2012 年度

数学科リレー講座

６日目

豪華２本立て

オイラーの公式

代数学の基本定理

小澤　嘉康

1　オイラーの公式

オイラーの公式とは，

$$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$

ここに出てくる，

$$\begin{aligned} \pi &= 3.141592653589\cdots \\ e &= 2.718281828459\cdots \end{aligned}$$

はともに大事な定数．

1.1　指数法則とは

自然数のとき

例えば，$A^2 \times A^3$ や $(A^2)^3$ を計算するとき，次の法則がある．

① $A^2 \times A^3 = (\overbrace{A \times A}^{2\text{個}}) \times (\overbrace{A \times A \times A}^{3\text{個}}) = \overbrace{A \times A \times A \times A \times A}^{(2+3)\text{個}} = A^5$

かけ算は，指数の足し算

② $(A^2)^3 = A^2 \times A^2 \times A^2 = A^{2+2+2} = A^{2\times 3} = A^6$

累乗は，指数のかけ算

この計算法則を**指数法則**という

指数が自然数のときは，単にかけ合わせている A の個数を数えているだけなので当たり前．法則というほどのものではない．

整数のとき

例えば，3^{-2} を考えるとき,「3 を -2 個かけ合わせる」というのは意味がない．指数が整数のとき，今までの自然数での指数法則は保ったまま，整数でも計算ができるように上手く（矛盾なくという意味で）拡張する方法を考える．

$x = 3^{-2}$ とおく．
両辺に 3^3 をかけるが，指数法則は整数でも成り立つようにしたいので，

$$3^3 \times x = 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3+(-2)} = 3^1 = 3$$

となって欲しい．両辺 3^3 で割ると，

$$x = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{3^2}$$

となる．これより，

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

とすればよいことがわかる．

特に

$$A^{-1} = \frac{1}{A}$$

より，逆数なので，

$$A^0 = A^{1+(-1)} = A^1 \times A^{-1} = A \times \frac{1}{A} = 1$$

となり，0 乗は 1 とわかる[1]．

有理数のとき

例えば，$3^{\frac{1}{2}}$ を考える．整数のときと同じような発想で，どんな値にすればよいのかを考える．

$x = 3^{\frac{1}{2}}$ とおく．

[1]ただし，0^0 は値をどのように決めても不都合が起きるので 0^0 だけは考えない．

両辺を 2 乗するが，指数法則は有理数でも成り立つようにしたいので，

$$x^2 = (3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2}\times 2} = 3^1 = 3$$

となって欲しい．つまり，x は 2 乗すると 3 になる数なので，

$$x = \sqrt{3}$$

となる[2]．これより，

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

とすればよいことがわかる．

同様に考えることで，例えば，

$$27^{\frac{1}{3}} = 3, \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2, \quad 8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4, \cdots$$

と計算できる．

実数のとき

今回は省略するが，指数法則が成り立つように定義できる．

例えば，近似値であるが，$e = 2.71828$ とするとき，

$$e^{-\frac{\pi}{2}} \fallingdotseq 0.20787$$

となる．

複素数のとき

複素数 $\alpha = a + ib$ のとき，A^α はどのように考えたらよいのだろうか．
指数法則は成り立つようにしたいので，

$$A^\alpha = A^{a+ib} = A^a \times A^{ib}$$

[2]平方根なので $\pm$ の可能性があるが，3 は正の数なので x も正の数とするのが自然．

となるが，A^a は実数なので，問題は A^{ib} の方である．

以下，A のままで話を進めてもよいのだが，簡単のため，特別な値 $e = 2.71828\cdots$ のときで考える．また，後の都合があるので，指数の b を θ にかえる．したがって，

$$e^{i\theta}$$

をどのように定義すればよいのかを考える．

$e^{i\theta}$ は指数法則が成り立つので，

① $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1 + i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

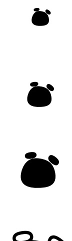
② $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta \times n} = e^{i(n\theta)}$

となる．つまり，

① かけ算が，θ の足し算に，

② 累乗が，θ のかけ算に，

読み替えられる．このような計算って，どこかで見たことがないだろうか．



ある！

そう，3日目の**ド・モアブルの定理**である．

定理 (ド・モアブル).

