです。リレー講座然り、小澤さんのように談話会のこと然り。9 月でしたか、7 月から始めた「海城生に聞きました　～数学，ここがわからない～」について、北関東のさる教育関係者から評価を頂きまして。

小澤：有難いことですね。

川崎：全くです。ところで、いつ頃記事の依頼がありましたか。

小澤：8 月の上旬でした。

川崎：なるほど。さて、詳細は本誌をご購読頂くとして、本稿の概要を教えてください。

小澤：タイトルは「格子状の道の通り方」でして、中２用の記事なんです。

川崎：といっても、本誌は生徒が読むというより…

小澤：指導者ですね、主な読者は。なので、中高の確率の定義にある「同様に確からしい」という部分にスポットを当てて、指導する場合の留意点と、それをよく反映していると思われる素材として経路問題を取り上げました。

川崎：なるほど。ともすると、「同様に確からしい」というのはあまり深く考えずに、半ば“決まり文句”的に素通りしてしまう生徒が少なくないように思います。

小澤：はい。それを懸念して、本稿を綴ったというわけです。

川崎：なるほど。本稿を通じて伝えたいことを教えてください。

小澤：確率の素材は身近なものが少なくないですよね。

川崎：サイコロ然り、カード然り、…

小澤：その分、なんとなくできてしまうこともありうるかもしれません。これでは数学にならないので、ここはしっかり教える側が背景を知らなければならないと思いまして。最も伝えたいことはその点でしょうか。

川崎：同様に確からしい、という点で、本稿には収めなかったのだけれども、面白い事例があれば教えてください。

小澤：え～と、そうですね…。あっ！時代劇でですね。サイコロ博奕のシーンで、２つのサイコロを使う博奕で、片方のサイコロを噛んだら鉛が出てきた、と。

川崎：ええ（笑）

小澤：で、「あっ！さっきから片っ方ばっかり１がでていておかしいと思っていたら、こんなところに仕掛けがあったんだな、このイカサマめ！野郎どもやっちまえ！！」と大乱闘になる。

川崎：ええ（笑）

小澤：ところが、この時点で大乱闘になるのはおかしい、と。

川崎：なるほど。もう片方が正常なサイコロなら、出る目は…

小澤：1－1，1－2，1－3，1－4，1－5，1－6 だから…

川崎：目の和が偶数の「丁」が３通り，目の和が奇数の「半」が３通りで、これらは同様に確からしいから博奕としてはイカサマではない、と。

小澤：ええ。人生、無駄に暴れちゃいけません。

二人：(爆笑)

