比較数学史年①

西洋（ヨーロッパ・アラビア）

前 3000 頃　メソポタミアに六十進法記数法出現

前 2000 頃　古代バビロニアにて円周率の近似

正六角形の周と円周との比較により円周率の近似値として3, $\frac{22}{7}\fallingdotseq 3.142857$, $\frac{25}{8}=3.125$ が使われていた。

前 1650 頃　アーメス・パピスルス(エジプトの数学書)

分数計算・土地の面積・倉庫の容積など。円と面積がほぼ等しい正方形から円周率の近似値として $\frac{256}{81}\fallingdotseq 3.1065$

前　600 頃　ターレス(ギリシャ)

数学の父・ギリシャ哲学・科学の発端

前　540 頃　ピタゴラス(ギリシャ)

三平方の定理

前　450 頃　エレア派のゼノン(ギリシャ)

質疑応答により知識を探求する方法(弁証法)

前　330 頃　ユークリッド[ギリシャ]

『原論』成立

前　200頃　アルキメデス(ギリシャ)

浮力の計算。円の直径と円周，円の半径の2乗と円の面積が同じ比であることを証明。円に外接、内接するそれぞれの正 3×2^n 角形の辺の長さを p_n, q_n としたときに成り立つ、漸化式 $\frac{2}{p_{n+1}}=\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}$ を証明し $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$, 小数で表すと $3.14084<\pi<3.14286$ を求めた。

前　200頃　エラトステネス(ギリシャ)

素数の発見法『エラトステネスの篩』　地球の大きさ

前　200頃　ヘロン(ギリシャ)

三角形の面積公式(ヘロンの公式)　発明家

100頃　メネラウス(ギリシャ)

共線定理(メネラウスの定理)

150頃　プトレマイオス(英称トレミー)(ギリシャ)

球面三角法　天動説　円周率の近似を $\frac{377}{120}=3.1417$ とする

150頃　メネラウス(ギリシャ)

共線定理(メネラウスの定理)

250頃　ディオファントス(ギリシャ)

代数学の父と呼ばれ16世紀以降のヨーロッパにおける代数学発展にも深く影響

東洋　(日本・中国・インド)

前 3000 頃　黄河文明(中国)　インダス文明(インド)

前 1500 頃　殷王朝成立(中国)

前 1100 頃　九章算術の基となるものの存在を確認(中国)

前　479　孔子没(中国)

前　221　秦の始皇帝天下統一(中国)

57　倭奴国(日本)後漢に朝貢(中国と公式交渉開幕)

100頃　張衡(後漢太史令)　(中国)

円に外接する正方形の周と円周を比べ、円周率を $\sqrt{10}$ とした。約 3.162 になる

150頃　『九章算術』完成(その後も注釈は追加していく)(中国)

(一)　方田　田の面積の計算　分数計算
(二)　粟米　異なる交換比率の商品を交換するための比例計算
(三)　衰分　商品とお金との分配や比例計算　利息計算
(四)　少広　正方形 立方体の一辺(平方根 立方根)　πの近似値
(五)　商巧　土木工事に伴う体積計算
(六)　均輸　租税の計算　複雑な比例計算
(七)　盈不足　物の分配に関する整数論的問題
(八)　方程　連立１次方程式
(九)　句股　ピタゴラスの定理とその応用　簡単な２次方程式

260頃　劉徽『九章算術』に注解を付す(中国)

正3072角形を用いて円周率を3.1416 を求めた

比較数学史年②

西洋（ヨーロッパ・アラビア）

830頃　アル・フワーリズミー(ペルシャ)

四則演算、代数方程式の解法，二次方程式，幾何学，三角法，数の十進法表記で 「0」ゼロ を空いている桁に使用

1100頃　ウマル・ハイヤーム(ペルシャ)

放物線と円のあいだの交点によって三次方程式を解く方法を考案

1200頃　ピサのレオナルド (フィボナッチ)(イタリア)

『算盤の書』の出版を通じてアラビア数字のシステムをヨーロッパに導入した。正96角形を用いて円周率を$\frac{864}{275}\fallingdotseq 3.1418$ を求めた。

1545　タルタルリア(イタリア)

３次方程式　弾道計算

1545　カルダノ(イタリア)

『偉大なる術』にて３次方程式の解法。三次方程式の解を示す際に世界ではじめて虚数の概念を導入した

1550頃　フェラーリ(イタリア)

４次方程式の解法。カルダノの弟子。

東洋　(日本・中国・インド)

480頃　祖沖之『綴術』(中国)

古代中国数学の最高水準を示す書物だったと思われるが現存していないため詳しい内容は分からないが円周率の近似分数して約率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$ を出していた。後者は西洋ではずっと後代になるまで知られていない。

500頃　アリヤバータ(インド)

円周率の近似値を 3.1416 とした　地動説　惑星の楕円軌道

538　仏教伝来(日本)

