

19 世紀の数学

-カントルと集合論-

1 19 世紀の数学

19 世紀は, 数学史上では一言では言い表せないほど多くの発展を遂げている. 世界三大数学者の一人として挙げられているガウスをはじめ, 極限, 収束の概念を明確化し, 微分積分法の厳密な基礎づけの端緒を開いたコーシーや 5 次以上の一般代数方程式の代数的解法は不可能であることを示したアーベルやガロア, 非ユークリッド幾何を発見したボリアイおよびロバチェフスキーなど多くの数学者が現われた. 他にも, ワイエルシュトラス, リーマン, ディリクレ, ハミルトン, ブールなど多くの数学者がこの時代に活躍している. 19 世紀の数学は自然科学の貢献のみならず, 抽象数学へ進む大きな業績を残した.

19 世紀は, フランス革命と第 1 次世界大戦との間の 120 年間の中核として, 数学史上でも特色のある一時代であった. この時代に, 数学は未曾有の飛躍的進歩を遂げ, おびたしい果実が実り, 20 世紀の抽象数学のための具体性に富む遺産となった. 自由の思想は伝統の束縛から人心を解放し, 社会のより広い階層への文化の浸潤は人材の輩出を促した. 特に大学の勃興に伴って, 多数の専門家の協力と競争が研究を促進した. 数学史上 19 世紀を大体 3 期に分ける. 初めの 30 年は新数学の勃興期, 次の 20 年は中継期で, 後半 50 年は円熟した隆盛期である. (日本数学会 編集 [1, p.502] からの引用)

ここでは, 19 世紀の終わりに現われた集合論の創始者カントルを中心にみていく.

2 カントルの生涯



カントル

1845 年 (0 歳) 3 月 3 日にロシアのサンクトペテルブルクで生まれる.

正式にはゲオルク・フェルディナント・ルートヴィヒ・フィッリップ・カントル. 父は商人で, 母は音楽家の家系であった.

カントルの父はデンマークのコペンハーゲン生まれだが, 若いときにサンクトペテルブルクに移り住み, そこで仲介業の会社を始め, 大きな財を築いた.

1856 年 (11 歳) 父の病気のため, ドイツのフランクフルトに移住.

カントルは最初, 家庭教師のもとで勉強を教わり, その後サンクトペテルブルクの小学校に通った. 家族がドイツに移り住んでからはフランクフルトの私立学校やダルムシュタットの普通学校に通った.

数学に対する天賦の才能をもっていたカントルは, 早くから数学の勉強をしたいという強い希望をもっていたが, 父親は将来の生活の安定のために有望や技術方面の仕事へつかせようと考えていた.

1862 年 (17 歳) スイスのチューリッヒで数学の勉強を始める.

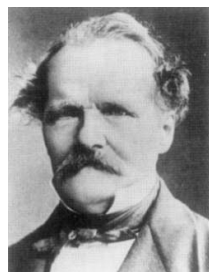
最初, カントルが数学を勉強するということに反対していた父親もついに彼の気持ちを受け入れる. カントルはこのとき父親に感謝の気持ちを手紙で綴っており, 現在でもカントルの手紙のうちで最も古いものとして残っているそうである.

1863 年 (18 歳) 父が亡くなったため, ドイツのベルリン大学に移る.

当時, ベルリン大学では解析学の巨匠ワイエルシュトラス, ベルリン大学には整数論でイデアル数を導入したクンマー, 数論のクロネッカーがいて, 大きな影響を及ぼしていた.



ワイエルシュトラス



クンマー



クロネッカー

1867 年 (22 歳) 博士号を受ける.

クンマーやクロネッカーがいたこともあり, 大学の雰囲気は数論で満ちていた部分もあった. カントルは, ガウスの整数論を深く研究し, a, b, c を定数とした不定方程式

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

の整数解 x, y, z を求めることについての論文を書き, 博士号を受ける. その後, ベルリンで女学校の教師などをしながら数学の研究を続ける.

1869 年 (24 歳) ハルレ大学の私講師となる.

3 変数の 2 次形式に関する大学教師資格論文を完成させ, 私講師となった. 私講師とは, 大学から給料をもらうのではなく, 講義を聴いている生徒から直接聴講料をもらう講師のことである.