① $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$

② $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

であった．よく見比べてみよう．

どうやら同じである．

すると，$e^{i\theta}$ を $\cos\theta + i\sin\theta$ で定義するといいかもしれない，という気持ちになってはこないだろうか？

試しに

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

としてみると，当然指数法則は成り立つ．

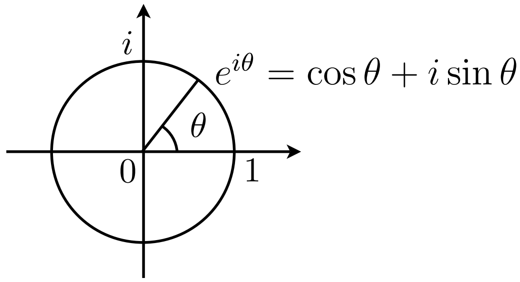
$\theta = 0$ を代入すると，左辺は $e^{i\times 0} = e^0 = 1$ となり，右辺は $\cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$ となり，これも成り立つ．

厳密にはこれだけのチェックでＯＫとするわけにはいかないが，他はさすがに難しいので，

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

と定義する．

複素平面で表すと，下図のようになる．



1.2　オイラーの公式

さて，いよいよオイラーの公式

$$e^{i\pi} = -1$$

であるが，今までの話を踏まえると，直ぐにこの公式が得られることがわかるだろう．

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に，$\theta = \pi$ を代入して，

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1$$

となる．

1.3　i^i を計算する

オイラーの公式が意外とあっけなく得られてしまったので，拍子抜けの人もいるかもしれない．少し物足りないと感じている人は i^i を求めてみよう．

問題

次の $\boxed{}$ を埋めよ．

i を極形式で表してみると，$i = \cos\boxed{} + i\sin\boxed{}$ となるので，e を用いて表し直してみると，$i = e^{\boxed{}}$ となる．

したがって，

$$i^i = (e^{\boxed{}})^i = e^{\boxed{}\times i} = e^{\boxed{}} \fallingdotseq \boxed{.}$$

解答

i を極形式で表してみると，$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ となるので，e を用いて表し直してみると，$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ となる．

したがって，

$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{i\frac{\pi}{2}\times i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \fallingdotseq 0.20787$$

2　代数学の基本定理

n 次方程式の解は必ず複素数の範囲で求まる．

この事実を「代数学の基本定理」という．[3]

2.1　因数定理

まず，代数学の基本定理とセットで用いる因数定理を紹介する．

定理 (因数定理).
z についての n 次多項式 $P(z)$ において．複素数 α が $P(\alpha) = 0$ をみたすならば，$P(z)$ は $z - \alpha$ を因数にもつ．すなわち，

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

をみたす $(n-1)$ 次多項式 $Q(z)$ が存在する．

代数学の基本定理とこの因数定理を組み合わせると，n 次方程式 $f(z) = 0$ において次のようになる．

① 代数学の基本定理より $f(z) = 0$ の解 $z = \alpha_1$ が存在する．すなわち $f(\alpha_1) = 0$ をみたす．

② すると，因数定理より，$f(z) = (z - \alpha_1)f_1(z)$ をみたす $(n-1)$ 次多項式 $f_1(z)$ が存在する．

③ 次に，$f_1(z) = 0$ に代数学の基本定理を用いると，解 $z = \alpha_2$ が存在する．すなわち $f_1(\alpha_2) = 0$ をみたす．

④ すると，やはり因数定理より，$f_1(z) = (z - \alpha_2)f_2(z)$ をみたす $(n-2)$ 次多項式 $f_2(z)$ が存在する．

このとき，$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)f_2(z)$ であるので，$z = \alpha_1, \alpha_2$ は $f(z) = 0$ の解である．

[3] この節の内容は昨年度の数学科リレー講座「ガロア理論」での内容に多少加筆したのもである．

⑤ 同様に繰り返すと，1 次多項式 $f_{n-1}(z)$ の存在までいうことができる．1 次方程式 $f_{n-1}(z)=0$ については因数定理を用いるまでもなく解 $z=\alpha_n$ が存在する．