607－894　遣隋使・遣唐使派遣(日本)

日本へ中国数学が移入される。しかし，『綴術』などが十分に消化された形跡はなく，日本人はさほど積極的に吸収はせず，そこから新しい数学を発展するなどは思いも及ばなかったようすである。それでも『九章算術』だけは，一部にもせよ，鎌倉時代，室町時代を経て江戸時代にまで読みつがれてゆき，和算勃興の１つの原動力となった。

628　ブラーフマグプタ(インド)

算術書『ブラーマ・スプタ・シッダーンタ』を著し，そこで 0 と負の数に触れた また，正12, 24, 48, 96角形の周の長さから、n が大きくなるにつれ正3×2^n角形の周の長さは$\sqrt{10}$に近づくとし、これを円周率とした

659　『算経十書』成立(中国)

『九章算術』『綴術』のほか８つの算術書と合わせこう呼ばれるようになる。唐時代に官学の教科書として使われ、日本にも渡っていた。

1247　秦九韶(中国)

『天元術』開拓。算木を用いた器具代数により中国数学は一段の飛躍を遂げる

1299　朱世傑(中国)

『算学啓蒙』を著した。この数学的内容は，初等算術から始まり，線形連立方程式や1変数の代数方程式（２次，３次，４次，５次）に至る。しかし，代数方程式の立式に多項式の四則演算を利用する天元術が『算学啓蒙』によって初めて日本に紹介されたので，日本数学史では最も重要な資料である．この書によって，建部賢弘と彼の師である関孝和は天元術を習得した．

1400頃　マータヴァ(インド)

無限級数　$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$ を得る。

これはのちにライプニッツの公式と呼ばれるようになった。

1592　程大位『算法統宗』(中国)

当時普及したそろばんの使用法と日常必要な諸算法を説き，多くの版を重ねた。日本に伝えられて初期の和算家に学ばれ，特に本書を底本とした吉田光由の《塵劫(じんこう)記》（1627年）を通じて和算の発展に大きな影響を与えた。

比較数学史年③

西洋（ヨーロッパ・アラビア）

1600頃　ネピア(スコットランド)
対数の発見。対数表の作成。

フェルマー(フランス)
確率論・数数論

ガリレイ(イタリア)
振り子の等時性

ケプラー(ドイツ)
惑星の運動に関する法則

デカルト(フランス)
解析幾何学

ルドルフ・ファン・コイレン(ドイツ)
正32212254720角形の辺の長さを計算し，35桁目までπの正しい値を計算した

1650頃　ニュートン(イギリス)
微分積分学　万有引力の法則

ライプニッツ(ドイツ)
微分積分学　$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$　($x=1$とするとマターヴァと同じ式)ほぼ同時期にグレゴリー(スコットランド)も発見

1700頃　ベルヌーイ一族(スイス)
微分方程式など

1750頃　オイラー(スイス)
多面体定理

1800頃　ガウス(ドイツ)　代数学の基本定理ほか
コーシー(フランス)　解析学
ロバチェフスキー(ロシア)　非ユークリッド幾何学
ボリヤイ(ハンガリー)　非ユークリッド幾何学
アーベル(ノルウェー)　５次方程式
ハミルトン(スコットランド)　解析力学
ヤコービ(ドイツ)　楕円関数論
ガロア(ノルウェー)　方程式論
ワイエルシュトラス(ドイツ)　楕円関数論
リーマン(ドイツ)　アーベル関数論ほか

東洋　(日本・中国・インド)

1622　毛利重能(日本)
現在知られている中では最も古い和算家。著書『割算書』は，江戸時代初期を代表する貴重な和算書である。後の代表的な和算家吉田光由や今村知商、あるいは関孝和の師匠でもあった高原吉種などの弟子達を育てたことでも

1627　吉田光由『塵劫記』(日本)
『算法統宗』からヒントを得て『塵劫記』を執筆した。数の桁の名称や単位、掛け算九九などの基礎的な知識のほか、面積の求め方などの算術を日常生活に身近な話題をもとに解説しており、一冊で当時の生活に必要な算術全般をほぼ網羅できるような内容となっている。江戸時代に出版された数学書のベストセラーかつロングセラーとなった。江戸時代の多くの和算家にも影響を与え，後に和算の大家となった関孝和も若いころ『塵劫記』を用いて数学を身につけていった。

1639　今村知商『竪亥録』(日本)
測量や求積に関係する公式集。漢文で専門家向けに書かれた。
弓型の孤と弦の関係に関する近似公式が見られる

1661　礒村吉徳『算法闕疑抄』(日本)
『塵劫記』以来発達してきた数学は本書にすべてまとめられ，代数方程式を使わないで珠算でできる最高度の数学が集大成されている。

