微分積分誕生の歴史

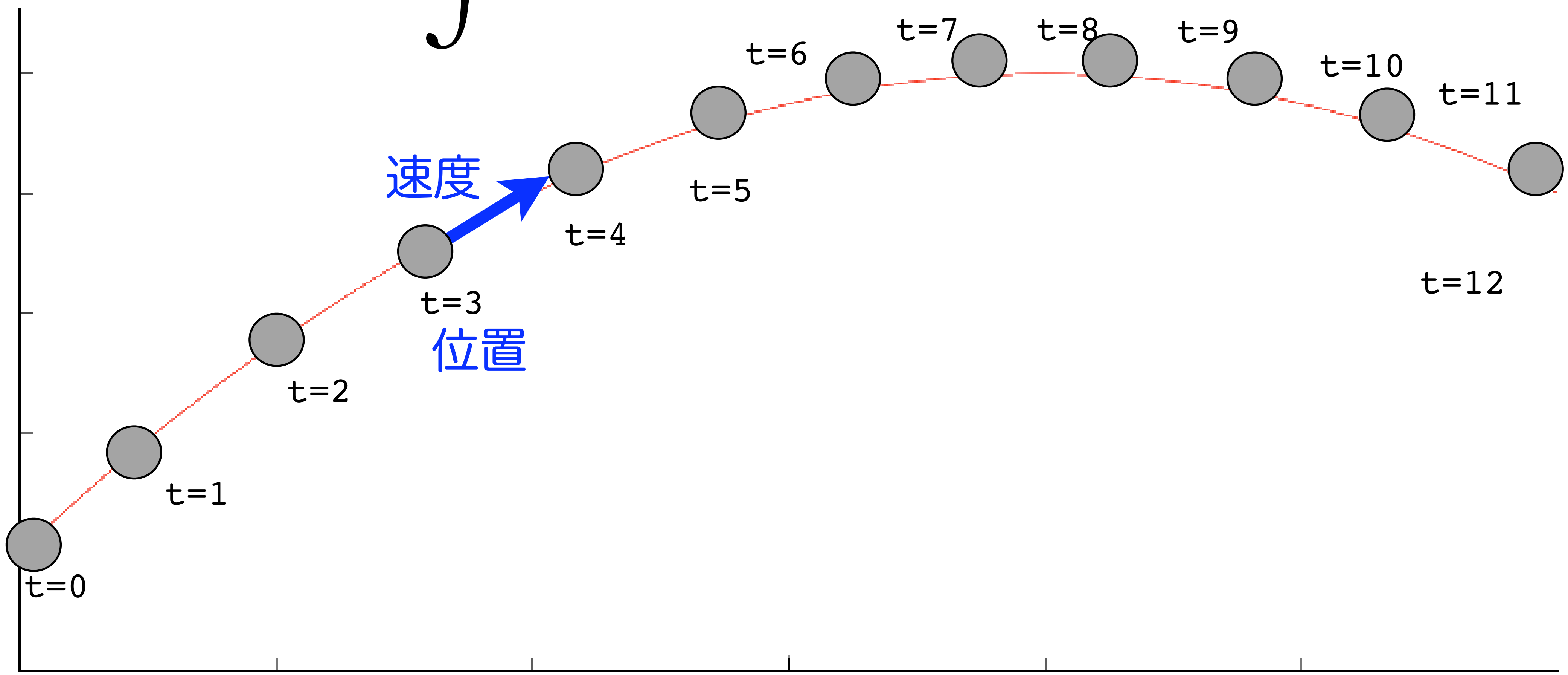
１６６６年１０月に向けて

微分とは？積分とは？

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}$$

$$\text{位置} \xrightleftharpoons[\text{積分}]{\text{微分}} \text{速度}$$

$$\int \overrightarrow{v}\, dt = \overrightarrow{r}$$



1. 年表

B.C.500
ツェノン　逆理
ヒポクラテス　円積問題
デモクリトス　原子論
プラトン　定義化

B.C.400
エウドクソス　区分求積法
メナイクモス　円錐曲線

B.C.300
ユークリッド　原論
アルキメデス　取り尽くし法

B.C.200
アポロニウス　円錐曲線論

A.D.1600
ケプラー　葡萄酒樽の新幾何学
ガリレイ　無限小量
フェルマー　区分求積
カバリェリー　不可分の幾何学
ウオリス　無限算術
パスカル　短冊形求積理論

