8月だよ!数学科全員集合!
(数学史編)

代数方程式の変遷
代数学･整数論の流れ
日本の数学者高木貞治先生を中心に

8月28日(土) 担当 平山

1

高木貞治(日本)1875～1960

- 明治8年生
- 23歳でドイツ留学
- 「相対アーベル数体の理論について」1920「任意の代数体における相互法則について」1922発表
- 類体論を完成し「クロネッカーの青春の夢」を完全に解決
- 「解析概論」「初等整数論講義」等多数の本

2

高木先生の研究　代数的整数論

- 代数的整数とは
  整数係数の代数方程式
  $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$
  の解となる複素数のこと
  代数的整数α, βの和，差，積も代数的整数
- 代数的整数 θ の有理数係数分数式全体 $Q(\theta)$を代数体 k という
- 代数体 k に含まれる代数的整数全体を整数環 I
  代数体 k と整数環 I の性質を研究するのが代数的整数論
- ガウスの時代から

3

代数方程式を解く

- 1次方程式
  $ax + b = 0$　　$x = -\frac{b}{a}$
  2次方程式
  $ax^2 + bx + c = 0$　　$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 古代バビロニアの時代から解法は知られていた
  文章で特定の例題の解き方を示す
  負の数，虚数は避けられていた

4

方程式の解の公式

- 代数的解法
  代数方程式を代数的に解く
  →方程式の係数から四則計算および累乗根をとる操作を有限回繰り返して解を求める
- 3次以上の方程式の解の公式もいずれ発見されると考えられていた。
  → 16世紀になって3次と4次に公式

5

カルダノ(イタリア)1501～76

- 医者･占星術士
- 数学者
- 「偉大な方法」1545
- 賭博･放浪
- 自分の死ぬ日を占う
- フォンタナから強引に解法を聞きだして勝手に発表
  フォンタナからの挑戦を逃げる

6

フォンタナ(イタリア)1500?～57

- タルタリアとも
- 数学者(独学で)
- ベネチア大学教授
- 3次方程式の解法発見
- フェルロ(イタリア)も同時期に解法を発見

フェラーリ(イタリア)1522～65

- カルダノの弟子
- 4次方程式の解法
- ボローニァ大学数学教授
- 素行はよくなかった
- 家族に毒殺された?

3次方程式の解の公式

- カルダノ･フォンタナの公式
  3次方程式 $y^3+py=q$ の解は

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}$$

- 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は
  2次の項を消去して
  $y^3+py=q\ \cdots①$ と変形できる

- $y=u+v\ (u+v\neq 0)$ とおいてみる
  ①に代入して整理すると
  $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)=q$
  このためには次の2式が成立すればよい
  $u^3+v^3=q,\ u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3$
  u^3, v^3 は2次方程式 $t^2-qt-\frac{1}{27}p^3=0$ の解
  $u^3=\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right),\ v^3=\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)$
  立方根をとれば

$$y=u+v=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}$$

代数学の基本定理 (ガウス)

- 複素数を係数とする n 次方程式
  $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ は
  複素数の中に n 個の解
  $x=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$
  をもち
  $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$
  $=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$
  と因数分解される

1の3乗根

- 3次方程式 $x^3-1=0$ を解くと
  $(x-1)(x^2+x+1)=0$
  $x=1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
- 虚数解の1つを ω とかけば他の解は ω^2
- 虚数単位 $i^2=-1$
  2乗して-1になる数を1つ考え i と表す
- 複素数
  a,b を実数とするとき $a+bi$ の形の数

3次方程式の解の公式 完成形

- カルダノ・フォンタナの公式
  3次方程式 $y^3+py=q$ の解は

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\omega+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\omega^2$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\omega$$