1663　村松茂清『算俎』(日本)
円に内接する正2^n角形($2<n<15$)の辺の長さから 小数点以下7桁まで正しい円周率を和算家として，はじめて数学的な方法で求める

1673　村瀬義益『算法勿憚改』(日本)

1683　関孝和『三部抄』『七部書』(日本)
主な業績は，⑴演段術の創始，⑵ホーナーの近似解法，⑶補間法，⑷方程式の判別式，⑸導関数に相当する式，⑹極値，⑺方程式の解の変換，⑻各種の級数，⑼ベルヌーイ数，⑽正ｎ角形の辺と対角線の関係式，⑾招差法，⑿整数論，⒀魔方陣，円攅（円陣）⒁エクストラポレーション，⒂各種の曲線，⒃パップス・ギュルダンの方法、⒄天文、暦についての多くの研究

1710　建部賢弘『大成算経』(日本)
1722　建部賢弘『綴術算経』(日本)
円周率に関連した一連の研究が最も重要で、後の円理の発展の基礎になった。まず、古来からある正多角形で円を近似する方法に「累遍増約術」（Richardson補外）を適用し、円周率を41桁まで正しく求めた

1744　松永良弼没(日本)
πなどを種々の級数の形で表わした結果を建部の結果も含めて示す。その中にはオイラーより早く得られた結果もある

1757　久留嶋義太没(日本)
円理・極大極小問題・整数論など。当時の西洋数学と前後を争うような結果も少なくない。

1798　安島直円没(日本)
円や球の求積法を，級数の和の形で統一的に扱う。これは現代の区分求積法に一歩近づいた。

1839　和田寧没(日本)
和算家最後の花火といわれるほどの人物。

1872　学制発布
和算を廃し，西洋数学を採用

§１　和算の歴史

中国数学の移入

前漢から後漢にかけてまとめられたものが仏教伝来，遣隋使，遣唐使などによる大陸文化の伝来とともに日本に入ってきた。主なものを挙げる。

【九章算術】

時期　前漢から後漢にかけてまとめられたものが仏教伝来，遣隋使，遣唐使などによる大陸文化の伝来とともに日本に入ってきた

内容　「一章　方田」　田の面積の計算　分数計算

「二章　粟米」　異なる交換比率の商品を交換するための比例計算

「三章　衰分」　商品とお金との分配や比例計算　利息計算

「四章　少広」　正方形や立方体の一辺(平方根や立方根)　πの近似値

「五章　商巧」　土木工事に伴う体積計算

「六章　均輸」　租税の計算　複雑な比例計算

「七章　盈不足」　物の分配に関する整数論的問題

「八章　方程」　連立１次方程式

「九章　句股」　ピタゴラスの定理とその応用　簡単な２次方程式の解法

【綴術(てつじゅつ)】

祖沖之 (429－500) によって書かかれた古代中国数学の最高水準を示す書物だったと思われるが現存していないため詳しい内容は分からないが円周率の近似分数として約率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$ を出していた。後者は西洋ではずっと後代になるまで知られていない。

『日本国見在書目録』(889－897) によると少なくとも当時日本国内にあった 1579 部の書物のうち数学に関係のあるものも55 部 (175巻) に及んでいることがわかる。しかし，『綴術』などが十分に消化された形跡はなく，日本人はさほど積極的に吸収はせず，そこから新しい数学を発展するなどは思いも及ばなかったようすである。それでも『九章算術』だけは，一部にもせよ，鎌倉時代，室町時代を経て江戸時代にまで読みつがれてゆき，和算勃興の１つの原動力となったようだ。

Ｑ１．　古代中国数学はヨーロッパ・アラブ数学と比べても遜色ない水準にあった。しかし 一般的な事柄から他の具体的な事柄へと押しひろめるヨーロッパ・アラブ数学の考え方と違い，古代中国数学は具体的な事柄から一般的な事柄へと遡る考え方をとった。これは，江戸時代に独自の進化をする日本の数学にも多大なる影響を及ぼした。さて、具体的な事柄から一般的な事柄へと遡る考え方の名前は何でしょう？

①　帰納法　　②背理法　　③　演繹法　　④　対偶法

(解説)

補足コメント

古代中国数学について

- 世界の四大大河文明の１つとしてきわめて高度であった(建築物•天文暦法の成果より)
- πの近似分数として「約率」$\frac{22}{7}$, 「密率」$\frac{355}{113}$を出していた。前者はアルキメデスもしっていたが、後者は西洋ではずっと後まで知らなかった。
- 球の体積が直径の3 乗の$\frac{\pi}{6}$倍だという正しい結果を残した

この中国数学の第一回移入に対して日本人はあまり積極的にそれを吸収使用とはしなかった。官吏(かんり)登用のための大学制度ができ算博士(さんはかせ)という数学専門職がもうけられていたが教育水準、地位はともに低く、世襲化し学問は育たなかった。

