2012年度
数学科リレー講座
4日目

〜複素数平面上の幾何〜
〜複素数の関数〜

2012.8.23

数学科　平山裕之

目 次

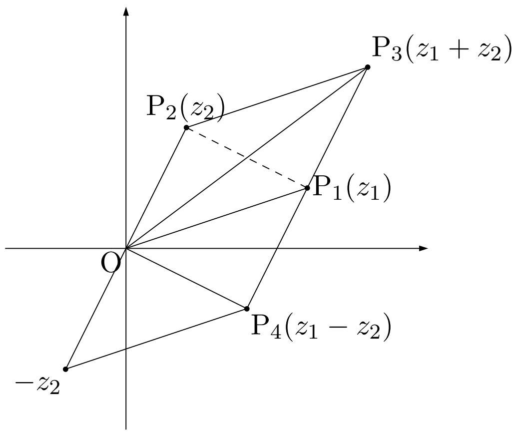
1　複素数と複素数平面

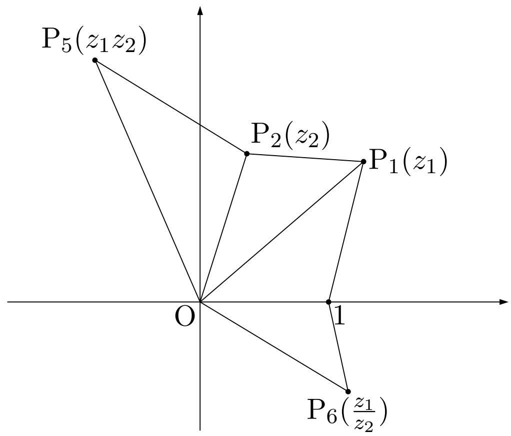
複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) は平面上の点 (a, b) を対応させることで，平面上の点と 1 対 1 に対応します。複素数と平面上の点を対応させると，平面における図形の性質を複素数の計算を用いて説明できるようになります。

複素数 α の表す複素数平面上の点 A を $\mathrm{A}(\alpha)$ のように表すことにします。

1.1　和，差，積，商

昨日までの復習として，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{P}_1(z_1), \mathrm{P}_2(z_2)$ が与えられたとき，2 数 z_1, z_2 の和，差，積，商が平面上でどのような点であるかを確認しておきます。

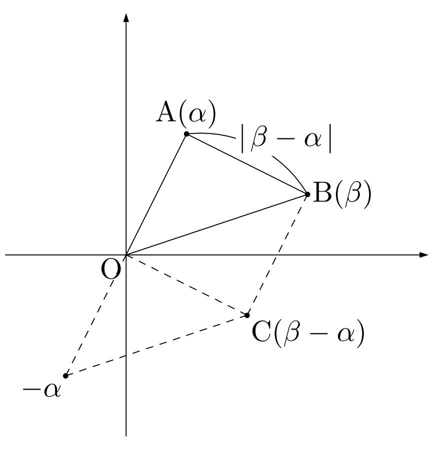


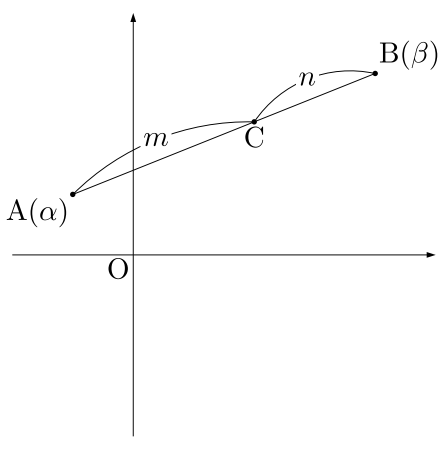


1.2　距離，分点

複素数平面上の図形の長さを考えるために，まず 2 点間の距離を考えます。複素平面上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ が与えられたとき，2 点 AB 間の距離は $|\beta - \alpha|$ になります。もちろん，$|\alpha - \beta|$ でも値は同じです。また，線分 AB を $m : n$ に内分する点 C は $\dfrac{n\alpha + m\beta}{m+n}$ で求められます。

