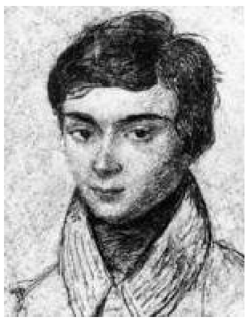
～ガロア生誕200年記念～
数学科リレー講座
1日目
ガロアの生涯とガロア理論概説



2011.8.22
数学科　平山裕之

ガロア年表

年代	年齢	できごと	フランス政治
1789～			フランス革命
1804～			ナポレオン帝政
1811.10.25	0	ガロア誕生	
1814～15	2～3		王政復古・百日天下
1823.9	11	ルイ・ル・グラン校入学	
1826.9	14	数学準備級に入る	
1828.8	16	エコール・ポリテクニーク受験失敗	
1828.9		数学特別級に入る	
1829.4	17	連分数についての論文発表	
1829.5		科学学士院に素数次代数方程式の研究を提出	
1829.7.2		父ニコラ自殺	
1829.8		エコール・ポリテクニーク再受験失敗	
1829.10	18	エコール・プレパラトワール合格	
1830.2		科学学士院に論文再提出	
1830.7			７月革命
1831.1.4	19	エコール・ノルマル放校処分	
1831.1.17		科学学士院に論文再々提出	
1831.5.9		乾杯事件	
1831.7.14		政治活動で逮捕	
1831.10		裁判で有罪，サン・ペラジー監獄入獄	
1832.3.16	20	フォートリエ療養所に移る	
1832.5.29		シュヴァリエと二人の知人に遺書を書く	
1832.5.30		決闘で重傷を負う	
1832.5.31		コーシャン病院にて死去	
1846		リューヴィルが論文集発表	

1　ガロアの生涯

フランスの天才数学者であるエヴァリスト・ガロア (Evariste Galois) は 1811 年 10 月 25 日にパリ近郊のブール・ラ・レーヌという町で生まれました。今年はちょうど生誕 200 年にあたります。ガロアはわずか 20 才で決闘の末亡くなります。数学者として，その業績が認められたのは，死後十数年たってからのことですが，ガロアが創りあげた理論は，現代代数学の基本となる偉大なものだったのです。数学者である一方で，共和主義の政治活動家として波乱に満ちた人生を送ります。そのガロアの生涯を辿ることにしましょう。

1.1　誕生から

ガロア家は代々私立寄宿学校を経営し，父ニコラ・ガブリエルも校長でした。当時の多くの学校はカトリック教会の影響下にありましたが，ガロア家の学校は異なり，ニコラも宗教とは無関係で啓蒙主義・自由主義の思想をもち，知識と教養を備え，町の人々からの信頼も厚い人物でした。1815 年から亡くなるまで，町長を勤めています。母アデレード・マリも大変教養のある女性で，ラテン語を学び多くの古典に精通していました。ガロアがパリの学校に入るまでの初等教育は，この母からすべて受けていました。幼少期のガロアは幸福で豊かな家庭の中で，真面目で明るく，社交的な少年として育ちました。

1.2　ルイ・ル・グラン校

11 才になったガロアは，パリにある名門校のルイ・ル・グランに入学し，家を離れ寄宿生となりました。当時はフランス革命から王政復古へと激動の時代にあり，保守王政とリベラルな自由主義との対立が続いていました。ルイ・ル・グランの校長は保守派の人物が務め，リベラル派が多い学生との間で，学校当局への反抗と強圧的管理との衝突が繰り返されていました。政治闘争の縮図ともなっていた寄宿舎での生活は，幸福な家庭で育ったガロアにとって，人格形成に大きな影響を与えていくことになります。

入学して第 4 級と第 3 級の 2 年間，ガロアは真面目な生活をおくり，母から受けた教育のおかげで学業成績も優秀で，ギリシャ語フランス語訳コンテストで最優秀賞を得たりもしていました。ところが，第 2 級に入ると学業に身が入らなくなります。第 1 級に進級するかについて，校長と父とのやり取り後，結局第 2 級に留め置かれました。2 度目の第 2 級では余裕もできたので数学準備級にも入り，ここでガロアは数学についての特別な才能を自覚することになったのです。