しかし、一部にせよ鎌倉時代、室町時代を経て江戸時代にまで読みつがれてゆき、和算勃興の１つの原動力になった。

九章算術は問題を出し解法と答えを出す帰納的なアプローチである。具体的には問題の記述の後、「答曰く、」ではじまる答えと、「術曰く、」ではじまる解法の記述という具合である。演繹的な手法のヨーロッパ•アラブ数学とは異なり、中国の以後の数学書はこの記述方法を採った。 このスタイルは日本にも輸入され、和算の書籍や算額なども「答曰く、」や「術曰く、」を含む形で書かれている。

中世および江戸時代以前の近世

どのような数学が行われたかは、あまりよく分かっていないが土木，建築，財務，暦の計算などに数学がある程度必要であったことは間違いない。

一方、中国数学は唐から五代十国を経て宋の盛時にまたがる数百年の間には顕著な変化はない。しかし，南宋(1127−1279)の末から元(1271−1368)の初期に現れた天元術により中国数学は一段の飛躍を遂げる。これは古代から使われてきた算木を用いる一種の代数であり，これにより高次方程式の近似解求めることができた。

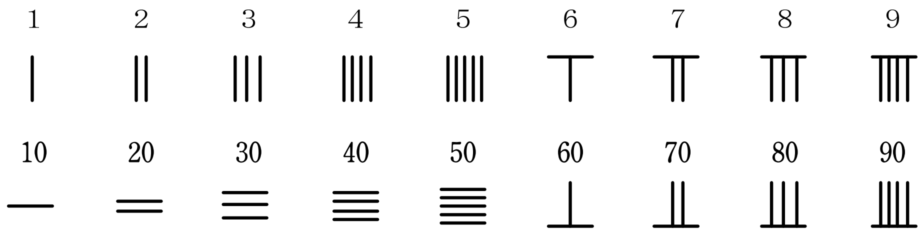
太閤検地の頃は算木を使

ったという記録もあり，また後述の『塵劫記』の開平計算が算木による方法に近いことから、江戸時代直前まで算木が優勢であったと思われる。算木はそろばんと異なり高次の代数方程式を解くことができたが、中国ではそろばんの普及により解法が失われた。一方、江戸時代の日本の数学者はそろばんと並んで算木を用い、数学の発展に貢献した。

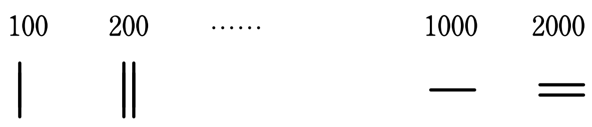
これは

算木

赤と黒２色に着色された木製または竹製のもの。赤は正の数，黒は負の数を表し，０はなにも置かないことで表した。



この先はまた上にもどって



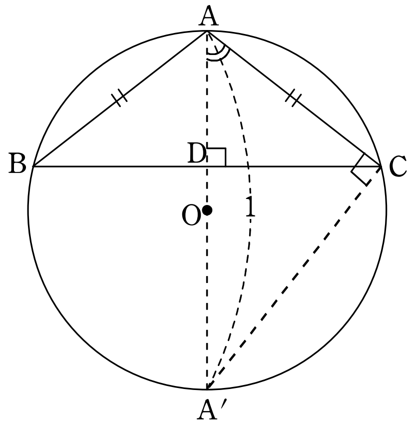
(解説)

天元術と同等の方法はヨーロッパでは18世紀末まで現れない。今日，ホーナー法と呼ばれているものがそれである。

関孝和がどのように円周率を求めていったのか追ってみよう

まずは古代中国の劉徽が行い『九章算術』に載っていた方法で正65,536角形と正131072角形の周の長さを求める過程を見ていこう。（そもそも円周率とは直径１の円周の長さなので，その円に内接する正 n 角形の n を大きくすれば大きくするほど，その周の長さは円周の長さに近づきます）

【問１】右の図でACの長さをADの長さで表そう。
ただし，△ABCは二等辺三角形とします



【解答】△ACA′∽△ADCより

$$AC : AA' = AD : AC$$

$$AC^2 = AD \cdot AA'$$

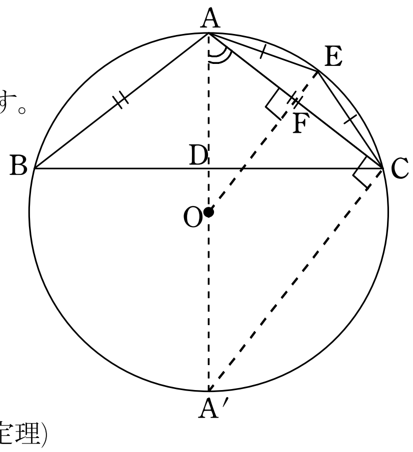
$AA' = 1$ より

$$AC^2 = AD$$

$AC > 0$ より

$$AC = \sqrt{AD}$$

【問２】右の図でECの長さをADの長さで表そう。
ただし，△ABC, △EACは二等辺三角形とします。



【解答】

$$EF = OE - OF$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A'C \quad (\because \triangle AOF \backsim \triangle AA'C)$$