⑥ 以上より，n 次方程式 $f(z)=0$ には（同じものがあるかもしれないが）ちょうど n 個の解 $z=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在することが導ける．

したがって，別バージョンの代数学の基本定理として，

n 次方程式は重複を含めてちょうど n 個の複素数解をもつ．

ということもできる．

因数定理の使い方の例

5 次方程式 $f(z)=z^5-6z^3-10z^2-3z+18=0$ について．

まず，ぱっと見，$f(1)=0$ であることがわかる．念のため確認してみると，

$$f(1)=1-6-10-3+18=0\,.$$

したがって，因数定理より $z-1$ を因数にもつので，

$$f(z)=(z-1)f_1(z)$$

となる 4 次式 $f_1(z)$ が存在する．具体的に $f_1(z)$ を求めるには，多項式の割り算をすればよい．計算すると，

$$f_1(z)=z^4+z^3-5z^2-15z-18$$

となる．これもしばらくじっと見ていると，$f_1(-2)=0$ であることがわかる．実際，

$$f_1(-2)=16-8-20+30-18=0\,.$$

よって因数定理より $z+2$ を因数にもつので，

$$f_1(z)=(z+2)f_2(z)$$

となる 3 次式 $f_2(z)$ が存在する．割り算をして，

$$f_2(z) = z^3 - z^2 - 3z - 9$$

となる … っと $f_2(3) = 0$ が直ぐに思い浮かんだ！一応確認してみると，

$$f_2(3) = 27 - 9 - 9 - 9 = 0\,.$$

よって因数定理より $z - 3$ を因数にもつので，

$$f_2(z) = (z - 3)f_3(z)$$

となる 2 次式 $f_3(z)$ が存在する．$f_3(z) = z^2 + 2z + 3$ である．

おっと，今日は冴えてる！「$f_3(-1 - \sqrt{2}\,i) = 0$ が見えた！」… という人はいないでしょう．（そもそも，1 も -2 も 3 もなかなか瞬時にはわからない）

$f_3(z)$ はもう 2 次式なので解の公式で求めることができる．
以上をまとめる，

$$f(z) = (z - 1)(z + 2)(z - 3) \times (z^2 + 2z + 3) = 0$$

となるので，解は，

$$z = 1,\ -2,\ 3,\ -1 \pm \sqrt{2}\,i$$

の 5 個となる．

2.2　代数学の基本定理の雰囲気

では，代数学の基本定理を証明をしたいのだが，さすがに難しいので，今できる範囲で考える．
ここでは，n 次方程式の解は必ず複素数の範囲で求まることの「雰囲気だけ」を感じてみよう．

2 次方程式 $z^2 + 3z + 4 = 0$ を例にする．ここでの内容は一般の n 次方程式でも同じである．

関数 $w = f(z) = z^2 + 3z + 4$ を考える．

X_r を，複素平面上で原点 O を中心とし半径 r の円とする．ここで X の添字 r は半径なので正の実数をとるものとする．

円 X_r 上の点 z は極形式を用いると，

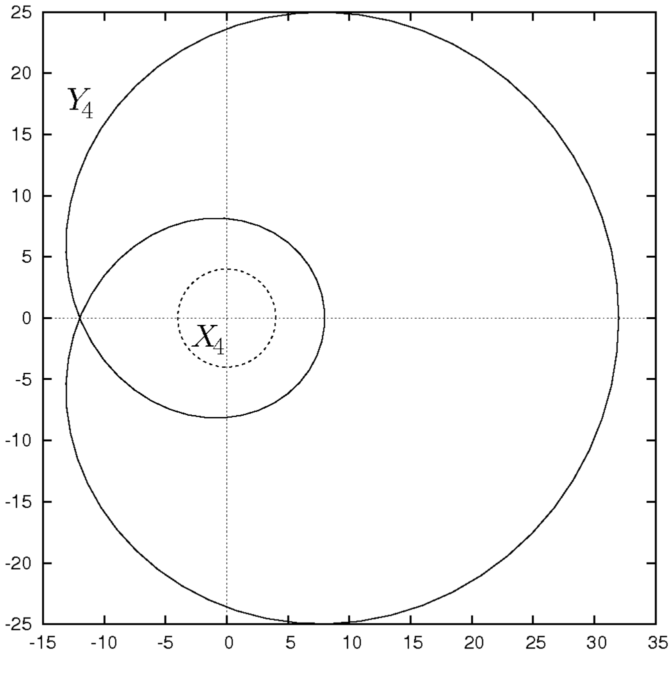
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

