2012 年度

数学科リレー講座【１日目】

-複素数とはこんなもの-

目次

1　数の拡張

数の概念を

$$\text{自然数} \longrightarrow \text{整数} \longrightarrow \text{有理数} \longrightarrow \text{実数}$$

と拡張することによって, 今まで考えられなかった様々なことを考えられるようになった. 例えば,

- 「3 個のリンゴから 3 個のリンゴをとったとき, お皿に残るリンゴは何個か？」
- 「3 ℃より 5 ℃低い気温は何度か？」
- 「3 倍すると 7 になる数はいくつか？」
- 「一辺が 1 cm の正方形の対角線の長さは何 cm か？」

などの質問は自然数 $(1, 2, 3, \cdots)$ の範囲だけでは答えることができない. 負の数や有理数, 無理数などの概念を導入することによって, 初めて答えることができるようになる. ここでは, さらに数の概念を拡張していく.

さて, そもそもこれ以上拡張できるのだろうか？

次のような問題を考えてみよう.

足して 10, かけて 40 になるような 2 つの数はあるか？

2　複素数

前のページの問題を考えてみよう.

問1　足して 10, かけて 40 になるような 2 つの数は何だろうか.

前のページの考察から,

2 乗したら負になる数

を考えることができれば, この問題は解決できそうである. そこで, 次のような定義をする.

虚数

2 乗すると -1 になる「新たな数」を考え, その 1 つを i で表し, これを**虚数単位**とよぶ. すなわち,

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

となる.
虚数単位 i を用いて表された数を**虚数**という.

そもそも数なのに, 文字を使うことに違和感を感じるかもしれないが, 1, 2, 3 などに比べると $\dfrac{1}{2}$ や $\sqrt{2}$ もかなり不思議な表記で,

$$1, 2, 3 \text{ などからしたら}, \frac{1}{2} \text{ も } \sqrt{2} \text{ も } i \text{ も同じ}$$

なのである. そう思うと i にも違和感を感じなくなる.

ちなみに, なぜ i を使うのかというと, 昔, 2 乗すると負になる数は, 現実には存在しない「想像上の数」ということで, 虚数 (imaginary number) と名付けられた. i はこの頭文字からきている.

虚数の歴史 3 次方程式の解の公式を編み出したとされるタルターリア (1499[1500]-1557) によって, 虚数を考えることのきっかけが作られた. カルダーノ (1501-1576) は, どんな 2 次方程式でも虚数があれば答えを与えることができると, 自身の著書で示している. さきほどの「足して 10, かけて 40 になるような 2 つの数は何か」という問題は, カルダーノの本の中で出てくる問題である.

しかし, 虚数の存在はすぐには認められたわけではなく, デカルト (1596-1650) は「2 乗すると負になる数」に対して, 否定的な意味を込めて「想像上の数 (=虚数)」とよんだ.

i と表されるようになったのはもう少しあとで, オイラー (1707-1783) が $\sqrt{-1}$ を虚数単位として, その記号を i と定めた. その後, 「オイラーの等式」と言われる有名な等式にたどりつく. この辺りは 5, 6 日目に話してもらえるはずである.

さらに, ガウス (1777-1855) によって複素数平面の概念が導入され, 多くの発見がされていく.

複素数

2 つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて,

$$a + bi$$

の形で表される数を**複素数**という.

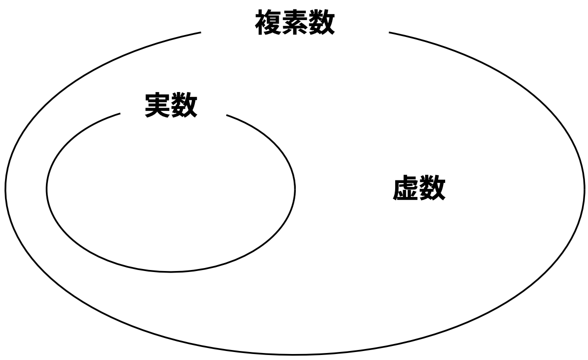
例えば,

$$2+3i, \quad 3-\sqrt{2}i, \quad 2+i$$

などはいずれも複素数である.

複素数とは, 1 および i という 2 つの単位, すなわち, 「2 つの**素**をもつ数」という意味である.