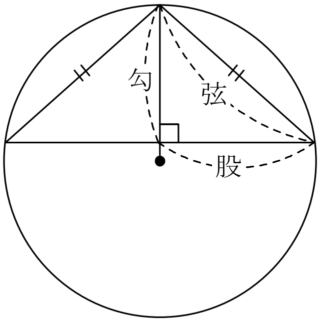
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AA'^2 - AC^2}$$

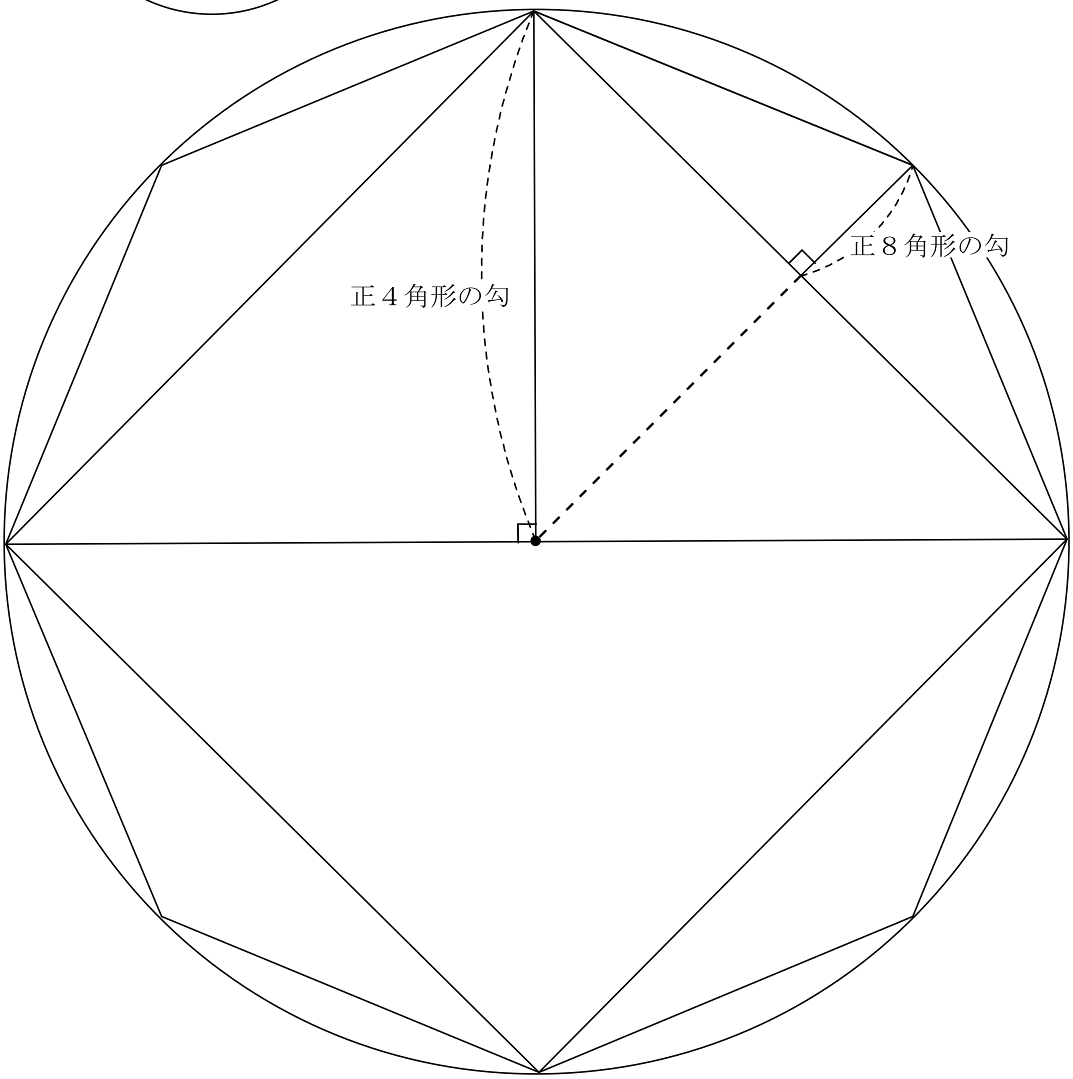
（∵△AA′Cにて三平方の定理）

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - AD} \quad (\because【問１】の結果より)$$

EC>0と【問１】より　$EC = \sqrt{EF} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - AD}}$