ニュートン　微分積分学
ライプニッツ　微分積分学

２．古代ギリシャでは

アルキメデス (Archimedes)

B.C.287 - 212

シシリー島シラクサ

我に一つの支点を与えよ。さすれば地球を動かして見せよう。

ヘウレーカ！

円周率の計算、円の面積、球の表面積

わが円を踏むな！

円周率の計算

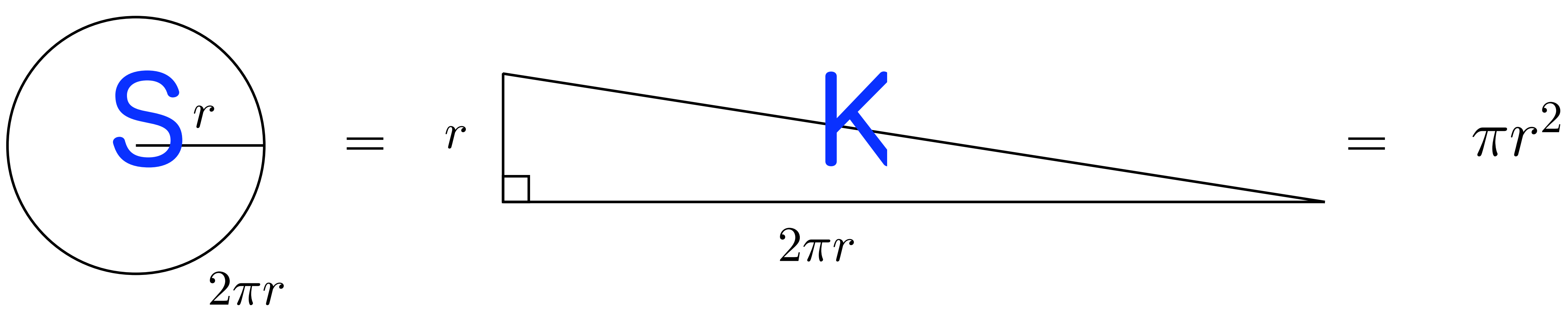
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3.14084\cdots \qquad\qquad 3.142857\cdots$$