となることに注意せよ．

次に，Y_r を，円 X_r 上の点 z に対する関数 $w = f(z)$ の値全体が表す図形とする．

Y_r は X_r における関数 $w = f(z)$ のグラフのようなものだというイメージでよい．

例えば，$w = f(z) = z^2 + 3z + 4$ で，$r = 4$ のときを平面上の図で見てみると，



内側の点線の円が半径 4 の円 X_4 を表し，外側のクルクル曲線が Y_4 を表している．

さて，このような図をかくことで何がみえてくるのだろうか？今の関心事は方程式

$$z^2 + 3z + 4 = 0$$

が複素数の解を持つかということである．これは $f(z) = z^2 + 3z + 4$ とおいているので，

$$f(z) = 0$$

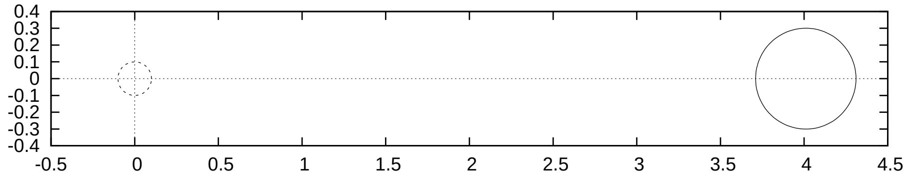
となる複素数 z が存在するか，ということである．

さて，この $f(z) = 0$ とは図ではどういう状態なのか．それは関数 $w = f(z)$ のグラフである Y_r が原点 O を通過するということである．そしてこの r のとき，X_r 内の z で $f(z) = 0$ をみたすものが存在するということである．

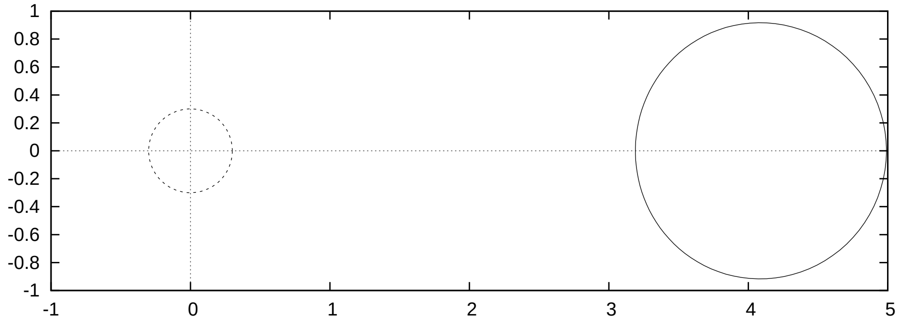
よって，r の値を変化させたときに，どのような関数 f であっても必ず原点を通過する Y_r がわかればよい．