特に，線分 AB の中点は，AB を 1 : 1 に内分する点ですから，$\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ になります。



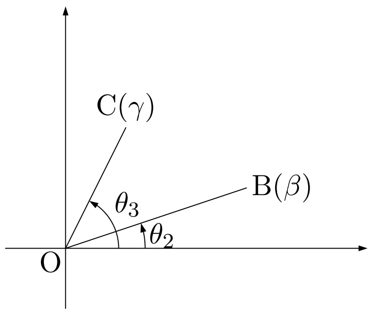


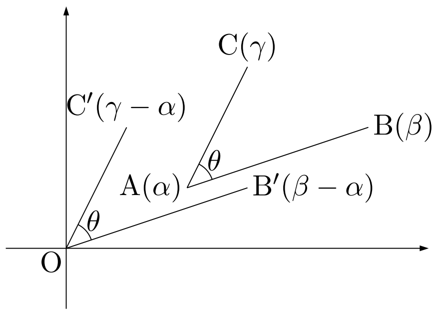
1.3 角度

次に複素数平面上の図形の角度を表すことにします。複素平面上に 3 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ が与えられたとき，$\angle\mathrm{BAC}$ を求めます。

まず，簡単のために 3 点 $\mathrm{O}(0), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ について，$\angle\mathrm{BOC}$ を求めることにします。$\arg\beta = \theta_2, \arg\gamma = \theta_3$ とすると，図において，$\angle\mathrm{BOC} = \theta_3 - \theta_2$ になります。偏角の差は複素数の商で求められたので，$\angle\mathrm{BOC} = \arg\dfrac{\gamma}{\beta}$ です。

一般の角 $\angle\mathrm{BAC}$ の場合は，点 A が原点 O にくるように全体を平行移動します。このとき，B, C は $\mathrm{B}'(\beta-\alpha), \mathrm{C}'(\gamma-\alpha)$ に移動します。したがって，$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B}'\mathrm{OC}' = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ です。





特に，角度が直角になる場合は重要です。$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ であれば，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角が 90° ということなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数であり，逆も成立します。

また，$\angle\mathrm{BAC} = 0^\circ$，$180^\circ$ であれば，3 点 B, A, C は一直線上にあり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数です。

問 1. $\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(\sqrt{3}-i), \mathrm{B}(2\sqrt{3}+2i)$ とする。

(1) 線分 AB の長さを求めよ。

(2) 線分 AB の中点を求めよ。

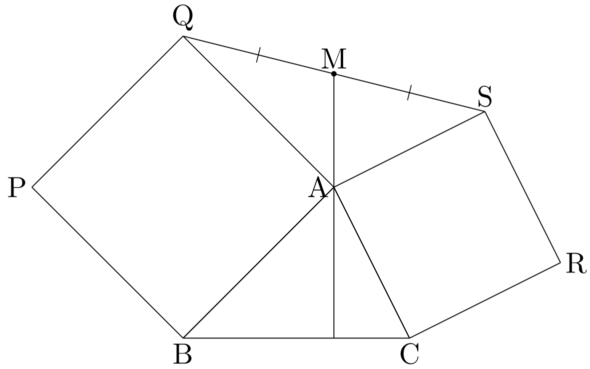
(3) $\angle\mathrm{OAB}$ の大きさを求めよ。

(4) $\angle\mathrm{OBA}$ の大きさを求めよ。

2　図形の性質・証明

2.1　直角であること

問 2. △ABC の辺 AB, AC 上に，図のような正方形 ABPQ, ACRS をつくる。QS の中点を M とすれば，AM ⊥ BC であることを証明せよ。