アルキメデスの「円の測定」について

円の面積の計算

円の面積は、直角をはさむ2辺の長さが円の半径と円周の長さに等しい直角三角形の面積に等しい。



証明の方針

円の面積を S 、直角三角形の面積を K とおく。
証明すべきは S = K であるがこれを背理法で示す。
つまり S ≠ K を仮定して矛盾を導く。

一見、無限の操作をしているようだが、証明の構造は背理法。

背理法は、事実がわかっているときに使える証明方法。

事実の発見と、証明が分離している。

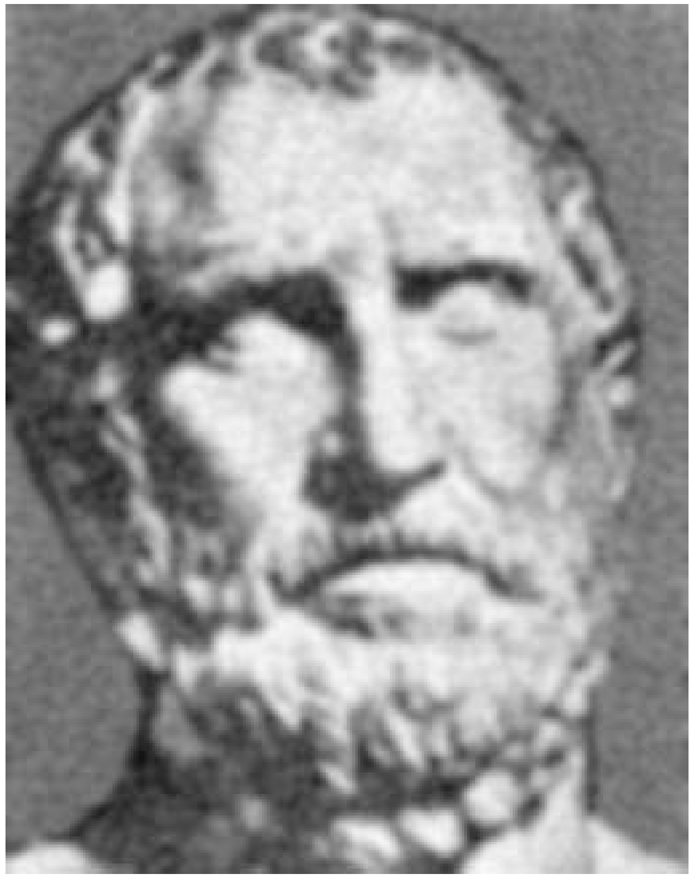
では、そもそも事実はどのように発見されたのか？
また、なぜ、発見のアイデアを証明にしなかったのか？

古代ギリシャ人の無限に対する考え方

ツェノン (Zeno)

B.C.490？- 425？

南イタリアのエレア



逆理（パラドクス）

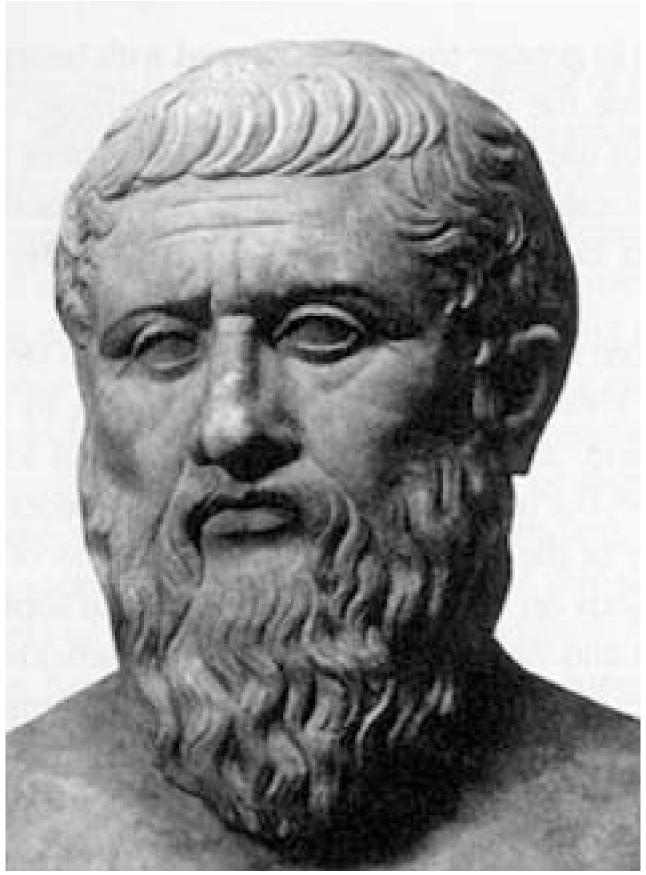
アキレスと亀

飛んでいる矢は止まっている

古代ギリシャ人の考え方

定義を明確にし、
論理的に議論する。

無限を回避する。



プラトン (Plato)
B.C.427 - 347　アテネ

パラドクスを生み出す可能性のある、
無限・動的・変化するものを避け、
有限・静的・不変なもののみを議論の対象にする。

無限を避けて、背理法で証明しよう。

事実の発見には無限を使っている
かもしれないけど・・・・

アルキメデス

その後、
中世ヨーロッパでは、数学的発展はなかった。

１２世紀ルネッサンス

学問分野における古典復興

３．微分積分発見前夜

積分と微分は別々に発見され、
発展していった。

①積分

ケプラー (Kepler)

1571 - 1630　ドイツ

葡萄酒樽の新幾何学 (1615)

ケプラーの３法則 (1619)

①惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。

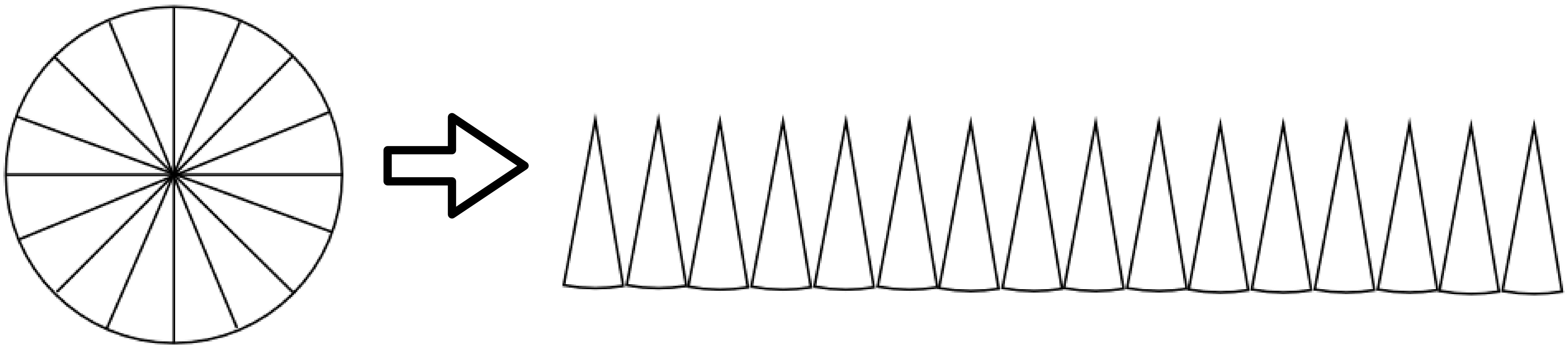
②惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である