この結果を当時の言葉でまとめると



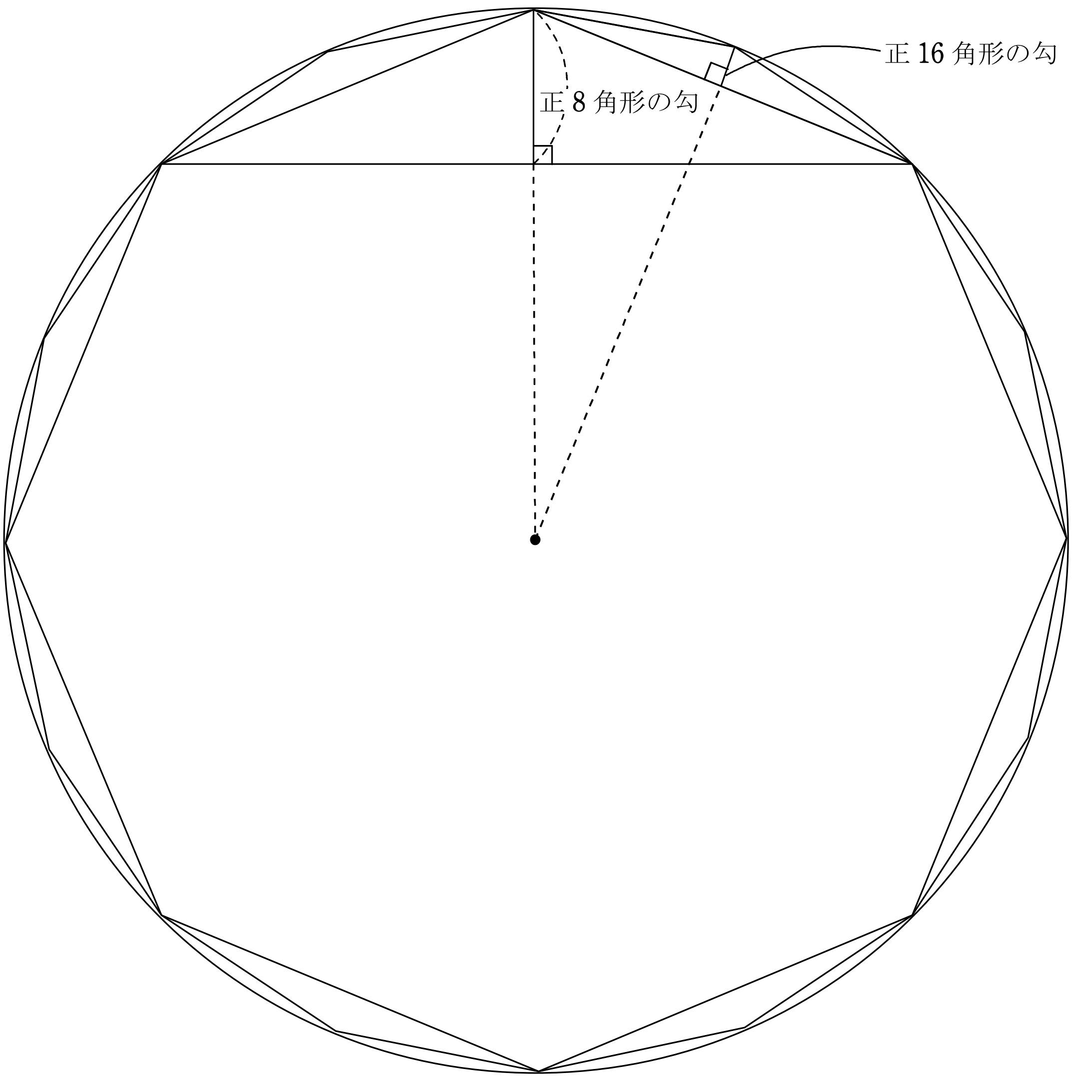


【問２】の結果より

$$\text{正 8 角形の勾} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\text{正 4 角形の勾})}$$

【問１】の結果より

$$\text{正 8 角形の弦(正 8 角形の一辺)} = \sqrt{\text{正 8 角形の勾}}$$



【問２】の結果より

$$\text{正 16 角形の勾} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\text{正 8 角形の勾})}$$