Y_r の動きを調べるために，r を小さいところから順にいくつか値を入れた図を見てみよう．点線の円が X_r で実線の曲線が Y_r である．

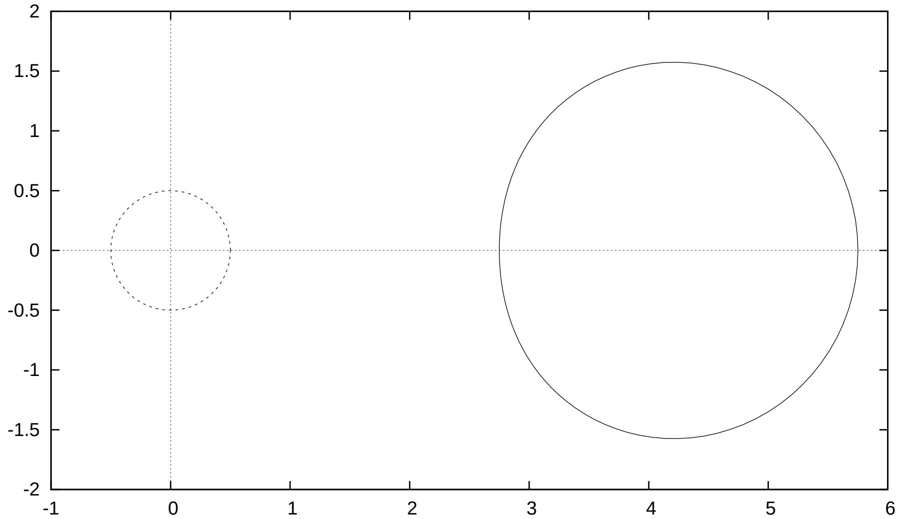
$r = 0.1$



$r = 0.3$

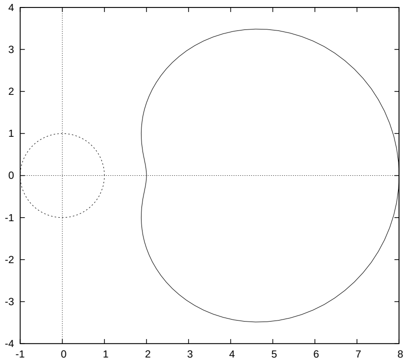


$r = 0.5$



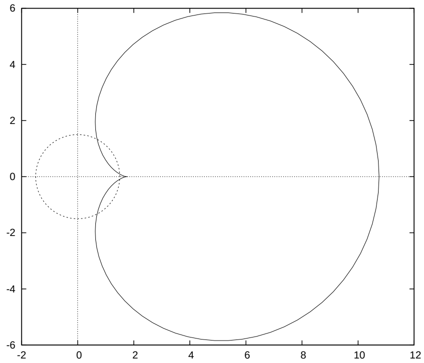
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

$r = 1$



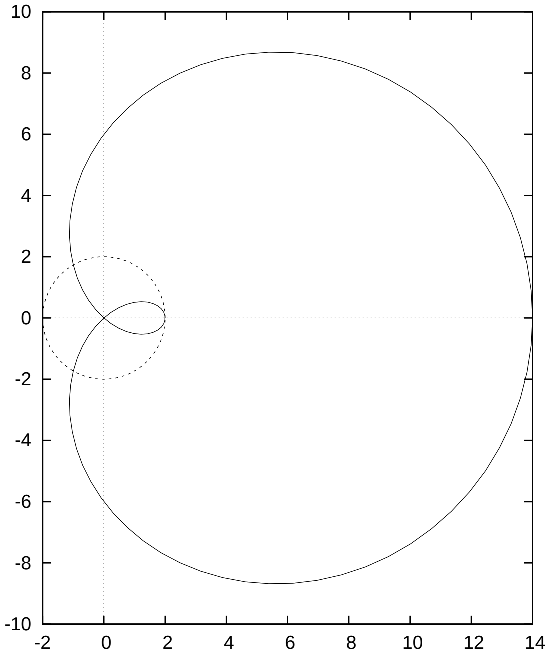
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$r = 1.5$