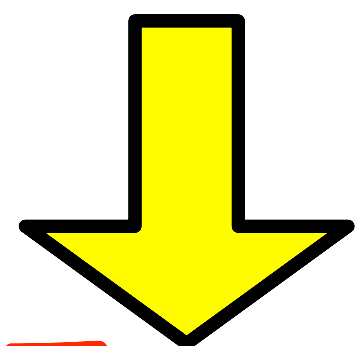
③惑星の公転周期の2乗は、軌道の長半径の3乗に比例する。

チコ・ブラーエ

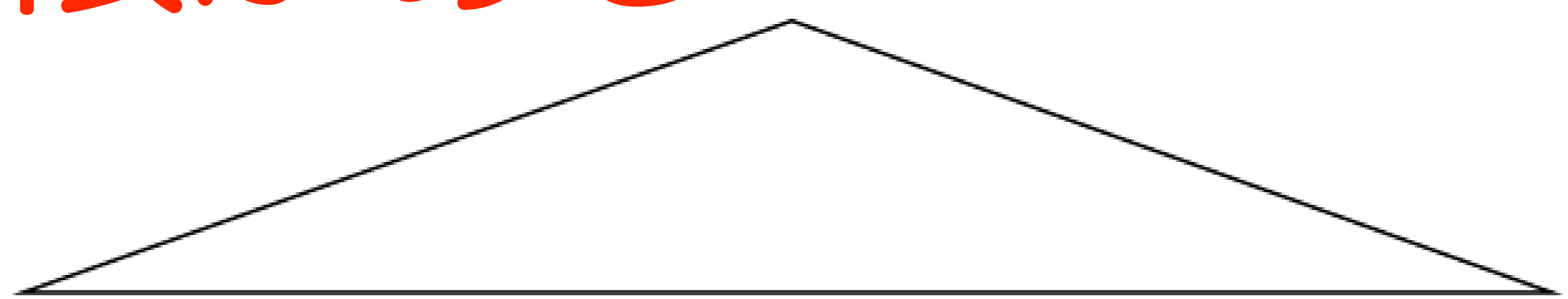
1542 - 1601

円の面積　＝円周の長さ×半径÷２





ここに無限がある



三角形の面積＝底辺の長さ×高さ÷２

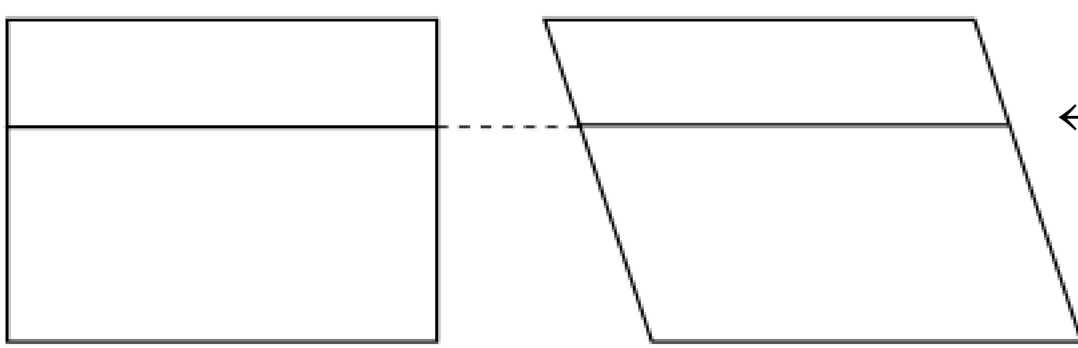
カバリェリー (Cavalieri)

1598 - 1647　イタリア

不可分の幾何学 (1635)