【問１】の結果より

$$\text{正 16 角形の弦(正 16 角形の一辺)} = \sqrt{\text{正 16 角形の勾}}$$

これを繰り返し使えば

$$\text{正 32 角形の勾} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\text{正 16 角形の勾})}$$

$$\text{正 64 角形の勾} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\text{正 32 角形の勾})}$$

$$\text{正 64 角形の弦(正 64 角形の一辺)} = \sqrt{\text{正 64 角形の勾}}$$

$$\text{正 64 角形の周の長さ} = \sqrt{\text{正 64 角形の勾}} \times 64$$

となり，機械的に計算をするだけで大きな正多角形の周の長さを求めることができます。

【問】正 16 角形の周の長さを求めてみよう。

直径 1 の円の正四角形の勾は$\frac{1}{2}$であるから

正 8 角形の勾$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

正 16 角形の勾$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

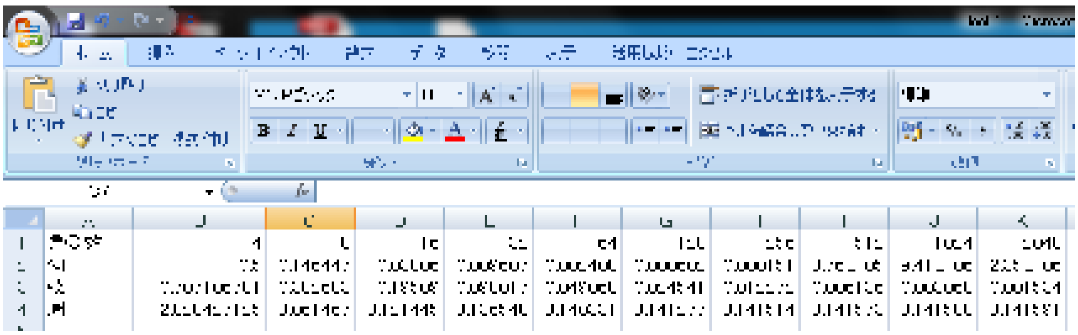
正 16 角形の弦(正 16 角形の一辺)$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}}$

正 16 角形の周$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}}\times 16$　　　(およそ3.12)

このように 1 つ前の勾からつぎの弦が求められる。これを現代の表計算ソフトexcelにさせるのならばどんな式を入れればよいか。Cの列に入れた式をD以降に張り付けるだけで次から次へと値が求められるように工夫してみよう。

※　×は＊，$\sqrt{2}$ は ＝SQRT(2) と表します

	A	B	C
1	角の数	4	＝B1＊2
2	勾	0.5	＝0.5－0.5＊SQRT(1－B1)
3	弦	＝SQRT(B2)	＝SQRT(C2)
4	周の長さ	＝B3＊B1	＝C2＊C1



これをパソコンはおろか計算機すらない時代に進めていったのだから、いくら単純計算とはいえ、すごいですよね…。次のページはその結果です。

正 4 角形

勾	0.5
股	0.5
弦	0.7071067811865475244微強
周	2.8284271247461900976微強

正 8 角形

勾	0.1464466094067262378微弱
股	0.3535533905932737622
弦	0.3826834323650897717 強
周	3.0614674589207181738 強

正 16 角形

勾	0.0380602337443566219 強
股	0.1916417161825448859 弱
弦	0.1950903220161282678 強
周	3.1214451522580522856 弱

正 32 角形

勾	0.0096073597983847754 強
股	0.0975451610080641339 強
弦	0.0980171403265909902微強
周	3.1365484905495392638 強

正 64 角形

勾	0.0024096366639015569 弱
股	0.0490085701647803019 微弱
弦	0.0490676743274180143 弱
周	3.1403311569547529122 強

正 128 角形

勾	0.0006022718974138036 強
股	0.0245338371637090071 強
弦	0.024541228522912288 微強
周	3.1412772509327728661微強

・

・

・

正 4096 角形

勾	0.000000588274149045微強
股	0.0007669900931423828微強
弦	0.0007669903187427045 強
周	3.1415923455701177425 弱

正 8192 角形

勾	0.0000001470685588904 強
股	0.0003834951593713523 弱
弦	0.0003834951875713956 弱
周	3.1415925765848726668 強

正 16384 角形

勾	0.0000000367671410744 強
股	0.0001917475937856978微弱
弦	0.0001917457973107033微弱
周	3.1415926343385629908 強

正 32768 角形

勾	0.0000000091917853531
股	0.0000958737986553517 弱
弦	0.0000958737990959773 強
周	3.1415926487769856708 弱

正 65536 角形

勾	0.0000000022979463436 弱
股	0.0000479368995479887 弱
弦	0.0000479368996030669 弱
周	3.1415926523865913571 強

正 131072 角形

勾	0.0000000005744865862 強
股	0.0000239684498084182 強
弦	0.0000239684498084182 強
周	3.1415926532889927759 弱

ここからが関孝和のすごいところです。正131072角形の周となれば相当円周に近づいているのですが、それをさらに近づける数式

$$\text{円周} \fallingdotseq 65536\text{角の周} + \frac{(65536\text{角の周}-32768\text{角の周})\times(131072\text{角の周}-65536\text{角の周})}{(65536\text{角の周}-32768\text{角の周})-(131072\text{角の周}-65536\text{角の周})}$$

を用いたことです。これはさらに次のように変形されます。

$$\text{円周} \fallingdotseq 65536\text{角の周} + \cfrac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{1-\cfrac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{65536\text{角の周}-32768\text{角の周}}}$$

