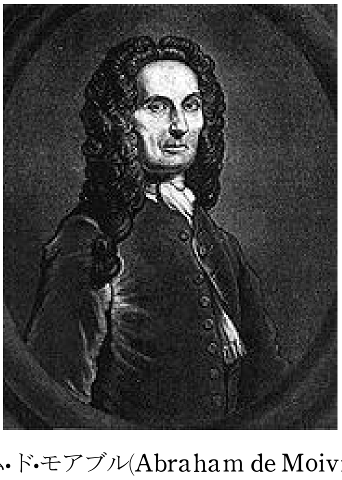
2012 年度 夏期講習

数学科リレー講座 3 日目

複素数の極形式

ド･モアブルの定理



アブラーム･ド･モアブル(Abraham de Moivre, 1667 − 1754)
フランスの数学者

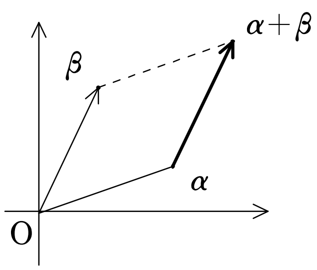
目次

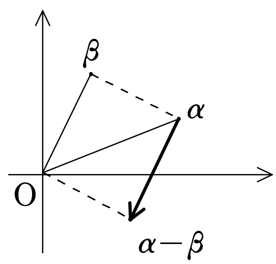
1. 1 日目の復習から

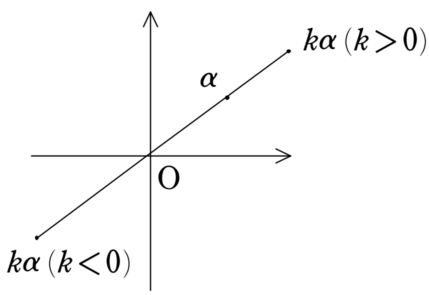
1 日目の問 11 から，次のようなことが分かった。

複素数の和，差，実数倍の図形的な意味

α , β を複素数，k を実数とする。
α に β を足すことは，複素数平面において，原点O から点 β に向かう分だけ点 α を**平行移動**することを意味する。
α から β を引くことは，β から原点O に向かう分だけ α を平行移動することを意味する。
α を k 倍することは，原点Oを中心として点 α を k 倍に**相似拡大** (縮小) することを意味する。



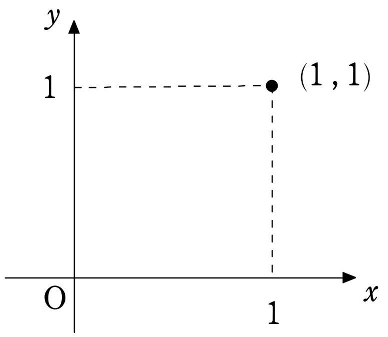




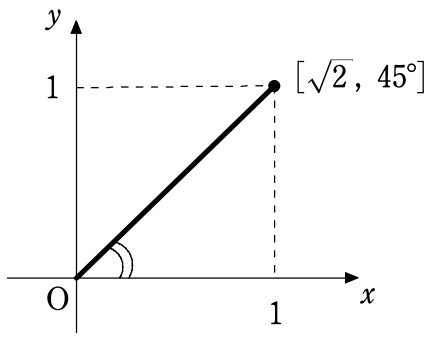
複素数の掛け算が<u>**回転移動＋相似拡大**</u>を意味することも，1 日目の問 11 から実感できただろう。ということは，複素数の表示に「**回転量**」みたいなものが見えると良さそうな気がする。そんな表し方はできるのだろうか？