数学準備級ではルジャンドルの「幾何学の基礎」を教科書としていました。普通なら 1 年はかけて読む本を，ガロアは 2 日で読み終えてしまったと伝えられています。ルジャンドルは 18〜19 世紀のフランス人数学者です。「幾何学の基礎」はユークリッド原論以来の伝統である，定義・定理・証明の論理体系を厳密に守りながら，直感的な表現で幾何の世界を示してもいます。その時以来，ガロアは数学へ熱狂的に取り組むようになり，一方，数学以外の教科への興味を失ってしまいました。数学についても，数学準備級担当のヴェルニエ先生の授業を退屈と感じ，授業にも真面目に取り組まず，傲慢さや攻撃性が顕れて，ガロアに対する学業記録の評価は散々なものでした。

1.3　数学と進学

フランス革命の後，教育によって新しい国を復興するために，エリートを養成する高等教育学校が作られるようになりました。土木産業，軍事技術のように数学，物理学の知識を必要とする職業人を育成する学校として，エコール・ポリテクニーク (パリ諸工芸学校) がありました。この学校は当時の数学の拠点となり，ラグランジュやモンジュといった著名な数学者が集まっていました。ガロアも中等学校であるルイ・ル・グランの後，エコール・ポリテクニーク入学を希望します。この学校であれば，一流の者たちと数学に専念でき，将来が保証され，革命の理想も保たれると考えたのです。

数学の実力は十分にあると考えたガロアは，自己流の準備をして 1828 年にエコール・ポリテクニークを受験しますが，不合格になってしまいます。入学試験の面接では，ルジャンドルの理論などの高度な問題が出る訳ではなく，数学準備級，数学特別級で学ぶ定型の出題がされていました。数学準備級の授業に取り組まず，まだ数学特別級でも学ばなかったガロアにとって，受験は過度な自信からでた無謀なものであったようです。

受験に失敗したガロアは，ルイ・ル・グランに戻り数学特別級に入ります。ガロアは，ここで数学担当のリシャール先生にその数学的才能を認められます。初めて自分の才能を認めてくれたリシャール先生の指導で，ガロアは数学研究に本格的に取り組んでいきます。1829 年 4 月には，初めての論文「循環連分数に関する一定理の証明」を書き，論文はリシャール先生の紹介で数学専門誌「数学年報」掲載されます。17 才の無名の少年が，当時一流の数学専門誌に論文を出すということは異例のことでした。

ガロアも 16 才の頃に一度，一般の 5 次方程式も代数的に解ける証明ができたと考えたようですが，誤りであることに気づき，ラグランジュの論文研究から発展して，代数方程式の代数的解法についての全く新しい理論を発見しました。ガロアはこの論文をパリ科学学士院 (アカデミー) に提出します。ところが学士院からの返事はいつまで経ってもありませんでした。このことには，論文を預かったコーシーが紛失してしまったとか，捨ててしまったとか，いくつか説があります。この論文「素数次代数方程式が代数的に解ける条件」が，ガロア理論のもとになる論文だったのです。

1829 年 7 月，ガロアにとって不幸な出来事が起こります。教会の司祭や王党派の人々から中傷受けていた父ニコラが苦悩に堪えられず自殺したのです。ガロアは大きな衝撃を受け，王政復古の中での権力の不公正と陰謀に激しい憎悪をいだきます。

葬儀の後，エコール・ポリテクニークを再受験します。しかし，二度目の受験にも失敗してしまいます。面接試験官の質問がガロアにとっては愚問と思われ，答えなかったため口論になったなどと伝えられています。受験失敗はガロアにとって納得いかないもので，試験の公正さを疑い，世の中の様々な不公正や矛盾に憎悪を強めていきます。

1.4　エコール・ノルマル

エコール・ポリテクニークは二度しか受験できないため，リシャール先生の勧めもあり，エコール・ノルマルへの進学を目指します。エコール・ノルマルは教員養成のための師範学校として設立されました。ガロアの入学時にはエコール・プレパラトワール (準備学校) の名称ですが，1830 年に元の名称に戻ります。入学試験に関しては，何より数学の才能があ