さて、これはどういう仕組みなのか。正n角の周を$l(n)$, $n=32768$としてみると…

まず前提として多角形の角を増やせば増やすほどその周の長さは円周の長さに近づきます。しかし, いま手元には正131072角形までの数字しかありません。そこで

$$l(2n)=l(2n)$$

$$l(4n)=l(2n)+\{l(4n)-l(2n)\}$$

$$l(8n)=l(2n)+\{l(4n)-l(2n)\}+\{l(8n)-l(4n)\}$$

$$l(16n)=l(2n)+\{l(4n)-l(2n)\}+\{l(8n)-l(4n)\}+\{l(16n)-l(8n)\}$$

$$\vdots$$

$$l(2^m n)=l(2n)+\{\underline{\underline{l(4n)-l(2n)}}\}+\{\underline{\underline{l(8n)-l(4n)}}\}+\{\underline{\underline{l(16n)-l(8n)}}\}+\cdots\{\underline{\underline{l(2^m n)-l(2^{m-1}n)}}\}$$

$\times r$ $\times r$ $\times r$

※ $\{l(4n)-l(2n)\}$, $\{l(8n)-l(4n)\}$, $\{l(16n)-l(8n)\}$ が公比 r となることを洞察した

$$\begin{aligned} l(2^m n) &= l(2n)+\{l(4n)-l(2n)\}(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{m-1}) \\ &= l(2n)+\{l(4n)-l(2n)\}\frac{1(1-r^m)}{1-r} \quad (\because \text{等比数列の和の公式}) \end{aligned}$$

rとして手元にある数字で最も大きな角形で得られた数字を使うと

$$r=\frac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{65536\text{角の周}-32768\text{角の周}}$$

また, この値は１未満であるのでmを限りなく大きくすると$r^m=0$と考えられ,

$n=32768$ とすると

$$l(2^m n)= l(65536)+\{l(131072)-l(65536)\}\cfrac{1}{1-\cfrac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{65536\text{角の周}-32769\text{角の周}}}$$

つまり　$65536\text{角の周}+\cfrac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{1-\cfrac{131072\text{角の周}-65536\text{角の周}}{65536\text{角の周}-32768\text{角の周}}}$　となるのです。

さて，何をしたのか分かりますか？。これは正131072角形の周までの数値を用いて正∞角形の周の長さを求めたのです。これを関孝和は1681年頃に暦の作成にあたって円周率の近似値が必要となり求めたと言われていますが，この方法はエイトケンの$\varDelta^2$加速法と言われるもので，世界的にみても数値的加速法の最も早い適用例の１つであると言われています。なお，西洋でエイトケンの$\varDelta^2$加速法が再発見されたのは1876年のことです。

こうして，関孝和は円周率の近似として小数点以下第16位まで正確に求めたと言われています。

なお関孝和の弟子 建部賢弘は、この方法をさらに進展させ

$$\pi^2=9\left(1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\right)$$

という数式を得ています。これは、それから15年後に有名な数学者オイラー(1707−1783)が友人ベルヌイに宛てた手紙の中で述べた結果と同様で$(\arcsin x)^2$を表す式

$$\frac{(\arcsin x)^2}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^n\cdot n\,!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

とまったく同じです。

授業を終えて

授業のはじめに和算に対するイメージを聞いてみたところ、やはり１人を除いてパズルゲームのようなイメージを持っていました。算学奉納や遺題などのパズル系の問題も興味深いものであり、実際、受講した生徒に書いてもらったアンケートにも数名がパズル系の問題もやってみたいという意見がありました。しかし、私自身も和算について調べだしたとき、これほどまでに高度な数学が行われていたということに驚愕し感動したことから、それを伝えるべくパズル系の問題ではなく円周率の近似を求めていくという円理についての講義を行いました。これは生徒にとっても円周率という身近な題材であったため興味をもってくれたようだったことがアンケートから読み取れます。

一方、問題点もありました。関孝和が行った円周率の近似を求める方法は相似、三平方の定理、平方根、漸化式、等比数列、無限等比級数などを使うものであり学年によっては未習部分のため、そこから説明していくと時間もかかり一部の生徒にとって理解も厳しくなってしまいました。もっと良い進め方があったのではないかと反省をしていかなければならないと思っています。

今回の和算の講義や講義の準備を通し、和算という日本文化にふれ、誇りを感じることができました。それは単に西洋より早い時期に発見できたからということではなく、海外から積極的に学び（今回の和算の土台は中国算術）そこから独自性を出していくという、実は現代の日本と何ら変わらない長所が和算においてもあったということに対してです。もし、また機会があれば和算の講義を通し、学びそして創造する、という心意気を伝えていきたいと思います。そのためには、私自身がもっと学びそして創造していかなければなりませんが・・・

（くましろあつし）