2. 極形式～複素数のもう一つの表し方～

まずは座標平面において，座標の別の表し方を考えてみよう。



→

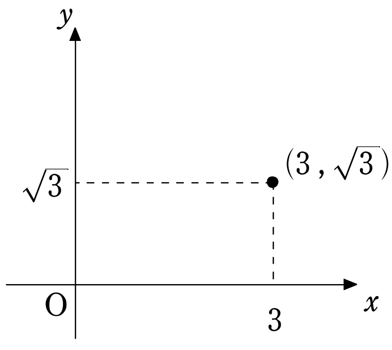


「原点Oから左右，上下にどれだけ離れているか」で点の位置を表す

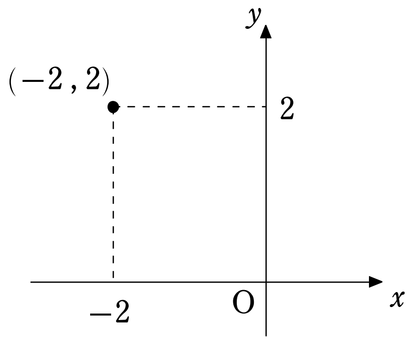
「原点Oから何時の方向にどれだけ離れているか」で点の位置を表す

問 1．次の点を [　，　] で表せ。

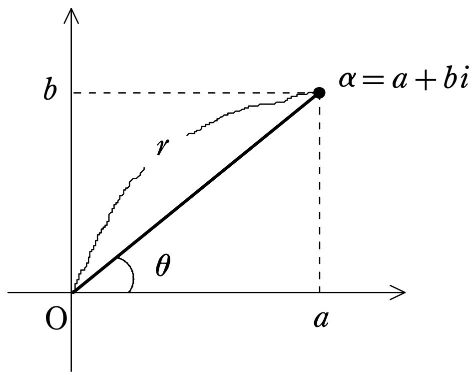
(1)



(2)



複素数平面でも同じように考えて，複素数の別の表し方をしてみよう。



$a+bi$ が 0 でないとき，右図において

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ より分母を払って

$a=r\cos\theta$ ，$b=r\sin\theta$

よって

$$a+bi=r\cos\theta+r\sin\theta\cdot i$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

※ $\sin(\theta\times i)$ ではなくて $(\sin\theta)\times i$ であることを明示するため i を前に書く。

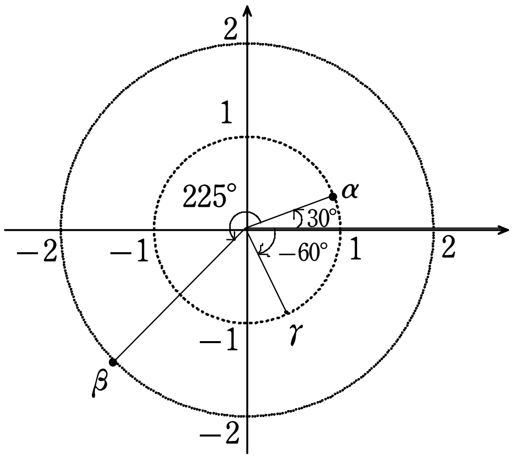
まとめると，

$\alpha=a+bi$ は，$\alpha\neq 0$ のとき $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …(∗) と表される。 r の値を α の大きさといい，$\lvert\alpha\rvert$ と書く。三平方の定理より，$\lvert\alpha\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$ θ の値を α の偏角といい，$\arg(\alpha)$ と書く。

(注1) θ は図では鋭角になっているが，正確には実軸(横軸)から線分Oαまで反時計回りに測った値を指す。ちなみに，時計回りに測った値は負になる。また，$\alpha=0$ のときは θ は定まらないが，(∗)において $r=0$ の場合であると考える。

(注2) 先ほどの記法に従えば，上の図において $a+bi$ は $[r,\theta]$ とみなせる。このまま話を進めても今日のところは支障ないのだが，後々のことも考えて，正式な表し方を紹介した。
三角関数に不慣れな人は，とりあえず $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $[r,\theta]$ と適宜読み替えて考えよう。

例. $\alpha = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$, $\beta = 2(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$, $\gamma = \cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)$ を複素数平面に図示すると,



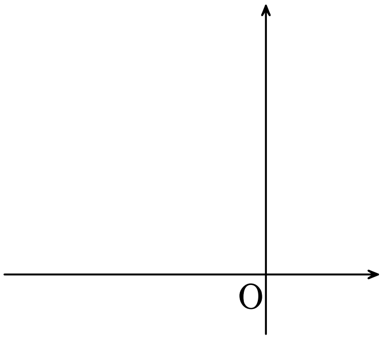
問 2 . では, $\zeta = \cos 390^\circ + i\sin 390^\circ$, $\eta = \cos 750^\circ + i\sin 750^\circ$ を図示すると, どうなるだろうか。

一つの複素数を極形式で表すのに，偏角は360° の整数倍を除いて一意的に定まる。

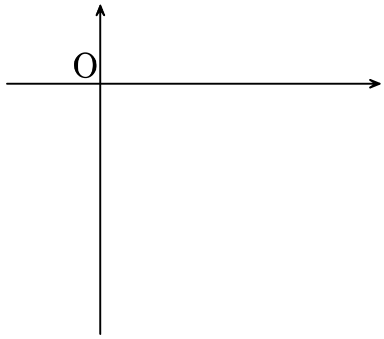
そこで普段は，偏角は 0° より大きく 360° 以下で書く。場合によって，負の値を用いて書くこともある。