- 複素数 $a+bi$ において, a を**実部**, b を**虚部**という.
- 複素数 $a+bi$ は, $b=0$ のときは実数である.
- 実数でない複素数は虚数である.
- 複素数 $a+bi$ において, $a=0$, $b \neq 0$ のとき, すなわち, bi の形をしている複素数を**純虚数**という.



また, 複素数 α と β が**等しい**ということを, 次のように定める.

複素数の相等

複素数の相等は, a, b, c, d を実数として, 次のように定める.

$$\boldsymbol{a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c} \text{ かつ } \boldsymbol{b=d}$$

とくに,

$$\boldsymbol{a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0} \text{ かつ } \boldsymbol{b=0}$$

3　複素数の計算

「分数の約分や通分」「根号を含んだ計算」などもそうであるが, 新しい数を導入した場合, 計算規則がとても大切になってくる．自由気ままに自分の思うように計算してしまうとトンデモナイことになる．例えば, 根号を含んだ計算で

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b} \quad (\text{ただし, } a,\ b \text{ は正の数})$$

としてはいけなかった．また, 「分数の約分」で次のようにしたら大変である．

M 君は分数 $\dfrac{16}{64}$ を簡単にしようとして, 分母と分子に同じ数 6 があるので, それを斜線で消して,

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

とした．

こんなふうにしたら, 当然答えは合わなくな・・・

問2　さて, $\dfrac{16}{64}$ のように十の位と一の位が異なる 2 桁同士の分数の中で, 上のようにたまたま約分した結果が一致してしまうような分数は他にあるか．

i を含んだ計算では, 次のように計算規則を定める.

i を含んだ計算

i を含んだ計算は, i をふつうの文字と同様に扱い, $i^2 = -1$ を用いて簡単にする.

具体的にみていこう.

問3 次の計算をせよ.

(1) $2\,i + 3\,i$

(2) $3\,i - 5\,i$

(3) $4\,i \times (-3\,i)$

(4) i^3

もう少し難しい場合はどうなるのだろうか.

問 4 次の計算をせよ.

(1) $(2+3\,i)+(1+4\,i)$

(2) $(2+3\,i)-(1+4\,i)$

(3) $(2+3\,i)\,(1+4\,i)$

(4) $\dfrac{1+3\,i}{2+i}$

$\boxed{\text{ヒント}}$ (3) $(a+b)(x+y)$ の展開は以下のように行う.

$$(a+b)\ (x+y) = \overset{\text{①}}{ax} + \overset{\text{②}}{ay} + \underset{\text{③}}{bx} + \underset{\text{④}}{by}$$

(4) は分母に i を含まない形にする.

これをまとめると, 次のような計算規則になる.

複素数の加減乗除

(加法) $(a+b\,i)+(c+d\,i)=(a+c)+(b+d)\,i$

(減法) $(a+b\,i)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)\,i$

(乗法) $(a+b\,i)\,(c+d\,i)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$

(除法) $\dfrac{a+b\,i}{c+d\,i}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$

このように書かれるとややこしく感じるが, これもまた数学.

問5 次の計算をせよ.

(1) $6\,i-4\,i$

(2) $3\,i\times 2\,i$

(3) $(3\,i)^2$

(4) i^4

(5) $(-1+5\,i)-(3-2\,i)$

(6) $(-1+5\,i)\,(3-2\,i)$

(7) $\dfrac{1}{i}$

(8) $\dfrac{1-i}{1+i}$

複素数の計算に慣れてきたかな. これで 6 日目には i^i も求められるようになっています. (近似かつ主値であれば.)

■共役な複素数　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して, $a - bi$ を α の**共役な複素数**といい, $\overline{\alpha}$ で表す.

■複素数の絶対値　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して,

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$$

というものを考え, これを複素数 α の**絶対値**という.

$|\alpha|$ が何を意味しているのかは, これから学んでいく.

■複素数の大きさ　複素数では, 大小をどのように考えたらよいだろうか. 例えば, $2i$ と 3 ではどちらのほうが大きいのだろう.

問6　$i > 0$ か. それとも $i < 0$ となるか. さて, どちらでしょうか.