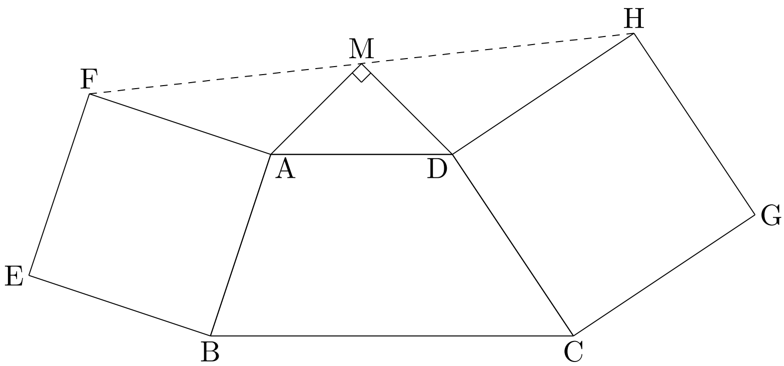


2.2　共線であること

いくつかの点が一直線上にあるとき，これらの点は共線であるといいます。

問 3. $2\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$，$\mathrm{AD} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}$ である台形 ABCD の辺 AB, CD 上に正方形 ABEF, DCGH をつくる。また，辺 AD 上に直角二等辺三角形 MAD をつくる。頂点 F, M, H は共線であることを証明せよ。

[方針] $\mathrm{A}(0), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{D}(\delta)$ とおき，F, H, M を β, δ で表し，3 点が一直線上にあるか調べる。



2.3 正三角形の条件

問 4. 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ について，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形になるために α, β, γ が満たすべき条件を求めよ。

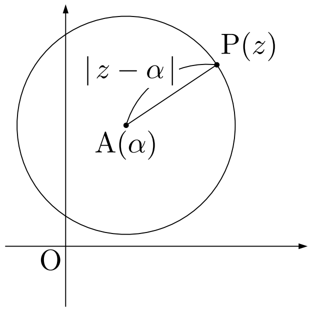
[方針] $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形であるための必要十分条件は $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCA}$

相似の三角形は対応する 2 辺の比とその間の角が等しい。これを α, β, γ で表す。

3　複素数平面上の図形の方程式

3.1　円の方程式

複素数平面上の点 A(α) を中心とした半径 r の円を考えます。どの円周上の点 P(z) も，中心との距離が r ですから，円を表す方程式は $|z-\alpha|=r$ です。さらに式を変形すれば，$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=r^2$ と表せます。

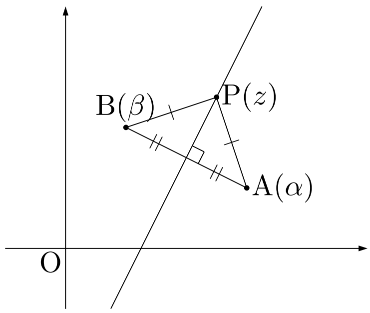


問 5. $|z-\alpha|=r$ から $z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=r^2$ を導け。

3.2　直線の方程式

複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ をとります。2 点 A, B から等距離にある点の集合は，線分 AB の垂直二等分線であり，複素数平面上で直線になります。直線上の点 $\mathrm{P}(z)$ について，$\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$ ですから，$|z - \alpha| = |z - \beta|$ が成り立ちます。

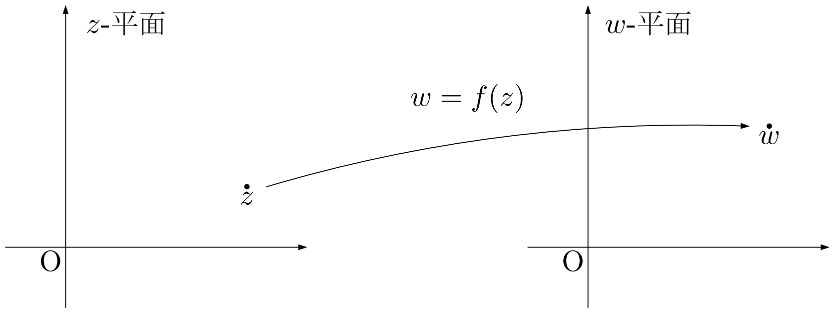
複素数平面における直線の方程式の一般形は，$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = c$ (c は実数) と表せます。
(垂直二等分線の式をもとに一般形を導き出すことができます。)