問 3．次の複素数を極形式で表せ。

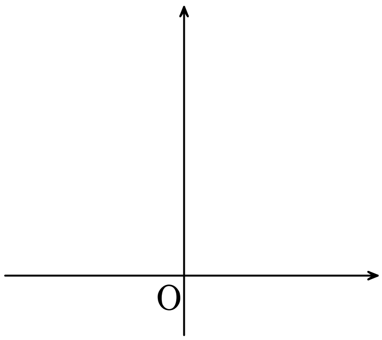
(1) $-1+\sqrt{3}\,i$



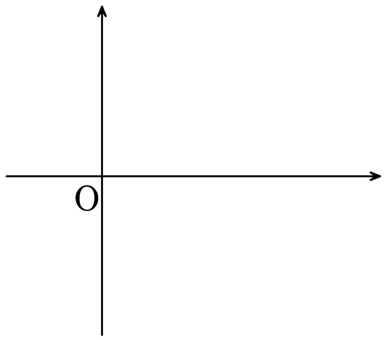
(2) $2-2i$



(3) $4i$



(4) 1

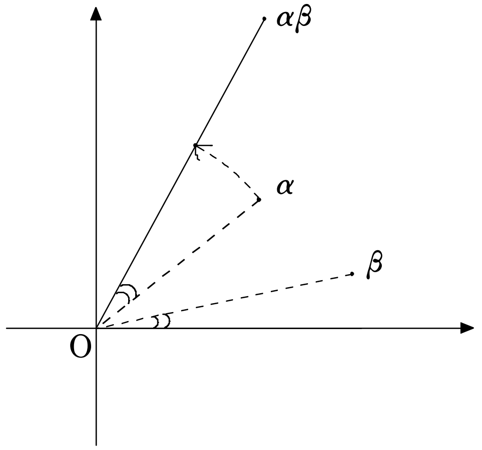


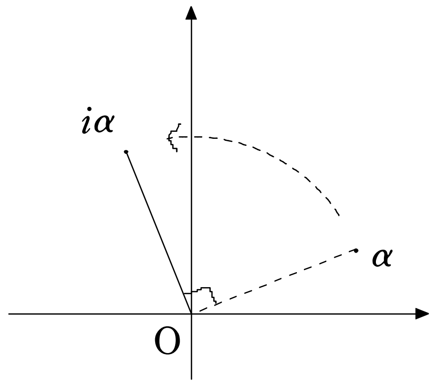
3. 積の図形的な意味

α , β を複素数とする。

α にβ をかけることは，複素数平面において，原点Oを中心として点 α を反時計回りに$arg(\beta)$ **回転移動**し，$|\beta|$ 倍に相似拡大することを意味する。

特に，αをi 倍することは，原点Oを中心として点 α を反時計回りに90° 回転移動することを意味する。





式で表現すると，次のようにも書ける：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

証明は，左辺を計算し，「三角関数の加法定理」を用いることで右辺が導かれる。

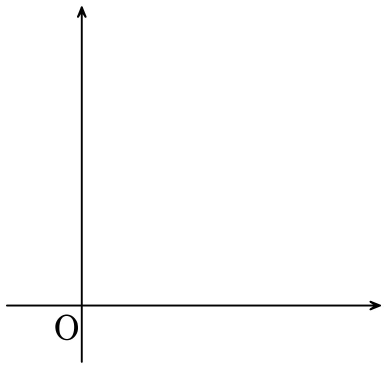
現段階では，これを認めて話を進めることにする。

例. $\alpha=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$, $\beta=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$ について，$\alpha\beta$を求めてみよう。

α にβ をかけると考えれば，複素平面において点 α を反時計回りに$arg(\beta)$ 回転移動し，$|\beta|$ 倍に相似拡大した点が$\alpha\beta$ に対応する。

$|\beta|=$ ＿＿＿＿＿＿＿ , $\arg(\beta)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ だから，

$\alpha\beta=$



(確認) $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)$, $\beta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$ だから，

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i)\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}\,i^2)\\&=2i\end{aligned}$$