したがって,

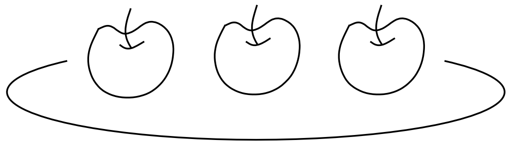
複素数では, 大小や正負は

問7 P.4 **問 1** をあらためて考えてみよう.

4 そもそも複素数を考える必要はあるのか？

ここで, 「負の数」の導入として, 次のような問題を考えてみよう.

「お皿の上にリンゴが 3 個あります. 5 個のリンゴをとると残りは何個でしょうか.」



この問題では「-2 個のリンゴ」をイメージすることはできないので, 負の数を考える意味が見当たらない. しかし, 次のような問題はどうだろうか.

「3 ℃より 5 ℃低い気温は何度ですか？」

「東に 200 m 進みました. その後, 西に 300 m 戻りました. さて, 初めにいた位置からどちらの方向にどのくらい進みましたか？」

上の問題では, 負の数を考える意味が出てくる.

このように, 数学では,

ある現象を説明するのに, このような概念を使うとうまく説明できる

というものがいくつも存在する. そして, 「うまく説明できるような概念がなければ, 構成しよう」というのが, 数学の考え方である. (もちろん, 好き勝手に作れるわけではないが.)

リンゴの数を数えるときに必要なかった負の数も, 温度を考えるときには必要になったし, これはいらないだろうと思われていた無理数も, 正方形の対角線の長さを記述するのに必要であった.

実は複素数も, ある特定の世界ではとても重要な役割を担っている. 例えば, 量子力学で基礎をなす「シュレーディンガー方程式」では i が出てくる.

このように, 目に見えない数だからという理由で, 考えるのはやめるというのはもったいない. とは言っても, 歴史的にみても, 「負の数」や「無理数」以上に想像しにくい「虚数」は, 「虚なる数」という名付け方からもわかるようにすぐに受け入れられたわけではなかった. しかし, 長い数百年という年月の中で, 徐々にその存在が認められるようになった.

僕らも気楽に虚数の存在を認めていったらよいのかもしれない. きっと数百年後には受け入れられているはずです！

5 複素数のイメージ

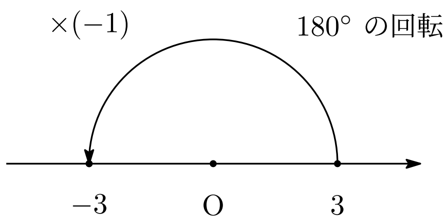
負の数は数直線を考えることでイメージができた．また, 無理数は正方形の対角線を考えることでイメージできた.

さて, 複素数はどのようなイメージをもてばよいだろうか.

問8 $3 \times (-1) = -3$ などからわかるように, 数直線上において,

-1 をかけることは, 原点 O を中心とする反時計回りに $180°$ の回転

を意味する．このことを基にして, i をかけることの意味を考えてみよう.



このように考えると,

i をかけることは,

を意味する.

また, $3 \times i = 3i$ であるから,

$3i$ は, 数直線上で　　　　　　　　　　の位置にある

と考えることができる. (はみ出してしまう・・・)

問9 P.10 **問5** で次のような計算をした.

$$i^4 = 1$$

これも今考えたイメージ通りだろうか. また,

$$2 + 3i$$

は数直線上でどこにあると考えるのが妥当だろうか.

6　複素数平面

前のイメージから考えると, 実数を数直線に対応させたように, 複素数は座標平面に対応させるとよさそうである. これより, 次のように定義する.

複素数平面

平面上に座標軸を定め,

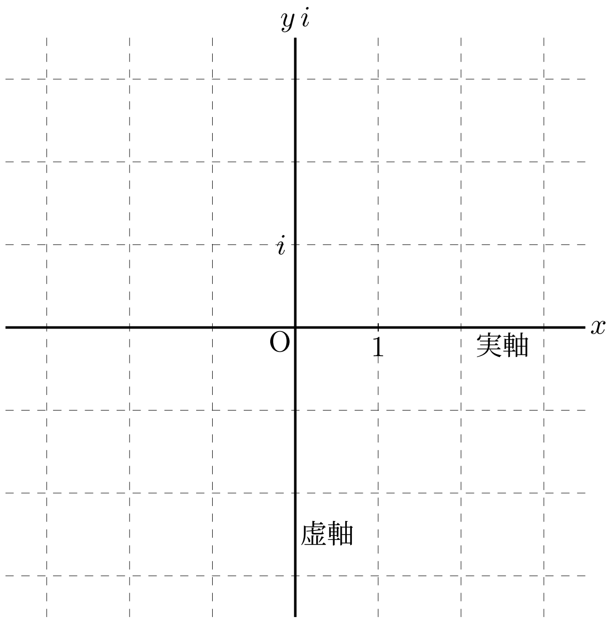
複素数 $\boldsymbol{\alpha = a + b\,i}$　に　点 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　を対応

させる.