川崎：授業なんかでその例は紹介されるんですか？

小澤：ええ、導入で。でも、笑いませんね。

川崎：一通り確率学習が済んで、何回か痛い目にあった生徒ならおかしみが分かるかもしれませんね。

小澤：苦労はするものです（笑）

川崎：ところで、小澤さんは本校赴任（今年で 10 年目を迎えられた）以来、確率を教えたのは何回ですか。

小澤：2 回ですね。

川崎：生徒はできますか？確率。

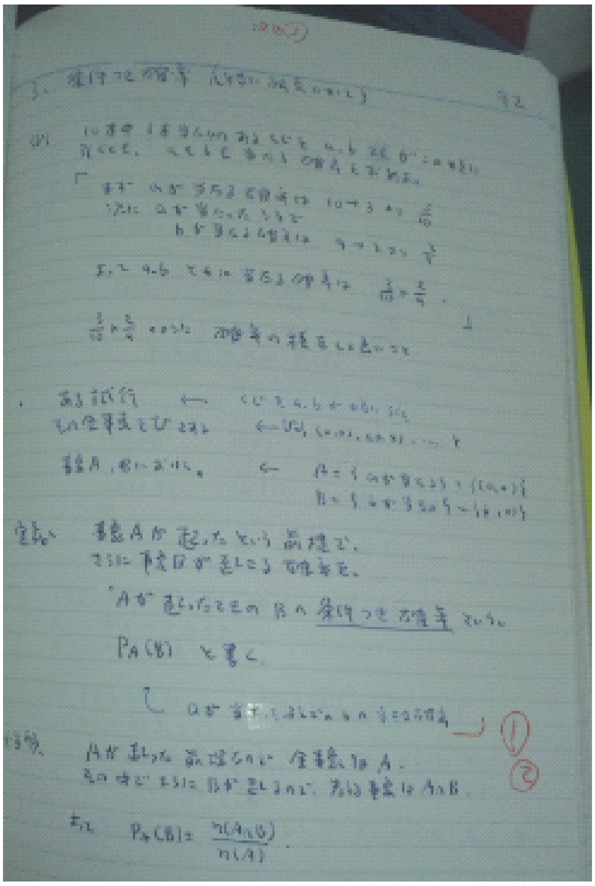
小澤：そうそうできないですね。

川崎：導入部分ですと、どんな疑問が出されますか？

小澤 :2 つのサイコロでいえば､1－2 と 2－1 の区別をなぜつけるのですか､という類です｡｡

川崎：はぁはぁ。まさに本稿のテーマですね。

小澤：ここをしっかり伝えないといけませんね。



（小澤教諭の授業用準備ノート～「条件付き確率」の導入～）

川崎：おっしゃる通りです。私もこの質問は受けたことがありまして。曰く、質問した生徒は 6×6＝36 通りが同様に確からしく出現するのではなく、（１－２と２－１を区別しない伝で）21 通りが同様に確からしく出現するのではないか、それで確率も考えるのではないか、というのです。まるでパスカルとシュバリエドメレの故事です。

小澤：三百五、六十年来の筋の良い質問ですね（笑）

川崎：全くです。で、2 つのサイコロをたくさん振らせて、その統計的な確率が、分母を 21 にした場合と、36 にした場合のどちらが近いか、で納得させたことがあります。

小澤：なるほど。

川崎：ところで、今回、是非小澤さんにお伺いしたかったのは、確率は、これまでは何と言いますか、数学の鬼っ子的なところが無きにしも非ず、で。

小澤：ええ。

川崎：どういう点で、鬼っ子かといいますと、数学ができる生徒だからといって、必ずしも場合の数や確率ができるわけではないし、かと思うと、場合の数や確率はできるのに他はどうも…という生徒が少なくない、という意味なんですが。この原因やいかに、ということなんです。

小澤：業者の模擬試験などでその傾向が強いですね。もちろん、これが原因の全容だ、というのは分かりませんが、一端はこんなところにあるかな、というのがありまして。

川崎：伺いましょう。

小澤：これは生徒に聞いた事例から推測することなんですが、数学が余り芳しくない生徒でも、解ける解けないは別として、場合の数や確率は比較的軽装備で手がつく、と。なので、他の問題は捨てて、全部を数え上げるとか、なんとしてでもこの問題は確保したい、と。

川崎：はぁはぁ。

小澤：これに対して、数学ができる生徒は、場合の数や確率はワンオブゼムに過ぎないですから、数え上げるような泥臭いことはせずに計算で押してしまう傾向がある、と。そういうことじゃないかと思うんです、一端ですがね。

川崎：なるほど。これは大変に示唆に富んだ話だと思うのです。と、いいますのは、もれなく数え上げることができるというのは、まことに大きな数学の力ですよね。

小澤：おっしゃる通りです。

川崎：もう解ける問題はこれしかないんだ、という諦めの境地（笑）に達したあとに、こういった大きな数学の力で救われる。一方、やはり小才が利くだけでは真の理解が得られない、と。面白いものですね。

小澤：できる生徒の多くが口にする「確率は出した答えに自信が持てない」に対するひとつの解決策は、こういった泥臭さを身につけよ、ということだと思います。

川崎：どうも、近頃、「数学はセンスだ」みたいな風潮無きにしも非ず、ですが、センスはあるに越したことはないわけですが、あるがために、策士策に溺れてはならない、と。地道な作業ができるかどうかというのも、数学の大きな力があるか否か、に関わるということを強調したいですね。

小澤：そして、できれば諦めの境地に達する前に悟ってほしい、と（笑）

川崎：全くです（笑）さて、最後に、新課程において統計が数Ⅰで必修となりました。高校教育における統計学習の重要性が否が応でも増そうというものですが、現状、確率と統計が別個になっている生徒も少なくないと思います。

小澤：そうでしょうね。

川崎：そんな生徒に一言お願いします。

小澤：端的に言えば、「起こる前が確率、起った後が統計、そして、その統計をもとに確率を考える」という具合に、両者は連鎖しており不可分です。別個に扱うべからず、ということです。