アルキメデスの取り尽くし法と
ケプラーの無限の考え方を発展させた

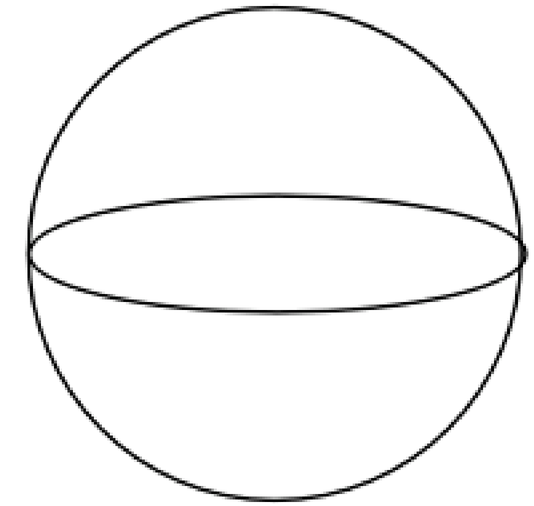
カバリェリーの原理



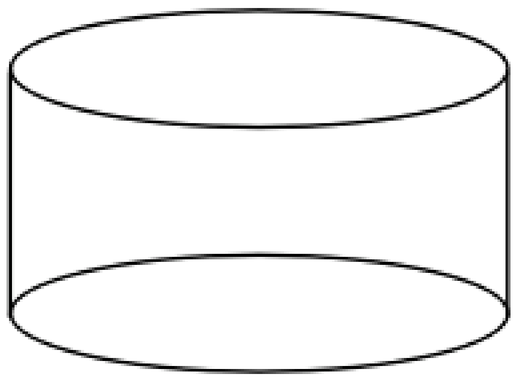
←同じ高さで切った線分の長さが等しければ、
全体の面積も等しい。

カバリェリーの原理の応用

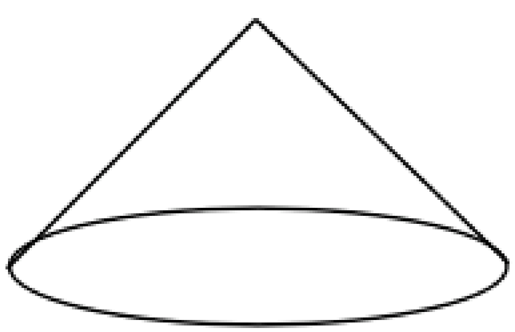
球の体積の計算



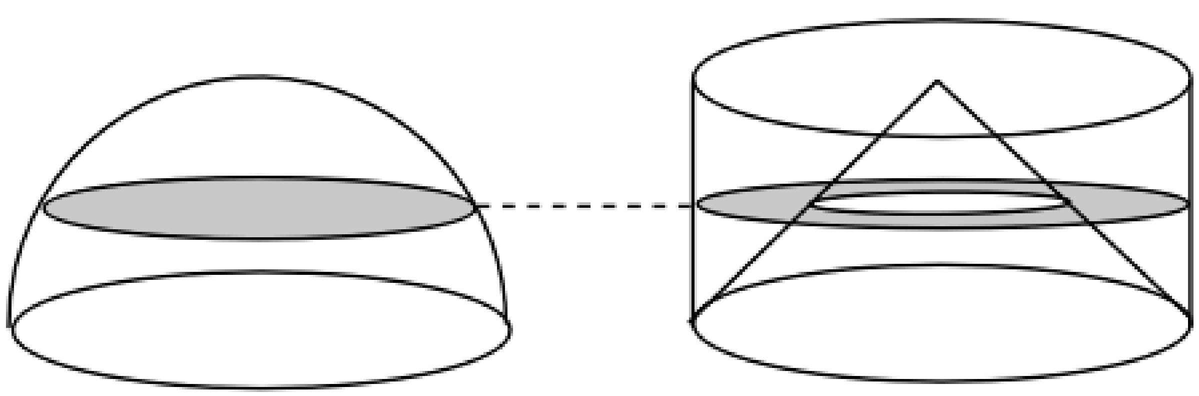
$$\frac{4}{3}\pi r^3$$



$$\pi r^2 \times r = \pi r^3$$



$$\frac{\pi r^2 \times r}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$$



←同じ高さで切った断面の面積が等しい。
よって体積も等しい。

ツェノンのパラドクス
「飛んでいる矢は止まっている」の解答

時間という線分を作っているのは、瞬間という点ではなく、微小時間という線分。

微小時間では矢は止まることなく飛んでいるので矛盾はない。

②微分

フェルマー (Fermat)