このように定義すると, すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され, また, 平面上のすべての点はそれぞれ 1 つの複素数で表される.

このように, 各点 (a, b) が, 複素数 $\alpha = a + b\,i$ を表している平面を**複素数平面**, または, **ガウス平面**という.

複素数平面では, x 軸を**実軸**, y 軸を**虚軸**という.

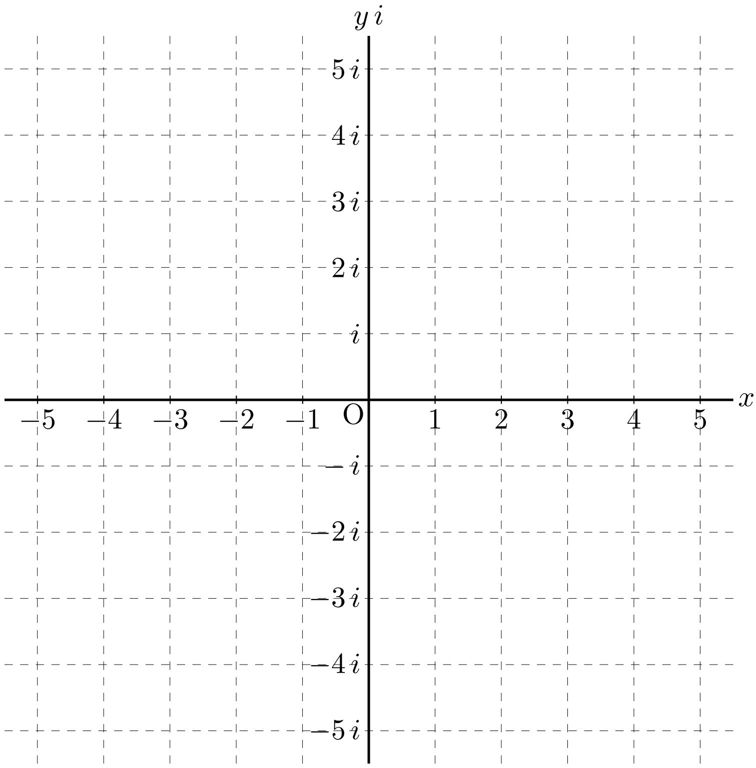


複素数 α に対応する点 P を, $\mathrm{P}(\alpha)$ と表す. また, 単に点 α ということもある.

問10 $\alpha = 2 + 4\,i$ とする.

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \overline{\alpha}, \quad -\overline{\alpha}$$

の表す点を複素数平面上に示せ.