ることから特別な計らいもあったようで，10 月に入学が認められ，経済的な苦境からも脱することができました。

エコール・ノルマルでガロアは 1 学年上の学生であるオーギュスト・シュヴァリエと知り合います。シュヴァリエは決闘前日に遺書を送ることになった相手で，ガロアが生涯でただ一人信頼のできる親友となった人物です。シュヴァリエは宗教色をもつサン・シモン主義に属し，ガロアの思想とは異なる部分がありましたが，支配階層に抗し，社会の改革を目指すことでは共通していました。

ガロアは 1830 年 2 月に，前年パリ科学学士院に提出した論文をまとめ直して，懸賞論文として再提出しています。ところが，懸賞論文の審査員のフーリエが提出された論文を預かっていましたが，審査の前にフーリエは急死してしまい，そのために論文はまたもや失われてしまったと云われています。論文の大賞を逃し，2 回も論文が失われてしまったことや，父ニコラの死，エコール・ポリテクニーク受験に失敗したことが続き，不運な面があったとはいえ，ガロアは当時の支配階級や世間に一層の疑いの目を向けることになりました。

この年，ガロアは数学についての論文を 4 本発表し，雑誌に掲載されています。生前に発表された論文は,「連分数の‥」を含めて 5 編だけしかありません。この後ガロアは革命家の一人として，政治活動に巻き込まれていきます。

1.5　放校処分

1830 年 7 月 27 日に 7 月革命が起こり，超王党のシャルル 10 世から,「フランス人の王」ルイ・フィリップ王政へと政権が代わります。エコール・ノルマルのギニョー校長は，学生たちが政治的な運動をすることを避けようと，革命の 3 日間学生を校内から出さず，公務員としての忠誠を求めます。革命により共和主義の理想が実現される瞬間に立ち会いたいと考えたガロアは，ギニョー校長の措置に反発します。一方でギニョー校長は革命後，一転して新政府への協力を表明します。12 月 5 日のギャゼ・デゼコール紙 (学校新聞) に，このギニョー校長の転身を批判する，ガロアが書いたことが明らかな投書が掲載されます。8 月にガロアは共和派の政治活動集団である「民衆の友の会」と接触し始めたようで，学校当局からは過激な活動を引き起こす危険人物と考えられるようになり，新聞記事掲載をとらえて，ギニョー校長はガロアを学校から追放することにしたです。そして，1831 年 1 月 4 日に大臣からの裁可が下り，ガロアはエコール・ノルマルから放校されました。

放校直後の 1 月 13 日に，ガロアはソルボンヌ通りのカイヨ書店で，高等代数学講義を開講しました。数学に自信を持ち，その結果を人々に伝えながら生活の資金を得ようとしたのです。しかし，この講義は長くは続かなかったようです。さらに，1 月 16 日までにはパリ科学学士院に一昨年来提出し，不運な結果で終わってしまった論文を抜粋する形で再び提出しました。今回はポアソンとラクロアによって審査されましたが，二人には内容がきちんと理解できなかったようで，より明快で完全な論文の提出を勧められたまま，結局学士院の紀要には掲載されずに終わってしまいます。

1.6　逮捕・入獄

「民衆の友の会」に入り政治活動を活発にしてきたガロアは，放校処分が確定的になったとき，共和主義者たちが多く入っていた国民軍に入隊しました。国民軍は危険分子が多数いることから解散させられますが，友の会の会員を中心に政治活動が続きます。

1831 年 5 月 9 日，共和主義者たちが集まり祝宴が開かれたとき，ガロアは乾杯事件を起こします。片手にグラス，片手にナイフを持ちながら,「ルイ・フィリップのために」と叫んだのです。国王であるルイ・フィリップを殺せとのメッセージととらえられ，翌日ガロアは逮捕され重罪裁判所で裁判にかけられます。結局裁判では無罪となりましたが，当局のガロアに対する危険分子との認識は決定的になりました。

7 月 14 日の革命記念日に友の会のメンバーとともに，ガロアは国民軍の軍服を着用し，ナイフを持って祭りの行列に参加しました。デモ隊の先頭にいたガロアは警察にもう一人のメンバーとともに逮捕されました。国民軍の軍服着用と武装の罪で軽罪裁判所で裁判にかけられ，翌年 4 月 29 日までの刑期で禁固刑判決が確定し，サン・ペラジー監獄に入れられます。