解いてみよう 3次方程式

- $y^3-3y=-2$

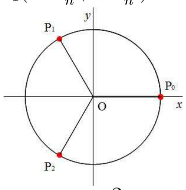
- $y^3+6y=20$

ガウス(ドイツ)1777～1855

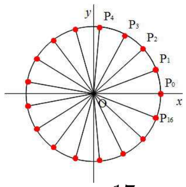
- 相互法則1795
- 正17角形の作図 1796
- 代数学基本定理1799
- 整数論の研究 1801
- 天文台長
- ガウス平面
- 楕円関数

1の n 乗根

- $x^n-1=0$ の解
  $x=e^{\frac{2\pi k}{n}i}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$
  $P_0(1,0), P_1(\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n})$



$n=3$



$n=17$

正17角形の作図

- 1796年3月30日朝 ガウスが思いついた
  $x^{17}-1=(x-1)(x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1)=0$
  $\cos\frac{360°}{17}$ が作図できればよいが，ガウスは

$$\cos\frac{360°}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

  であることを発見した
- p が素数のとき正 p 角形が作図できるのは
  $p=2^{2^q}+1$ の形に限る
  つまり $p=3,5,17,257,65537$

4次方程式の解法

- 4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ より
  3次の項を消去して $y^4+py^2+qy+r=0$
  これを$(y^2+t)^2=(my+n)^2\cdots$①へ変形する
  両辺に $2ty^2+t^2$ を加えて整理
  $(y^2+t)^2=(2t-p)y^2-qy+t^2-r$
  右辺を完全平方するため判別式を考え
  $q^2-4(2t-p)(t^2-r)=0$
  $8t^3-4pt^2-8rt+4pr-q^2=0$
  公式を用い t の値を定め ① の形を導く
  最後に2次方程式 $y^2+t=\pm(my+n)$ を解く

解法へのアプローチ

- 方程式を変形して累乗根をとる方法から方程式の解を互いに入れ替える置換を用いる方法へ　←ラグランジュ

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

- 置換全体の集まりは置換群をつくる

解の対称性　解と係数の関係

- 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とするとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

- 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α, β, γ とするとき

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

- 方程式の係数は解の基本対称式で表される

置換による解法の方針

- 3次方程式 $x^3+px+q=0$ の解を$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 1の3乗根を$\omega$とし
$u=\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3,\ v=\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega\alpha_3$とおく
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に全ての置換を施しても
$u^3+v^3,\ uv$ の値は一定で変化しないので
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の対称式であるので
方程式の係数で表せる

5次方程式の公式へ

- 5次方程式の公式は発見されないまま250年困難だが存在はすると予想されていた
- 1799年　イタリアのルフィーニが論文「 5次方程式が代数的に解けない証明」を発表。ただ証明には不完全な部分があった
- 1824年　アーベルが正確な証明をあたえる
- 1829年　ガロア理論により代数方程式の可解性についての必要十分条件を示す

アーベル(ノルウェー)1802～29

- 貧困だが数学的才能
- 代数方程式・楕円関数
- 「5次方程式を解くことができないことを証明した代数方程式に関する論文」1824
だが論文は認められず
- 職を得られず結核のため不遇の中で早世

ガロア(フランス)1811～32

- ガロア理論
数学を学んで3年ほどで
- 政治闘争で投獄も
- 決闘で負けて亡くなる
- 決闘前夜友人あての遺書に研究成果を書き連ねた
- 提出した論文を紛失されたり業績が認められるのは死後

代数系の基本概念

- 群　乗法(加法)　　　→置換群
  環　加法・乗法　　　→整数環 Z
  体　加法・乗法・除法→有理数体 Q
- 部分系，拡大系
  ある体の部分集合となる体→部分体
- 同型写像　自己同型群
  代数系の演算を保存する全単射写像
- 合同　類別

25

ガロアの定理

- 体 K におれる代数方程式 $f(x)=0$ が代数的に解ける必要十分条件は $f(x)$ のガロア群 G が可解群となることである
- ガロア理論は
  体の拡大列と自己同型群の部分列の対応を表すもので，方程式の可解性はその応用