まとめ

複素数どうしの積は，大きさどうしは掛けて，偏角どうしは足せば良い！

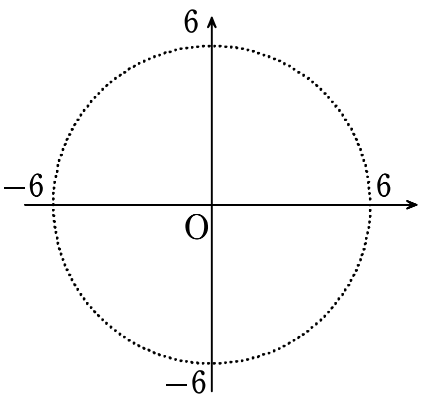
問 4．次の積を極形式で求め, 複素平面に図示せよ。

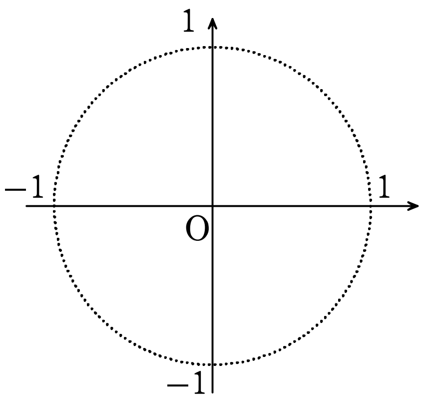
(1) $2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \times 3(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$

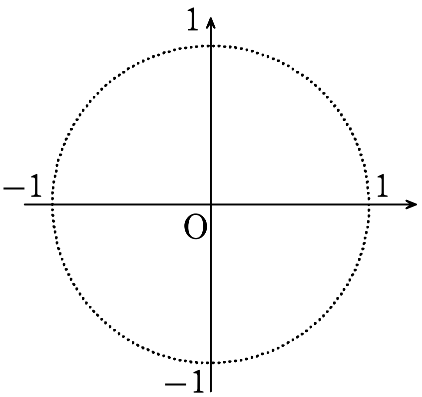
(2) $(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\{\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)\}$

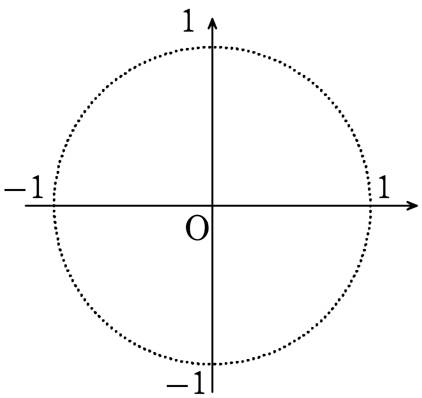
(3) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

(4) $(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)^6$









4. ド･モアブルの定理

問 4 の結果より,

① $(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots\cdots\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)$$

② $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ （n は自然数）

となることは納得してもらえるだろうか。

①の式は, $(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$,
$\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$, ……というように帰納的に導かれる。厳密には, 「数学的帰納法」を用いる。

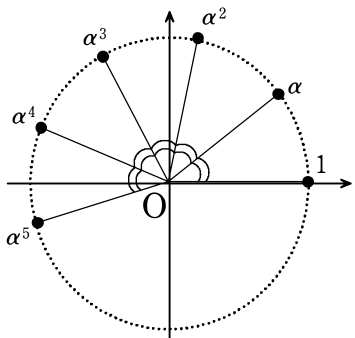
②の式は, ①の式において θ_1 , θ_2 , …… , θ_n をすべて θ に置き換えると得られる。実は, n は整数としても成り立つ。負の指数については最終日で紹介する。