1869 年当時, ハルレ大学の正教授はハイネであった. ハイネはハイネ-ボレルの被覆定理で有名な人である. ハイネはカントルの才能を見抜き, 自分の研究領域である三角級数論の世界に彼を引き込んだ. ここで, カントルはワイエルシュトラスやハイネの影響を受けて, 三角級数の理論について深く研究していく.

1870 年 (25 歳) ハルレ大学の助教授に任命される.

この年に「ある関数が、実数のすべての値に対して三角級数として表されるならば、この表し方は一意的である」という三角級数の一意性に関する論文を書いている. この論文は 1853 年にリーマンが講師就任論文の中で取り上げたものであり、ハイネによって部分的な解答が与えられていた. その翌年には、条件を弱めて有限個の点を除いて、としても良いことを示した. 1872 年にはすべての値に対してという条件を離散的な無限個の値を除くすべての値に対してという条件まで弱めることに成功しており、ここで初めて集合の概念が出てきている.

当時、この結果はワイエルシュトラスは賞賛したが、数論の大家であり、カントルの師でもあるクロネッカーは、この結果を認めよとはしなかった. カントルはこのような経験の中で、除外点の存在を調べるために、実数とは何かということを考え始める. このときにカントルは基本列の概念を導入している. この概念は今日では実数の構成法の一つになっている. このようにして、カントルは有限の世界から無限の世界に興味を湧いていった.

1874 年 (29 歳) 数学誌クレルレ誌に「代数的実数のある性質について」という論文が掲載される.

クレルレ誌は当時もっとも権威ある数学誌であり、この論文は「代数的整数全体は可算無限集合である」ことと「任意の区間内の実数集合が非可算無限集合である」ことを証明したものであった. その内容は、それまでの数学が崩壊していくような衝撃を与えるものとなった.

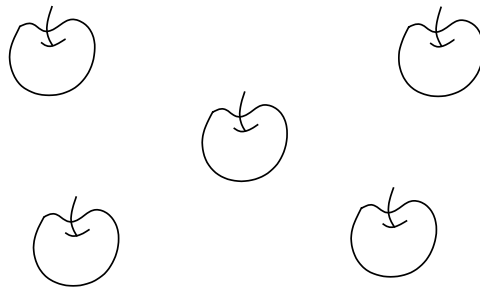
また、カントルは 1872 年頃からデデキントと手紙のやり取りをしており、その手紙の中では今回の論文の内容が話されていた.

ちなみに、カントルはこの年に結婚しており、6 人の子どもに恵まれている.

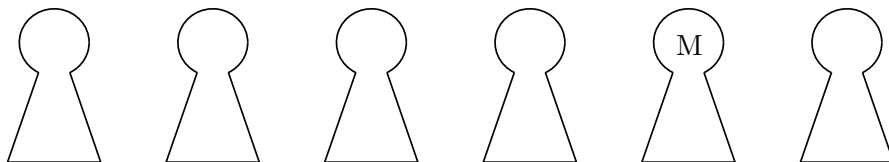
3 実数の非可算性について

3.1 数えてみよう!

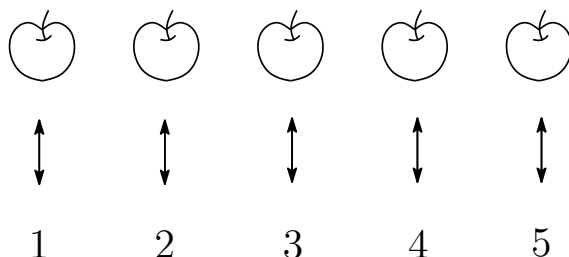
問1 下の図の中にはりんごがいくつあるだろうか.



問2 下の図において, M 君は左から数えて何番目だろうか.



私たちはものを数えるときに, 下図のようなものをイメージして数えていく.



このようなとき, りんご 5 個の集合 A と 1 から 5 までの集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ は **1 対 1 対応している**といい, A と B は**同じ濃度をもつ**という.

「同じ濃度をもつ」ことの厳密な定義は, 「集合 A から B への 1 対 1 かつ上への写像が存在すること」であるが, ここではこのようにしておく.

このように数には, 1 個, 2 個, 3 個, $\dots$ と個数を数える役割と, 1 番目, 2 番目, 3 番目, $\dots$ のように順序を表す役割と 2 つの役割がある.

同じ自然数でも, 前者の役割のときには**基数**, 後者の役割のときには**序数**とよぶ. 同じ 5 でも「5 個」と「5 番目」では役割が違う.