問 6. $z + \overline{z} = 2$ はどんな直線を表すか。

4　複素数の関数

複素数 z に対して複素数 w を対応させる関数 $w = f(z)$ を考えます。複素数は複素数平面上の各点に 1 対 1 に対応していましたから，関数 $w = f(z)$ は，平面上を動く点 z から，平面上の点 w を対応させることになります。複素数の関数を，z-平面と w-平面と名付けた 2 つの平面を使って表現したのが下の図です。



複素数平面上のすべての点を関数によって動かすとき，1 つ 1 つの点が，どう動かされたかを表現することは難しいことなので，通常は平面上のある図形を移動させた図形がどうなるかを考えます。

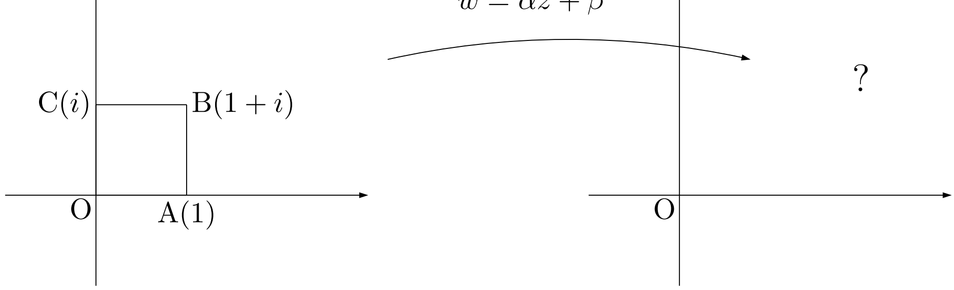
4.1　1 次関数

はじめに，z についての 1 次式で表される関数を考えます。

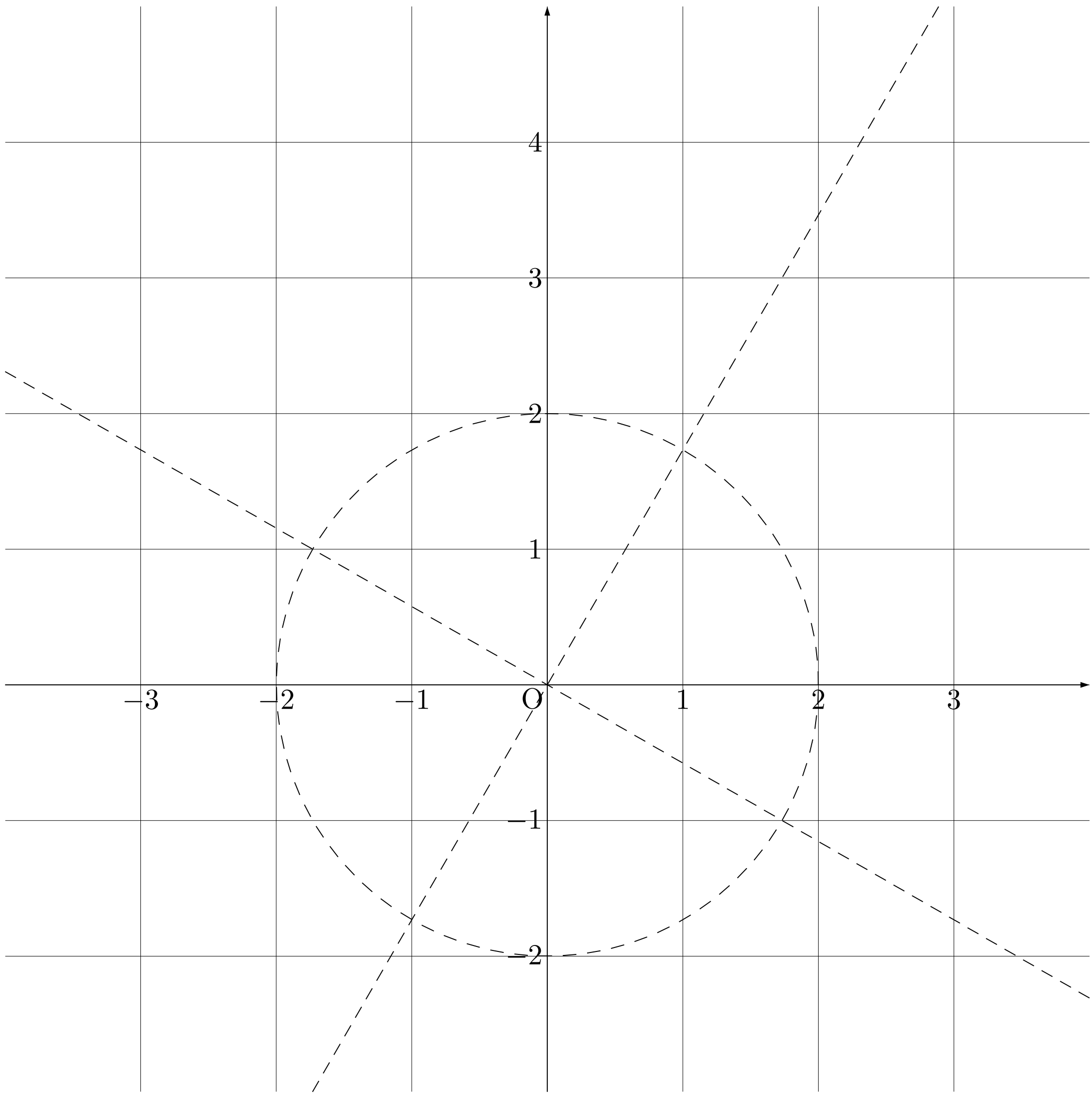
$$w = \alpha z + \beta \ (\text{係数}\alpha, \beta\text{は複素数})$$