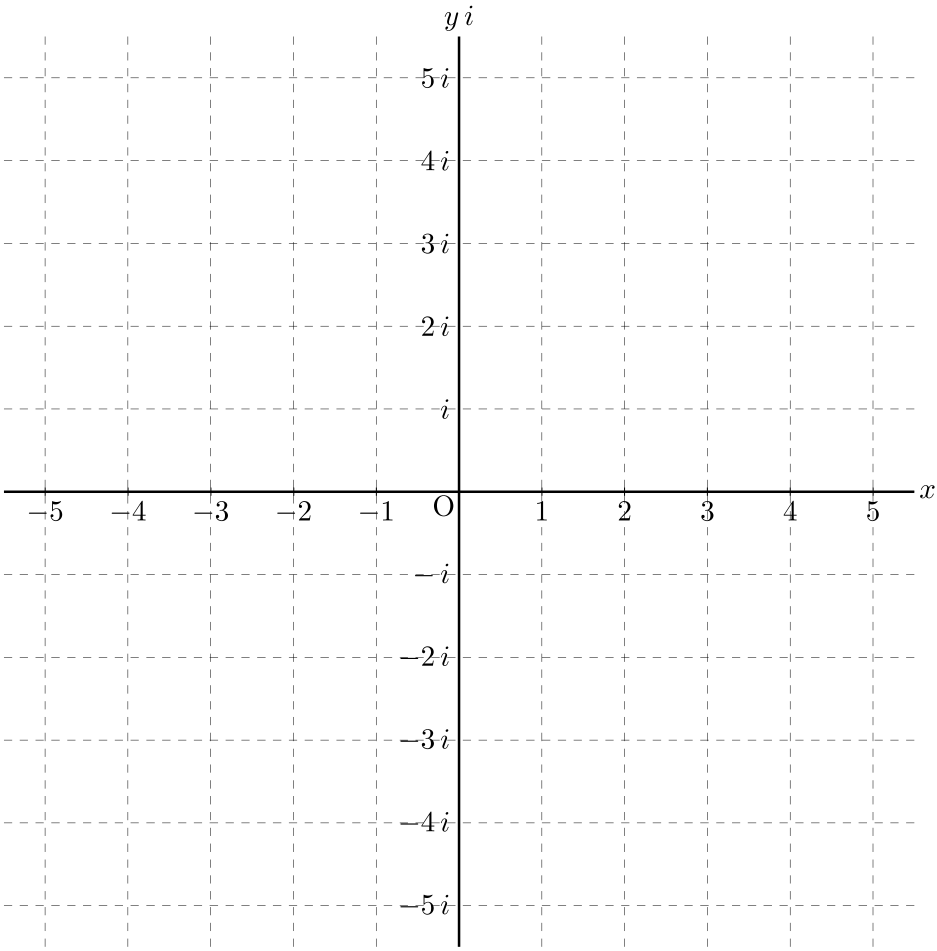


- 先ほど定義した $|\alpha|$ は, 複素数平面上では, 点 α と原点 O との距離を表している.
- 点 α と点 $\overline{\alpha}$ は実軸に関して対称である.

問11 次の計算をし, 演算の図形的な意味を考えよ.

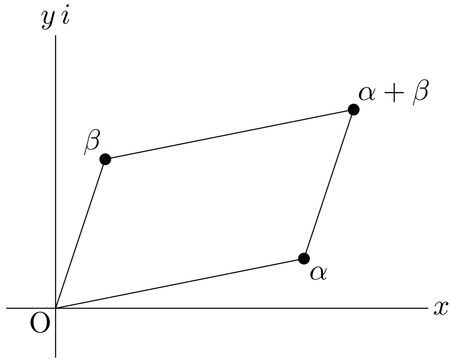
(1) $(3+3i)\times i$ (2) $(-2-i)\times 2$ (3) $(4+i)+(1+3i)$

(4) $(4+i)-(1+3i)$ (5) $(1+i)^2$ (6) $(1+i)^8$



複素数の和

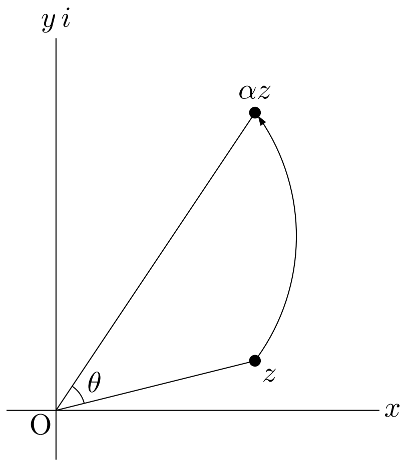
複素数平面上の 3 点 O, α, β が同一直線上になければ, 4 点 O, α, $\alpha+\beta$, β は平行四辺形をつくる.
言い換えると, 点 $\alpha+\beta$ は点 α を複素数 β だけ, 平行移動した点である.



複素数 α に対して, x 軸の正の部分となす角を**偏角**といい, $\arg \boldsymbol{\alpha}$ で表す.

複素数の積と回転

複素数の積では, 絶対値は積となり, 偏角は和になる.
すなわち, 複素数 α に対して, $\arg\alpha=\theta$ とすれば, αz の表す点は, 点 z を原点 O を中心として, 反時計回りに角 θ だけ回転させ, 絶対値は $|\alpha|$ 倍となる.