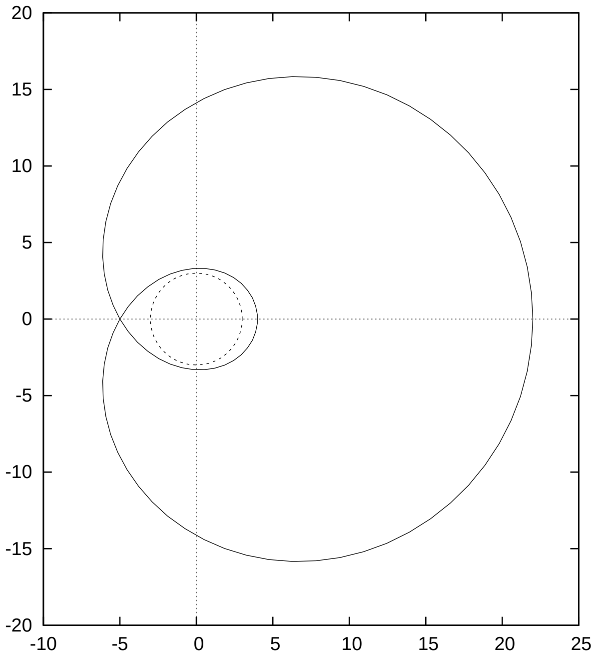


6
4
2
0
-2
-4
-6
-2
0
2
4
6
8
10
12

$r = 2$


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-2
0
2
4
6
8
10
12
14

$r = 3$


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-10
-5
0
5
10
15
20
25

目盛りの縮尺が同じでないのでわかりにくいかもしれないが，r が 0 に近いときは Y_r も小さく，$w = f(0) = 4$ の近いところにしかないのだが，r が大きくなるにつれ Y_r もどんどん大きくなっていくことがわかるだろうか．r を 0 から連続的に大きくしていったときの Y_r のどんどん大きくなる様子をアニメーションのような感覚で想像すると，ある瞬間 Y_r が原点 O を通過するときが少なくとも 1 回はあることがわかるだろう．

この例では $r = 2$ のときである．しかもクルクル曲線なので $r = 2$ のときに曲線は２回原点を通過しているのである．よって，2 次方程式 $z^2 + 3z + 4 = 0$ の解は X_2，つまり，原点より 2 離れたところにある数ということである．

このことを確認してみよう．2 次方程式であれば解の公式に代入して解を求めることができる．解は，

$$z = \frac{-3-\sqrt{7}\,i}{2},\ \frac{-3+\sqrt{7}\,i}{2}$$

であり，どちらも，

$$\left|\frac{-3-\sqrt{7}\,i}{2}\right| = \left|\frac{-3+\sqrt{7}\,i}{2}\right| = 2$$

をみたすので，これら２つの点が原点を中心とする半径 2 の円 X_2 上にあることが確認できた．

2.3 クルクルの回数について

図を見ていて気がついた人も多いと思うが，r がある程度の大きさを超えると，Y_r はクルクルと２回転している．これはたまたまではなく，$w = f(z)$ が z の 2 次式であることによる．したがって，もし $w = f(z)$ が z の 3 次式ならクルクルクルと３回転するということである．

詳しく見てみよう．

r が十分小さいとき

例えば，$r = 0.01$ や $r = 0.00001$ など 1 と比較して小さいとき．

$z = re^{i\theta}$ であるので，$|z| = r$ であることを確認しておく．

いま，$w = z^2 + 3z + 4$ を考えているが，この式を，

$$w - 4 = z^2 + 3z$$

として，両辺の絶対値を考えると，

$$|w-4| = |z^2+3z|$$

となる．さらに右辺に三角不等式を用いると，

$$|w-4| = |z^2+3z| \leqq |z|^2+3|z| = r^2+3r$$

となり，r は十分小さいので，$r^2+3r \fallingdotseq 0$ と見なしてよい．したがって，

$$|w-4| \fallingdotseq 0$$

となる．

この式より，Y_r は点 4 の極めて近いところしか存在しないことがわかる．($r=0.1$ のときの図を参照してみよう)

r が十分大きいとき

例えば，$r=100$ や $r=1000000$ など 1 と比較して大きいとき．

$w=z^2+3z+4$ を，

$$w-4 = z^2+3z = z^2\left(1+\frac{3z}{z^2}\right) = z^2\left(1+\frac{3}{z}\right)$$

と変形する．右辺の第２因数に注目すると，$|z|=r$ が十分大きいので，$\left|\dfrac{3}{z}\right|$ はほとんど 0 と見なしてよい．よって，

$$1+\frac{3}{z} \fallingdotseq 1$$

としてよい．すると，

$$w-4 \fallingdotseq z^2$$

となる．$z=re^{i\theta}$ であるので，

$$w-4 \fallingdotseq r^2e^{i2\theta}$$

となる．この式の e の指数の 2θ に注目すると，$z=re^{i\theta}$ で θ が円上を１回転するときに $w-4$ は２回転することを表している．これがクルクルの要因である．

同様に考え $w=f(z)$ は z の 3 次式のときは 3θ がでるので，クルクルクルになることもわかる．

また，$|r^2e^{i2\theta}| = r^2$ なので，Y_r は点 4 を中心とする半径 r^2 の円で近似される図形であることもわかる．