念のため確認しておきますが，この式が複素数平面で直線を表しているのではありません。z-平面の点 z に対して，w-平面上に $\alpha z + \beta$ を対応させる規則を表しています。

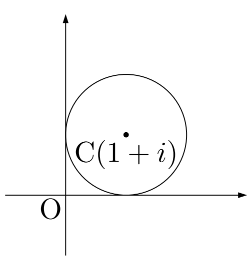
それでは，z-平面上で 4 点 $\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(1), \mathrm{B}(1+i), \mathrm{C}(i)$ をとって正方形 OABC をつくり，1 次関数 $w = \alpha z + \beta$ で移動させましょう。



問 7. 正方形 OABC を関数 $w = (1+\sqrt{3}i)z + (\sqrt{3}-i)$ で移動させた図形を w-平面にかけ。



問 8. C$(1+i)$ を中心とする半径 1 の円を関数 $w = (1+\sqrt{3}i)z + (\sqrt{3}-i)$ で移動させた図形を w-平面にかけ。



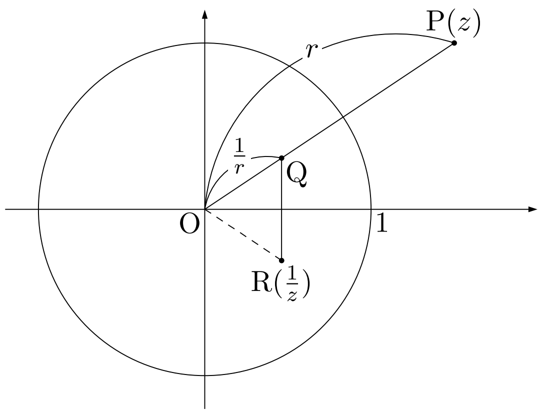
4.2　1 次分数関数

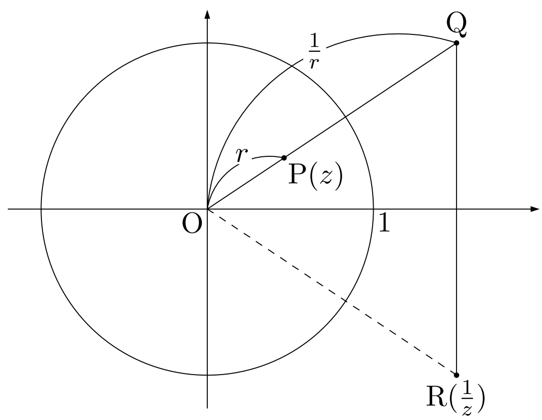
$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (ただし,$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$) で表される関数を 1 次分数関数といいます。(この関数を単に 1 次関数ということもあります。)

$\gamma=0$ のときは，$w=\dfrac{\alpha}{\delta}z+\dfrac{\beta}{\delta}$ となり ($\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ より $\delta=0$ とはなりません),