獄中でも数学の研究を続けていましたが，監獄での過酷な生活のためガロアは健康を損ないます。1832 年パリではコレラが流行しました。刑期を残した 3 月 16 日，ガロアは衛生状態の悪いサン・ペラジー監獄から仮出所し，フォートリエ療養所に移送されました。ここでガロアは療養所医師の娘ステファニーに恋をします。

1.7　決闘

ガロアは刑期が終わった後もフォートリエ療養所に留まっていました。ステファニーへの恋はガロアの失恋の形で終わります。

決闘については，現在でもその真相の全てが究明されているわけではありません。研究者がいろいろな説を発表していますが決定的なものとは言い切れず，決闘の相手や場所について，何より原因が確定できてはいないのです。ここでは二つの説を紹介します。

まず陰謀説です。決闘の相手や介添人は当局側の人間で，恋愛沙汰を装って決闘に見せかけて暗殺されたという説です。次に自殺 (犠牲) 説です。ガロアが政府打倒の契機になるのであれば自分の命を犠牲にしてもよいとの申し出をする。決闘が当局の陰謀により行われ，ガロアが暗殺されたように装い，民衆蜂起を狙うという説です。

決闘の前夜に，ガロアは 3 通の手紙を書きました。2 通は共和主義の同士に送ったものです。もう 1 通が親友シュヴァリエ宛の手紙です。この手紙の中で，ガロアは自分の今までの数学の結果を伝えようとしています。おそらく徹夜で，時間のない中で必死に手紙を書いたと思われます。

5 月 30 日に決闘がおこなわれました。ガロアは腹部に銃創を受け，瀕死の状態で倒れていたところを，通りがかりの農夫に助けられコーシャン病院に運ばれました。そして，腹膜炎を起こし翌日の朝 10 時に息を引き取りました。

ガロアの死後，シュヴァリエはガロアの遺志を誠実に果たし，生前の論文や記録を集めてまとめ，科学学士院に依託するとともに，著名な数学者に送りました。しかし，ガロアの業績が知られるのは十数年後になってからです。1846 年になってリューヴィルがガロアの論文集を発表しました。

2　代数方程式

ガロアの定理は，代数方程式が代数的に解ける必要十分条件を与えるものですが，その結果として 5 次以上の方程式には一般的な解の公式がないことが示されました。ここでは，方程式の解の公式について簡単に説明しておきます。

2.1　代数方程式とは

未知数を x とするとき，$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$ の形をとる方程式を代数方程式とよんでいます。文字式の次数が n のときは，n 次方程式です。

1 次方程式 $ax + b = 0$ の解は $x = -\dfrac{b}{a}$，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であることは，古代から知られていました。

この式から判るように，解の公式は方程式の係数を用いて，四則計算と平方根で未知数を求めています。方程式を「代数的に」解くというのは，方程式の係数から四則計算と累乗根をとる操作を有限回繰り返して解を求めることです。

2.2　複素数と累乗根 (べき根)

1 次方程式や 2 次方程式の解の公式が古代から知られていたと書きましたが，そこでは負の数や虚数は扱わなくてすむように工夫がされていました。今後の話を進める上で，方程式の解を扱うために数の拡張をしておきます。

2 乗して -1 になる数を 1 つ考え i と表すこととし，虚数単位とよぶことにします。このとき，$i^2 = (-i)^2 = -1$ です。a, b を実数とするとき，$a + bi$ の形の数を考え複素数と呼ぶことにします。2 つの複素数 α, β の四則演算 $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}$ は，$i^2 = -1$ を用いて文字式の計算をすることで，その結果もすべて複素数になります。複素数全体は四則計算で閉じた「体」になっています。

平方根 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$ と同じように，立方根 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots$，4 乗根 $\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \cdots$ を考えることができます。今並べたこれらの数はすべて実数です。

3 次方程式 $x^3 - 1 = 0$ は $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ と因数分解すれば，その解は $x = 1$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ です。この数は 3 乗すると 1 になる数ですから，すべて 1 の 3 乗根です。虚数解の 1 つを ω と表すことにします。このとき，もう 1 つの虚数解は ω^2 であり，$\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ が成り立ちます。

ここで，ガウスが完全な証明を与えた代数学の基本定理を紹介します。
n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ は複素数の中に重複を含めて n 個の解 $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をもち，このとき方程式は $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$ と因数分解される。
この定理は，複素数の範囲では代数方程式には必ず解が存在することを主張していますが，方程式が代数的に解けるどうかは別問題であることに注意して下さい。