川崎：なるほど。

小澤：用語にも表れていますよね、このことは。期待値は別名、平均値ですが、なるほど、「期待」は起こる前にするもの、「平均」は起った後のデータで計算する、という具合です。

川崎：問題文で、「期待値（平均ともいう）を計算せよ」などとありますが、これまた決まり文句として素通りしかねないところですね。そういった説明ですと、なるほど合点が行きます。今日はどうもありがとうございました。小澤さんの益々の健筆を期待しております。

（11 月 19 日　本校・数学科職員室にて）

§５．数学科短信

①広尾学園数学科と相互授業見学交流

「海城＆ＹＳＦＨ・定期数学交流会」でご一緒している広尾学園数学科と授業見学交流を致しました。

（広尾学園森先生と本校森学習指導部長）

まず、9月24日に、本校学習指導部長の森教諭と数学科川崎が、広尾学園のインターナショナルコースの授業見学のため、お伺いしてまいりました。

見学させて頂いたのは、中２と中３の数学の授業でした。これらは、外国人の先生により英語で行われており、しかもテキストも日本の教科書を英訳されたものを使用されており、大変に勉強になりました。何よりも、生徒の皆さんが礼儀正しく、明るいのが印象的でした。種々お世話頂きました、インターナショナルコースの植松先生と、数学科の簗場先生に篤くお礼申し上げます。

また、11月8日には、広尾学園の森先生が本校へ来校され、中３と高２の授業を見学された後、進路指導室にて数学教育全般について談論風発致しました。

今後とも、両校数学科の友好の灯を大切にしたく思います。

②数学の森 in Kyoto に本校2年の恩田直登君、2年連続で選ばれる

審査課題の提出により、未来の数学者として相応しい能力をもつ高校1年生、2年生が全国から50名のみ選抜されて行われる京都大学主催の「数学の森」。本校からは、海城＆YSFH定期数学交流会でも活躍中の恩田直登君が2年連続で選ばれました。恩田君は、昨年度はこの「数学の森」へ参加して銅賞を獲得したことをはじめ、「数理の翼・大川セミナー」にも選ばれ、また、SSHマス・フェスタへの参加、第11回日本フィボナッチ協会研究集会(http://www.h7.dion.ne.jp/~nakagawa/workshop11.html）で講演し、代数幾何ミニ研究集会(http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/fsakai/symp2013.pdf)でも講演するなど目覚ましい活躍を続けています。同君の更なる能力の向上が期待されます。

③今夏のリレー講座講義録公開迫る

今夏行われた「第4回夏期数学科リレー講座～現代幾何学の広がり～」の講義録は年内には数学科のＨＰでご覧頂ける予定です。なお、②でご紹介した「数学の森」の審査課題が、リレー講座初日で扱った内容と重複しており、実にタイムリーでありました。

「数学の森」審査課題問題

多面体X（すなわち、各面が多角形であるような図形）を考える．X 上の頂点v にたいして，v を共有するすべての多角形の（vにおける）内角をすべて足し合わせたものをθ_vと置き、$K_v = 2\pi - \theta_v$のことをv における曲率とよぶ．曲率K_vをX のすべての頂点にわたって足し合わせた数Kについてどのようなことがいえるだろうか？

例：Xを正４面体ABCDとする．頂点Aは正３角形ABC, ACD, ADBに含まれている．各正３角形のAにおける内角は$\pi/3$なので $\theta_A = \pi/3 + \pi/3 + \pi/3 = \pi$．したがって$K_A = 2\pi - \theta_A = \pi$である．同様に$K_B = K_C = K_D = \pi$なので$K = K_A + K_B + K_C + K_D = 4\pi$となる．

④海城生に聞きました ～数学，ここがわからない～ 好評掲載中

7月より開始している本企画、現在の回答は第４号まできております（年内に第5号迄の掲載を予定)。本校の数学教育の一端をご覧いただけるかと存じます。なお、アンケート結果は、http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/mori20130718.pdf へ、最新の回答は、

http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/kotae-math_004.pdf

へ掲載してございます。ご一覧いただければ幸いです。 （数学科だより VOL④ 了）