26

19世紀の数論

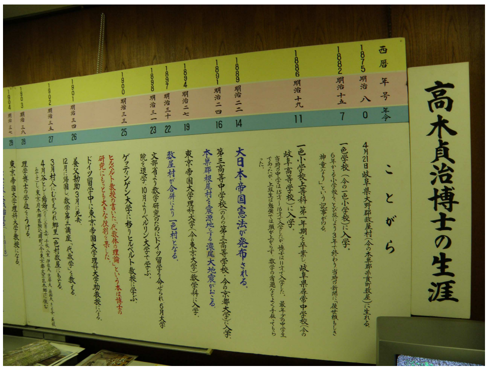
- フェルマーの定理の解決をめぐって
  →コーシー，ラメ，クンマー
- イデアル論→デデキント
- クロネッカー
- ヒルベルト「整数論の報告」

27

高木貞治博士記念室

岐阜県本巣市糸貫図書室内

28



高木貞治博士資料室 29

参考文献

- 高木貞治「近世数学史談」岩波文庫,1995
- 高木貞治博士顕彰会,糸貫数学校研究会「高木貞治物語」岐阜県本巣郡糸貫町,2001
- 安倍齊「代数ことはじめ」森北出版,1993
- 小堀憲「物語数学史」新潮社,1984
- I. ジェイムズ (Joan James)「数学者列伝 I」シュプリンガー・ジャパン,2005
- I. ジェイムズ (Joan James)「数学者列伝 II」シュプリンガー・ジャパン,2007
- 中村亨「ガロアの群論」講談社,2010
- 岐阜県本巣市糸貫図書室内高木貞治博士記念室所蔵資料

30

講習を振り返って

かねてより数学史について何かしら授業や講習で扱ってみたいと考えていたが，歴史そのものを考えれば数千年の話であり，そのスケールの大きさを思うと手の出しようがないものであった。今回，数学史リレー講座の企画が有志により立ち上がり，数学史の話題をいろいろと提供する講座を中学生から高校生まで幅広く集まる中で開くことができた。

講座分担にあたり割り当てられたのが～日本の数学者で高木先生を中心に～との内容で，歴史の最後に日本人の数学者をということになった。大学時代の専門が整数論で，高木先生の著書「代数的整数論」を読み，類体論の美しさに感激したことを思い出しながら，ぜひ高木先生の業績を伝えたいと考えたが，中学生に類体論の話ができる訳はなく，人物像だけの話では数学講習らしくない。結局，代数的整数論へ至る過程として代数方程式の解法をたどることとし, 3 次方程式の公式を導き出すことから始めてガウス，ガロアに触れながら 20 世紀初頭の高木先生へ至る物語をすることにした。個々の式変形よりは公式を生み出すアイディアが伝わるように心掛けたつもりでったが，公式の導出は累乗根や複素数など，中学 1 年生には難しい内容に感じられたようであった。カルダノ，ガウス，ガロアといった個性豊かな登場人物のエピソードは楽しく感じてもらえたのではないだろうか。

最後に高木先生の記念室を訪ねた様子を写真や音声で紹介して終了となった。

高木貞治博士記念室

一度は見学に行きたいと思っていたが，高木先生の話をするのであればぜひ行かなくてはと，帰省先の富山からの帰り道に立ち寄ることにした。8 月 11 日，車で東海北陸自動車道を南下，岐阜各務原インターでおりて 30 分ほど。高木先生の出身地，濃尾平野の北西，揖斐川が流れ，西に伊吹山地を望む旧数屋村，本巣市糸貫分庁舎などが並んで立つ一角の建物の中に記念室がある。図書室の係の人に鍵を開けてもらい，教室の 3 分の 1 位の広さの部屋に入ると, 壁に年表, ガラスケースには写真, 愛用の品々, 論文などの所蔵物が展示されている。あまり訪れる人がないのか倉庫のような感じであった。写真を撮ったり記録を読んだりしながら，一時間ほどの滞在であった。