複素数の範囲では，n 乗根は n 個あります。特に，1 の乗根は $x^n-1=0$ の解として，
$x=e^{\frac{2\pi k}{n}i}=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $_{(k=0,1,\cdots,n-1)}$
複素平面での単位円周上の n 等分点 $P_0(1,0),P_1(\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}),\cdots$ で表されます。

2.3　3 次方程式の公式

3 次方程式の解の公式が発見されたのは 16 世紀になってからで，カルダノの公式と呼ばれていますが，実際にはフェルロ，フォンタナが同時期にそれぞれ発見したといわれています。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は 2 次の項を消去して，$y^3+py=q$ の形に変形することができます。このとき，カルダノ・フォンタナの公式によると，
$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\dfrac{4}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\dfrac{4}{27}p^3}\right)}$ と y の値が求められます。

解法の途中で，2 次方程式を解くのに平方根を 1 回とり，さらに立方根を 1 回とって解を求めています。平方根の中の符号が負になることもあり得ます。(不還元の場合といいます)
虚数が必要となったのは，2 次方程式の平方根よりは，むしろ 3 次方程式を解くために考えなくてはならなくなった，とも言えます。

一般に 3 次方程式は 3 個の解を持ちますが，その解は

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\,\omega+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\,\omega^2$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\,\omega^2+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)}\,\omega$$

の 3 つです。

2.4　4 次方程式の公式

4 次方程式の公式は 3 次方程式のすぐ後，カルダノの弟子のフェラーリによって得られました。3 次方程式の公式に還元する方法で，次のような流れによります。

4 次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ から 3 次の項を消去して $y^4+py^2+qy+r=0$ と変形することができます。これをさらに $(y^2+t)^2=(my+n)^2$ の形に変形するために，3 次方程式 $8t^3-4pt^2-8rt+4pr-q^2=0$ を解き，t,m,n を定めます。両辺の平方根をとった後，y についての 2 次方程式を解けば解が得られます。

3 次方程式を解くのに，平方根を 1 回，立方根を 1 回とり，両辺の完全平方式で平方根を 1 回，最後に 2 次方程式で平方根を 1 回とり解を求めています。

2.5　解の対称性

代数方程式の係数と解の間には，解と係数の関係といわれる関係式が成立します。2 次方程式と 3 次方程式については，次のようによく知られています。

2 次方程式の解を α, β とするとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

3 次方程式の解を α, β, γ とするとき，$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$ が成り立ちます。ここで，左辺は基本対称式とよばれる式で，どのような文字間の入れ替えをしても，式が変化しません。n 次方程式では，係数は n 変数の基本対称式になります。

方程式の解の間にはある種の対称性があり，解の公式も解の対称性から考えるアプローチがとられるようになりました。逆に言えば，1 つの解を係数で表現する解の公式では，対称性が成り立たない部分が含まれているといえます。

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$ の根号中にある b^2-4c は，方程式の解 α, β を用いれば，$b^2-4c=(\alpha-\beta)^2$ と表されます。ここで，$\alpha-\beta$ は解を入れ替えると符号が変わり，対称式ではなく交代式とよばれる式になっています。

3 次方程式 $y^3+py=q$ の解の公式の根号中にある $27q^2+4p^3$ は，方程式の解 α, β, γ を用いれば，$27q^2+4p^3=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$ と表されます。

それぞれの右辺は解の差積で，判別式とよばれる式です。

2.6　ラグランジュの研究

ラグランジュは 17 世紀にイタリアで生まれたフランスの数学者で，方程式の解を用いて，方程式の係数や解の公式の中に現れる式を研究しました。そして，その解を互いに入れ替える置換の操作をすることで，解の公式の手掛かりをつかもうとしました。

3 次方程式 $y^3+px+q=0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ として，$u=\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3,\ v=\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega\alpha_3$ とおきます (この式はラグランジュの分解式とよばれます)。解を互いに入れ替えるどのような置換を施しても $u^3+v^3,\ uv$ の値は一定で変化しないので，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の対称式になります。したがって解の基本対称式である係数で表せます。$u, v, u+v$ は解の対称式ではありません。さらに計算を続けて，$\alpha_1=\dfrac{1}{3}(u+v),\ \alpha_2=\dfrac{1}{3}(\omega^2u+\omega v),\ \alpha_3=\dfrac{1}{3}(\omega u+\omega^2v)$ u, v を p, q で表して，カルダノの公式と同じ結果を導いています。