前節の 1 次関数と同じものです。

$\gamma\neq 0$ のときは，$w=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{1}{\gamma z+\delta}\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}$ と変形すると，
この式は，$w=\mathrm{A}z$, $w=z+\mathrm{B}$, $w=\dfrac{1}{z}$ の 3 つの形の関数から組み立てられていることがわかります。ここでは，まだ出てきていない $w=\dfrac{1}{z}$ について考えることにします。

$z,1$ をそれぞれ極形式で表して，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすれば,
$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos 0+i\sin 0}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ より，
w は絶対値が $\dfrac{1}{r}$，偏角が $-\theta$ となる数です。これを図示すると，

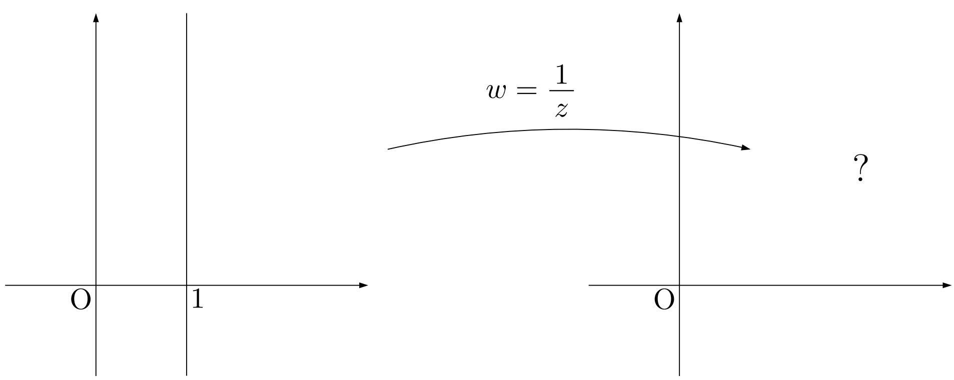




O, P, Q は一直線上にあって，$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=1$ を満たしています。このような関係があるとき，Q を P の単位円に関する鏡像といいます。

この関数によって，複素数平面上の直線，円がどのような図形に移動するかを調べます。

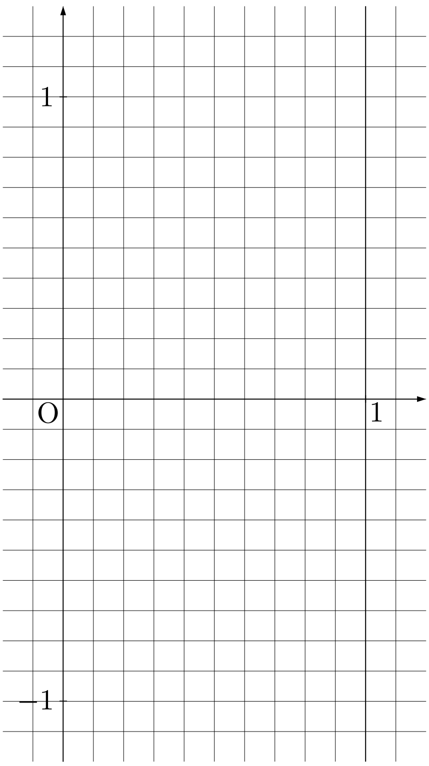
1 を通り虚軸に平行な直線を関数 $w=\dfrac{1}{z}$ で移動させます。