1601 - 1665　フランス

フェルマーの定理

$$x^n + y^n = z^n$$

ワイルズが

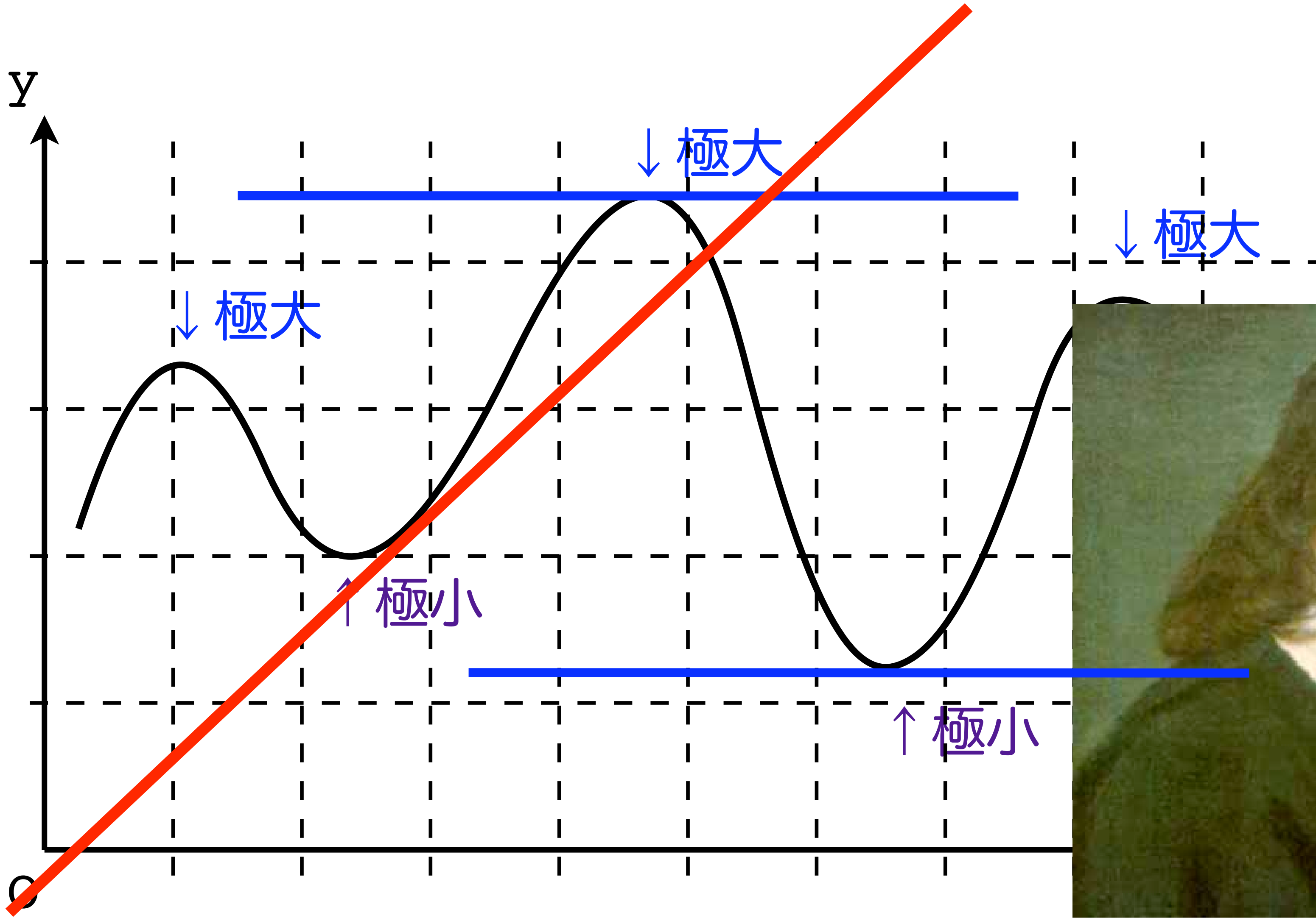
1995年に証明

$n > 2$ のとき、この式をみたす自然数 x, y, z は存在しない

フェルマーは、ほとんど証明を残さなかった

接線法

極大・極小の問題

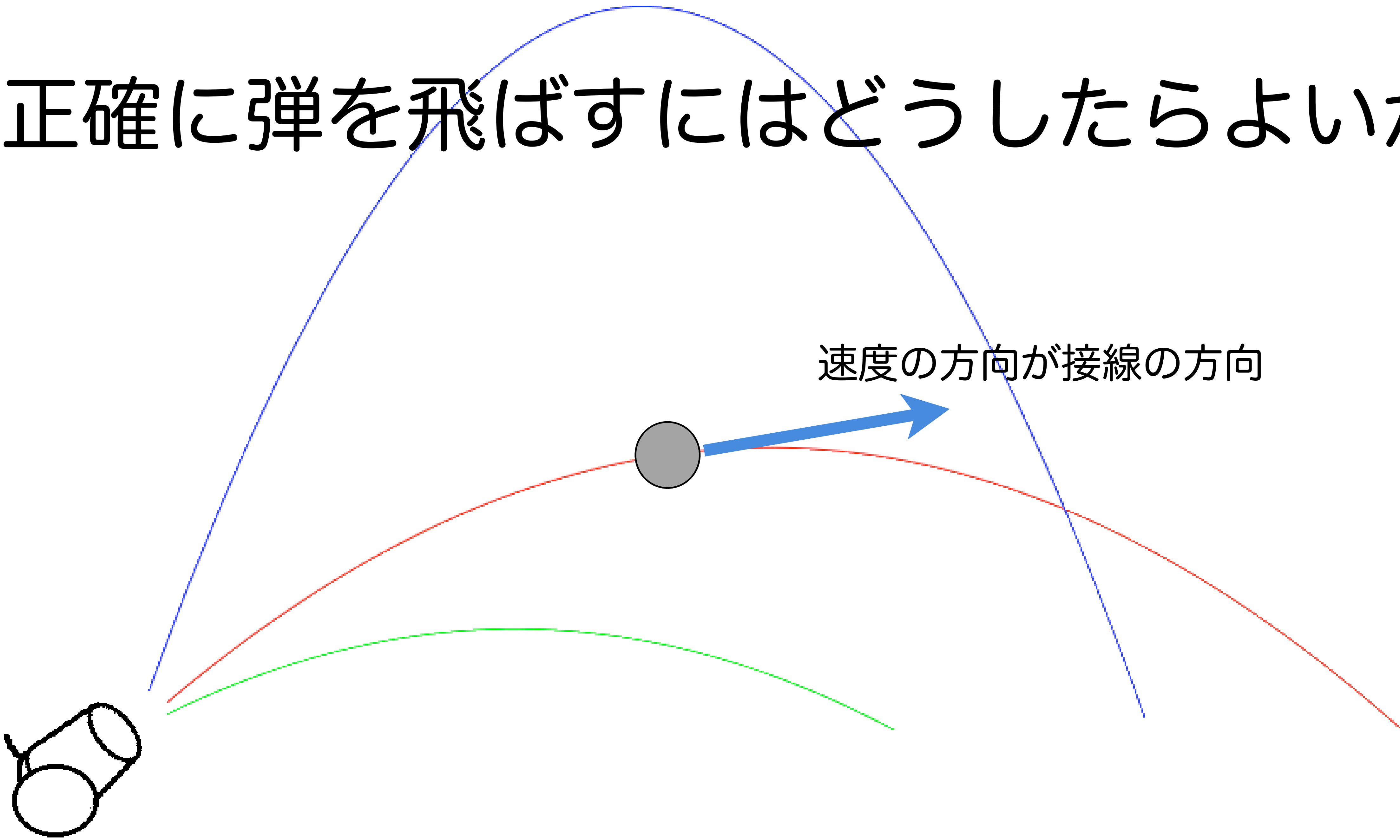


デカルト (Descartes)
1596 - 1650 フランス

曲線に接線を引くにはどうしたらよいか

歴史的背景

正確に弾を飛ばすにはどうしたらよいか



物体の運動の問題

４．微分積分学の完成

微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

の発見

ニュートン (Newton)

1643 - 1727　イギリス

万有引力の法則

ニュートン力学

運動の法則

第１法則　慣性の法則

第２法則　ニュートンの運動方程式

第３法則　作用・反作用の法則

微分積分の完成

ニュートンの人物像

デカルトやガリレオ、ケプラーなどを著書から学び、影響を受けた。

若いときから研究は順調に進み多くの論文を書き上げていたが、
論争することを好まなかったので、晩年まで発表しなかった。

→ライプニッツとの先取権争いになる

1705年、Knightの位を受ける。

造幣局長であったこともある。

オカルトの研究もした

子猫の通る穴。

ニュートンの業績

1687年
自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア）
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

ラテン語で書かれている。

ニュートン力学を完成させた著書。その他様々な命題を含む。

微分積分を用いず幾何学的に記述している。

微分積分の論文は？

ついに微分積分の誕生

微分積分の最初の論文

1666年10月

流率および無限級数の方法

De methodis serierum et fluxionum

公表されたのは、没後１０年後

※プリンキピアは1687年

ライプニッツ (Leibniz)

1646 - 1716　ドイツ

微分積分を独自に完成させた

現在使われている微分積分の記号はライプニッツが考えたもの。

$$\int,\ \frac{d}{dt},\ dx$$

ドイツの外交官・法律家・哲学者・図書館長でもあった。

微分積分の論文

微分法

1684年「極大と極小にかんする新しい方法」

Nova Methodus pro Maximis et Minimis

積分法

1686年「深遠な幾何学」

Acta Eruditorum

二人の関係

ニュートンは1666年に発見。
発表したのは没後10年後（1737頃）

ライプニッツは1684, 1686年に発見。

プリンキピアは1687年。

円周率π（の近似値）を求める公式

ライプニッツ (1673)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ニュートン (1676)

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40 \cdot 2^5} + \frac{5}{112 \cdot 2^7} + \cdots$$

ウォリス (1655)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots$$

マチン (1706)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \\ &= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\ &\qquad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)\end{aligned}$$