さらにラグランジュは 4 次方程式も同じ手法で結果を出しましたが，5 次以上については解決できるに至りませんでした。

2.7　5 次方程式の不可解性

18 世紀の後半になると，5 次方程式には解の公式がないと考えられるようになりました。ついに，1799 年イタリアのルフィーニが，5 次方程式が代数的に解けない証明を発表しました。残念ながら，証明には不完全な部分がありましたが，解の公式を求める研究から，解けないことの証明に焦点が移されました。

研究方法はラグランジュと同じように，方程式の解を互いに入れ替える置換を基にしています。代数的に解けるかどうかを調べるために，解の置換が本質的な部分であったのです。ルフィーニは，n 次方程式の n 個の解に関する有理式を考えて解の置換を施したときに，式の値が変わらない置換の個数や，式の取り得る値の個数を詳しく調べています。また，べき根を添加して体の拡大を考える操作を行っています。(体の拡大を大雑把に言えば，例えば有理数全体に $\sqrt{2}$ を添加して $a+\sqrt{2}b$ の形の数を考えて数の範囲を拡張すること指します。)このような継続した研究の末，1824 年にノルウェーのアーベルが，不可解性の完全な証明を与えました。

3　ガロア理論

講習の後半で具体的な例をあげながら詳しく説明されると思いますが，本日の最後に，ガロア理論とはどんな内容かを簡単に触れることにします。

3.1　ガロアの定理

代数方程式の代数的解法についてのガロアの定理は，
体 K における代数方程式 $f(x)=0$ が代数的に解ける必要十分条件は $f(x)$ のガロア群 G が可解群となることである
という内容です。5 次以上の代数方程式のガロア群が一般には可解群とならないことから，解の公式が存在しないことが示され，さらに，アーベルの証明には含まれない，代数的に解ける条件まで示しています。

ここで，ガロアが考えた方程式のガロア群を大雑把に言えば，方程式の解の有理式の値を変化させない置換の群のことを指しています。そして，このガロア群の正規部分群の列の次数がそれぞれ素数になるとき，可解群と呼んでいます。

3.2　ガロアの理論

ガロアの理論は，現代流に言えば，体の拡大列と自己同型群の部分列の対応を表しています。体の拡大列 $K \subset K' \subset L$ と，自己同型群の部分列 $G \supset H' \supset H$ との間に，図のような対応を考えることで，体の構造を，自己同型群の構造で調べることができるようにするのです。

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, leftrightarrow] & H \arrow[d] \\
K' \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & H' \arrow[d] \\
K \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & G
\end{tikzcd}$$

参考文献

彌永昌吉「ガロアの時代 ガロアの数学」シュプリンガー・ジャパン,1999
加藤文元「ガロア」中公新書,2010
安倍齊「代数ことはじめ」森北出版,1993
中村亨「ガロアの群論」講談社,2010

講習を終えて

初日の内容は，ガロアの生涯の紹介とガロア理論の概説でした。ガロアの名前を聞いたことのある生徒は 4 人だけで，ほとんど生徒たちにとって初対面のガロアは，どんな人物だと映ったでしょうか。

前半ではガロアの誕生から決闘の末亡くなるまでの 20 年間を，数学者と政治活動家の両面を紹介するように辿りました。数学の業績は踏み込み過ぎると急に難易度が上がってしまうため，天才数学者の「天才」ぶりにあまり触れられなかったかもしれません。それでも，激動の時代を生きたガロア像が伝わったのではないかと思います。配布したプリントに書ききれなかったエピソードも話して前半を終了しました。

後半は数学の内容で，1 次，2 次方程式の公式から始めて，虚数，複素数を導入して，3 次，4 次方程式の公式までを一区切り。5 次方程式の証明への道すじに，解の対称性と置換が関わることを説明し，ガロアの理論とはどんなものかを簡単に触れて終了となりました。

人物と公式の話を聞くばかりの初日でしたが，数学らしい話は明日より本格化します。