②の式が成り立つことを, **ド･モアブルの定理**という。

ド･モアブルの定理

n 乗は, 偏角を n 倍する

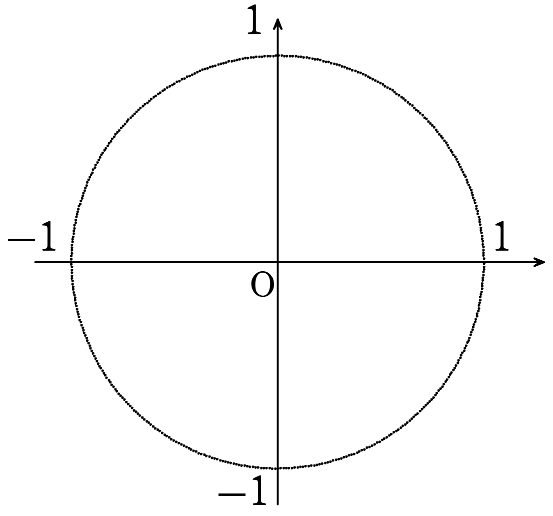
n 乗は, 1 から出発して偏角×n だけ回る



$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$

問5. ①も②も, 複素数の「掛け算」が偏角の「足し算」に読み替えられる, というものです。
　このような計算って, どこかで見たことないだろうか。

問 6． $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{2012}$ を複素数平面に図示せよ。

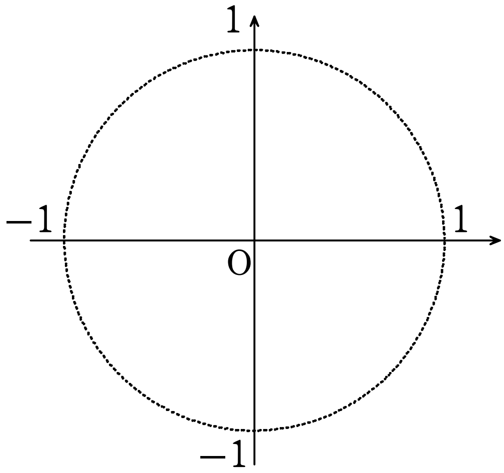


5. 3 乗して1 になる数は 1 だけか？

先ほどの問 4 (4) を思い出してもらいたい。

$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ は 6 乗すると1 になるので，方程式$z^6 = 1$ の解であるといえる。いままでの数の範疇であれば解は± 1 だが (注)，複素数までひろげると他にも解がありそうだ。

他にどんな解があるか，求めてみよう。1 から出発して，6 回自分自身の偏角の分だけ回転して 1 に戻ってくるようなものを考えると…。

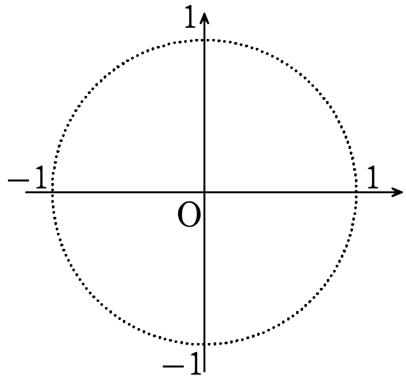


(注) $z^6 = 1$ より$z^3 \times z^3 = 1$ なので，$z^3 = \pm 1$．　よって　$z = \pm 1$．

方程式$z^6=1$の解を複素数の範囲で考えると，全部で6つあった。

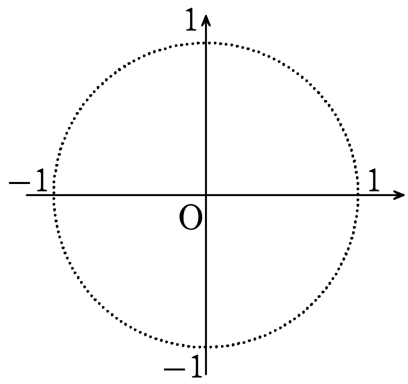
さて…

問7．3乗して1になる数は1だけか？



では，$z^9=1$だったら，解は全部で9つなのだろうか。

問8．方程式$z^9=1$を，複素数の範囲で解け。



※一般に，方程式$z^n=a$（a：複素数）は，複素数の範囲で考えるとn個の解をもつ。
詳しくは，最終日に出てくる「代数学の基本定理」でも触れる。

6. 演習問題

問 9． レベル：★

複素平面上に$z=1+i$がある。このzと原点Oを頂点とする正三角形の残りの頂点に対応する複素数を求めよ。

ヒント：正三角形の1つの内角は60°だから…

問 10． レベル：★★

$\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$ を$a+bi$ の形で表し，$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。

ヒント：$\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ$ を時計回りに30°回転させればよいが，時計回りの回転は掛け算の逆になるから…

問 11． レベル：★★★

$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ となることを，積の図形的な意味から説明せよ。

ヒント：$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$ としたとき，$\overline{\alpha}$ はどのように書けるか……

問 12． レベル：★★★

複素数α,β,γが $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=2$ を満たすとき，複素平面においてα,β,γはどのような位置関係にあるだろうか。$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=2i$ の場合はどうか。

ヒント：分母を払うと$\beta-\gamma=2(\alpha-\gamma)$．$\alpha-\gamma$，$\beta-\gamma$ の図形的な意味を考えると……
この問題が理解できると，1日目の「宝探し」の問題も解けるはず！