表の各 z の値に対して $w = \dfrac{1}{z}$ の値を計算しましょう。

z	$1-i$	1	$1+\dfrac{1}{3}i$	$1+\dfrac{1}{2}i$	$1+i$	$1+2i$
w						

表の w を平面上にかきましょう。



w の値を多くとれば，グラフの形がさらにはっきりしますが，どんなグラフになるかわかりましたか。

問 6. より直線の方程式は $z+\overline{z}=2$ です。
これに $z=\dfrac{1}{w}$，$\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入して，

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}}=2$$
$$w+\overline{w}=2w\overline{w}$$
$$w\overline{w}-\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}\overline{w}=0$$
$$\left(w-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(w-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$$
$$\left|w-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$
$$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

したがって，w は $\dfrac{1}{2}$ を中心とした半径 $\dfrac{1}{2}$ の円になります。

一般的に，直線の方程式 $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=c$，円の方程式 $z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=r^2$，それぞれの一般形に，$z=\dfrac{1}{w}$，$\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入して整理することで，次のような結果が得られます。

- z-平面上の原点を通る直線は，w-平面上の原点を通る直線に移る
- z-平面上の原点を通らない直線は，w-平面上の円に移る
- z-平面上の原点を通る円は，w-平面上の直線に移る
- z-平面上の原点を通らない円は，w-平面上の円に移る

詳しくは参考文献 [1] を見て下さい。

4.3　2 次の関数

最後に，z についての 2 次式で表される関数で最も簡単な $w = z^2$ について触れておきます。

問 9. 正方形 OABC を関数 $w = z^2$ で移動させた図形を w-平面にかけ。

※この問題は，はっきり言って中学生では難しいです。将来のチャレンジ問題とします。

考え方の手順は

- $z = x + yi$ と表示し，(x, y) を z-平面での座標と考えます。
- z が正方形の各辺 OA, AB, BC, CA それぞれにある場合に分け，そのとき x, y が満たす条件 (x, y が満たす式，値の範囲) を求めます。
- $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ より，$X = x^2 - y^2, Y = 2xy$ とおきます。
- x, y が満たす条件の式を X, Y について解き，w-平面で X, Y が満たす条件を求めてグラフをかきます。

グラフには X 軸方向に軸をもつ放物線が登場します。

参考文献

[1] 志賀浩二「複素数 30 講」朝倉書店,1989

[2] 梅沢敏夫・後藤達生「複素数と幾何学」培風館,1993

5　講習を終えて

今日のテーマは「複素数平面上の幾何」と「複素数の関数」の二つ。前半では，複素数平面上に長さ，角度を導入して，図形の証明が複素数の計算でできることを。後半では，複素数平面から平面への関数を，具体的にグラフをかいてイメージをもってもらうことを目標に進めました。今回の講座は，リーマン面，オイラーの公式，代数学の基本定理まで扱うという壮大な (無謀ともいえる) 企画のもと，今日は複素数の関数のイメージだけでも何とか伝えて，あと 2 日のメインテーマにつながるようにしたいと思っていました。細かい計算や公式導出はバッサリ省いて，それでも講座前半で学んだ基本を復習すれば，後から十分読み返していけるような内容構成にしたつもりです。1 次分数関数の w=1/z により直線が円に移されることを示すのに，簡単な計算から平面上に点を順にとってグラフを浮かびあがるようにした部分は，中学 1 年生レベルでも理解してもらえたのではないかと思います。複素数という道具を使うと実はいろいろなことができるんだ，ということから，ますます数学に興味をもってもらいたいと思います。私自身は，従前のカリキュラムで扱った内容の復習をしながら，1 次分数関数による円円変換の話など，当時はあまり授業では話さなかった部分の勉強ができ，楽しい講座準備期間でした。