英語では

- 基数 : one, two, three, four, $\dots$
- 序数 : first, second, third, fourth, $\dots$

と明確に区別できる.

この区別が簡単なようで難しいことは, イギリスの数理哲学者バーランド・ラッセルの次の言葉からもわかる.

「2 日の 2 と 2 匹のキジの 2 とが同じ 2 であることに気づくまでには限りない年月が必要だった」

問3 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ の濃度を求めてみよう.

問4 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ の濃度を求めてみよう.

問5 集合 $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ の濃度を求めてみよう.

3.2 無限個あるものを数える?

例えば, 自然数の集合

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

を数えるためにはどうしたら良いだろうか. ものを数えるときには, **1 対 1 対応していることが大切**であった. カントルはここに目をつけ, 次のような概念を導入した.

自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同じ濃度をもつ集合を**可算集合**という. A が可算集合のとき, A は**濃度 $\aleph_0$ をもつ**という.

^{アレフ} $\aleph$ はヘブライ文字の A に対応する文字で, カントルがこの文字を使い始めた.



$\aleph_0$ は, 自然数の濃度を示す一つの基数と考えられる. つまり, 1 個, 2 個, 3 個, $\dots$, $\aleph_0$ 個と考えられる.

問6 偶数全体の集合 $E_0 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ は可算集合となる. このことを示してみよう.

問7 偶数全体の集合 $E_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ は可算集合となる. このことを示してみよう.

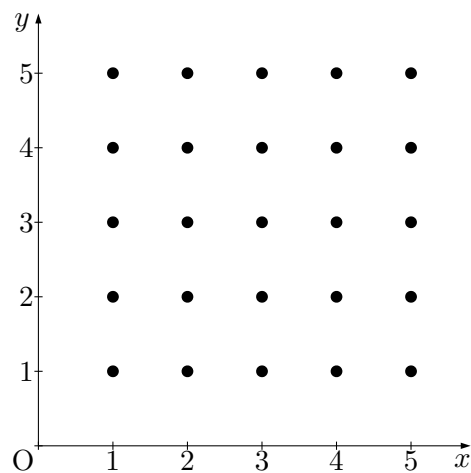
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad ! ?$$

無限集合では部分が全体より小さいということは一般には成り立たない.

問8 整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ は可算集合であることを示してみよう.

問9 座標平面上において, x, y 座標が共に自然数であるような点を**格子点**と呼ぶことにする. (本来は整数である点を格子点と呼ぶ.)

平面上の格子点全体の集合は可算集合であることを示せ.



3.3 実数の集合は可算集合?

実数の集合は可算なのだろうか? それに対するカントルの見出した定理は驚くべきものであった.

カントルの定理

実数の集合は可算集合ではない.

つまり, 自然数の集合と 1 対 1 対応が見つからないということである.

問10 上の定理はどのように示す?

証明 $\mathbb{R}$ の部分集合 $(0, 1)$ が非可算であることを背理法で示す. $(0, 1)$ 区間が可算集合だとすると,

$$(0, 1) = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots\}$$

と番号付けができる. 今, $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots$ はすべて $(0, 1)$ 上の点なので, $0.acbde\dots$ と無限小数展開できる. (0.2 などとは, $0.2 = 0.1999\dots$ と考える) これより,

$$n_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots$$

$$n_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots$$

$$n_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots$$

$$n_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots$$

$$n_5 = 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots$$

$\dots$

とできる. ここで, n を

$$n = 0.a_1a_2a_3a_4a_5\dots, \quad \text{ただし, } a_i \neq 0, a_i \neq 9, a_i \neq a_{ii}, i \in \mathbb{N}$$

なるものとする. n は n_1 と小数第 1 位が違う. n_2 とは小数第 2 位が違う. n_3 とは小数第 3 位が違う. というように, n_k とは小数第 k 位が違い, $(0, 1)$ 上のどの点とも一致しない. すなわち, $n \notin (0, 1)$ となる. しかし, n の定義より $n \in (0, 1)$. これは, 矛盾. よって, 最初の仮定は誤りとわかる. すなわち, $\mathbb{R}$ は可算集合ではない. $\square$

上の証明で使った論法を**カントルの対角線論法**という. この定理が公表されたのは 1874 年のことであり, そのときには数直線における連続性を用いて証明がなされた. カントルの対角線論法は別証明として 1891 年に見出されている.