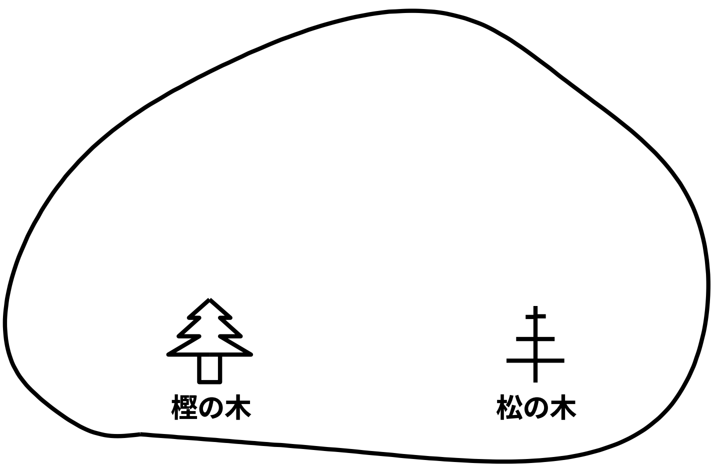
7　宝探し

問12　探検家 I. J. は自宅の屋根裏部屋で, 宝のありかを示すと思われる, 次のような古文書を発見した.

> **『島には，裏切り者を処刑する絞首台（こうしゅだい）と，1 本の樫（かし）の木，そして 1 本の松の木がある．**
> **まず，絞首台の前に立ち，樫の木に向かって歩数を数えながらまっすぐ歩け．　樫の木にぶつかったら，直角に右へと曲がり，同じ歩数だけ歩いたらそこに第一の杭（くい）を打て．**
> **絞首台にもどり，今度は松の木に向かって歩数を数えながらまっすぐ歩け．　松の木にぶつかったら，直角に左へ曲がり，同じ歩数だけ歩いたらそこに第二の杭を打て．　宝は，第一の杭と第二の杭の中間点に埋めてある』**

長い冒険の末, 探検家 I. J. はそれと思わしき孤島に降り立った. しかし, その島には樫の木と松の木はあったものの, 肝心の絞首台が見つからなかった. どうやら, 長い年月の中で朽ち果ててなくなってしまったようだ. 意外と切り替えの早い探険家 I. J. は, 宝は諦め, 仕方なくその島を後にしたのだった.

さて, 君たちならこの宝を探し出すことができるだろうか.



問 12 を考えてみよう.

この問題はジョージ・ガモフ (1904-1968, 物理学者, ビックバン宇宙論の創始者の一人) が, 複素数の計算の重要さを強調するために, 自身の本で取り上げたもので, ジョージ・ガモフの問題として知られている.

8　複素数の構成

次のように複素数を導入することもできる.

ハミルトンによる複素数の定義

次の 2 つの実数の組 (a,b), (c,d) があって, 次の演算規則を満たすものとする.

（i）**(加法)** $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

（ii）**(乗法)** $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

このとき, 2 つの実数の組 (a,b) を**複素数**という.

実数 a に対して, $(a,0)\longleftrightarrow a$ という対応で, 加法と乗法の演算規則もそのまま保たれるので,

$$\text{複素数 } (a,0) \text{ を実数 } a \text{ と同一視する} \qquad \cdots\cdots(*)$$

また, $(0,1)$ を i で表すことにする. すなわち,

$$i=(0,1)$$

とすると, 上の演算規則と $(*)$ から,

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

また,

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=a+b\,i$$

となることがわかる.

減法と除法は, それぞれ加法・乗法の逆演算として,

(iii)　**(減法)** $(a,b)-(c,d)$ は,

$$(a,b)=(x,y)+(c,d)$$

を満たす (x,y)

(iv)　**(除法)** $(a,b)/(c,d)$ は,

$$(a,b)=(x,y)\cdot(c,d)$$

を満たす (x,y)

と定義する.

参考文献

[1] Newton 別冊, 虚数がよくわかる, ニュートン プレス, 2009 年
[2] 飯高茂他, 教科書 数 II, 東京書籍
[3] 小澤嘉康, 実用複素平面
[4] 大和澄夫, 複素数とその canvas〜複素数で描く世界〜, 2010
[5] 志賀浩二, 複素数 30 講, 朝倉書店, 1989 年
[6] 占部博信, 複素関数論, サイエンス社, 1999 年
[7] 佐々木力, 数学史, 岩波書店, 2010 年