実数の集合 $\mathbb{R}$ は**連続体の濃度 $\aleph$ をもつ**という.

無理数の集合は連続体の濃度 $\aleph$ をもつ.

長さが 1 の線分上の点と, 1 辺が 1 の正方形上の点は 1 対 1 対応する.

連続体仮説

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

4 カントルのその後

1877 年 (32 歳) クレルレ誌に集合論に関する 2 つ目の論文を送る.

ここでは, n 次元空間の点が連続体濃度をもつことが証明されていたが, クロネッカーの影響もあり, 実際に論文が掲載されたのは翌年のことだった. これに腹を立てたカントルは, 以後クレルレ誌に論文を送ることはなかった.

1879 年 (34 歳) ハルレ大学の正教授に任命される.

1879 年から 1884 年までの間に 6 つほど論文を書いている. ここで, 超限順序数といわれる数の概念が育っていった.

1884 年 (39 歳) 精神障害の病気を引き起こす.

無限論の発展に伴ない, 当時ドイツ数学界に多大な影響力をもっていたクロネッカーから強い批判と反発を受けることになる. クロネッカーは自然数だけを「神の創り給いしもの」というほどの人であり, 無限を制限なしに用いることは批判的であった. 実はガウスも, 無限を何か完結したもののように捉えることには否定的であった. つまり, クロネッカーはガウスに近い捉え方をしていたようである. そのようなクロネッカーからするとカントルの集合論は対極的なところにあり, 許すことのできないものであったに違いない. クロネッカーとのこともあり, カントルは精神病を引き起こすことになる. ただ, カントルが病気を引き起こしたことはクロネッカーだけによるものではない.

1893 年以降, 病気の発作は何度も起こり, 発作的な深い憂鬱状態のときは自分がつまらない人間にさえ思えたそうである. 無限論に関する論文はこのような発作と発作の間に書かれている.

また, 1884 年には論文を 2 つほど書いている. 1 つは発表されたが, 「連続体仮説」に関した論文は証明がされていないこともあり, 発表されなかった.

1891 年 (46 歳) ドイツ数学協会の会長に選ばれる.

この協会の機関誌第 1 巻に対角線論法の論文を載せている. さらにこの論文では「どのような濃度の集合でも, それよりもさらに大きい濃度をもつ集合が存在することが示される」ということが記されていた.

1913 年 (68 歳) ハルレ大学を退職.

1917 年 (72 歳) 1 月 6 日突然の心臓発作により, ハルレの精神病院でその生涯を閉じる.

1883 年, カントルは超限順序数という新しい数を考えだした論文の中で次のようなことを述べている.

「数学的探究心を不必要に狭くすることは, 非常に大きな危険を, そして学問の本質からこのことに対して決して是認が引き出されないだけに, それだけいっそう大きい危険をもたらすように思える. なぜなら, 数学の本質はその自由性にあるからである.」

これはカントルの理論が当時なかなか認められなかったことに対する彼の思いを表したものであったに違いない.

20 世紀に入っても多くの数学者は集合論に対して抵抗があったようである. しかし, 集合論は徐々にその存在が認められるようになってきた. それは, 20 世紀の大数学者ヒルベルトの次の言葉からもわかる.

「カントルが我々のために創造してくれた楽園から, 誰も我々を追い出すことはできない.」

参考文献

- [1] 日本数学会 編集, 数学辞典 第 4 版, 岩波書店, 2007 年
- [2] 志賀浩二, 集合への 30 講, 朝倉書店, 1998 年
- [3] 志賀浩二, 無限への飛翔 -集合論の誕生-, 紀伊國屋書店, 2008 年
- [4] 内田伏一, 集合と位相, 裳華房, 1986 年
- [5] 遠山啓, 数学入門 (上), 岩波書店, 1959 年
- [6] 田中尚夫, 選択公理と数学 増補版, 遊星社, 2005 年
- [7] 彌永昌吉・彌永健一, 集合と位相 I (岩波講座 基礎数学), 岩波書店, 1976 年
- [8] E・T・ベル (田中勇・銀林浩訳), 数学をつくった人々 I, II, III (ハヤカワ NF 文庫), 早川書房, 2003 年

カントルの生涯については [2], [3], [6], [8] を特に参考にして書いた. 連続体仮説に関しては [7] を参考に行っている. また, テキスト中の数学者の画像に関しては Wikipedia(<http://ja.wikipedia.org/wiki/>) からのものである.