２０１２年度数学科夏期リレー講座　複素数の世界
授業レポートと担当者および受講者の声

【初日のリポート】

今年で３回目となる本校数学科独自の「夏期リレー講座」。毎年、テーマを設定して、リレー形式により、日替りで担当者が計６人登場します。

第１回目は「アーメスのパピルスからペレルマンまで」と題した古今東西の約 3600 年の数学史を、昨年は E. Galois 生誕 200 年を祝して「ガロア理論」を扱いました。本年のテーマは「複素数の世界」です。

今年も本校の、数学を愛好する生徒が一堂に会しました（参加約４０名)。

今年は意欲旺盛な中１生が多く参加してくれ、スタッフとしても大いにやりがいを感じます。同時に、意欲旺盛とはいえ、つい半年前はまだ小学生であった彼らに複素数のイメージをどう伝えるか、そして道具だてとしての数々の高校数学をどう伝えるか、が過去二回以上に、本講座の焦点のひとつとなりましょう。

さて、初日の今日は、「複素数とはこんなもの」なるタイトルで宮崎先生が担当（写真 1)。実数を拡張した数の集合のひとつである「複素数」を概観しました。

「足して 10、かけて 40 になるような２つの数はなんだろう？」なる導入が奏功して、中１も全く違和感なく取り組みます（写真 2)。

そして、虚数単位「i」が正でも負でも 0 でもないことまでが、実にスムーズに示され（写真 3)、いつしか、複素数の幾何的なイメージにまで話は進みました（写真 4)。

そして、なんと複素数平面を紹介するまでに至り（写真 5）終了しました。

後述の参加者の声にもあるように、実にスムーズな進行で、スタッフ一同、心底、トップバッターを宮崎先生にお引き受け頂き、安堵し、そして感謝をした次第です。

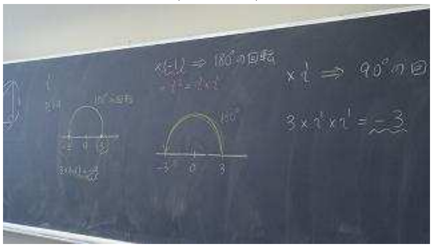
幸先よいスタートがきれた本年のリレー講座。明日は三角比の導入、そして三角関数に至る予定です。

土曜日までの一週間、ご期待ください。(数学科)

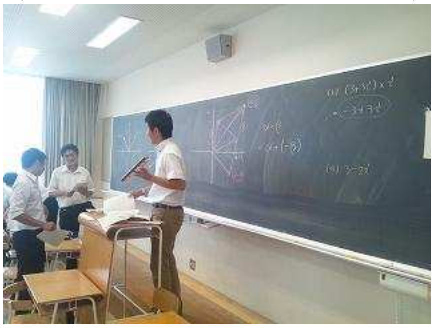
（写真 1）

（写真 2）

（写真 3）



（写真 4）



（写真 5）

【参加者の声】

中１　加藤翔君

板書、内容ともにとても分かり易かったです。前々から疑問に思っていたことが丁度扱われ(導入の部分とのこと)、とてもよく理解できました。先生が中１に合わせてくれたのでよかったです。今まで知らなかった、未知のことに触れられる期待感で 80 分がすぐに感じられました。

高１　上野寛幸君

中１にスポットを当てていたので授業が丁寧すぎる印象を持ちました。

私はこれまでで複素数を詳しく習っているわけではないのでこの時期に授業に先駆けて触れられるのは楽しみです。明日以降は、数学史における複素数の話題を期待したいところです。

【授業をしてみて】

５日目にリーマン面，６日目にオイラーの公式・代数学の基本定理を学ぶということで，初日の今日は,「複素数」とはどのようなものかということから話をしました．

受講生の中で約半数が中学１年生ということで,「虚数」や「複素数平面」の概念や考え方を「平易な言葉で厳密に」を目標にして授業をしました．

授業の途中で「平方根」や「展開公式」など，まだ知らないことが多く出てきましたが，しっかりついてきてくれたのでこちらとしても楽しく授業ができました．

また，高校生にとっては馴染みのある「i」ですが，今回の授業で何かしらの発見があれば嬉しく思います.

８０分という限られた時間の中で，伝えきれないことも多かったのですが，生徒がしっかりと聞いてくれたおかげで，なんとか終えることができました（宝探しは残ってしましましたが）.

この講習をきっかけに数学に少しでも興味を持ち，自分たちで何かを考えたり，調べたりしてもらえたら，私にとってこれ以上ない喜びです。　（宮崎　篤）

【２日目のリポート】

リレー講座「複素数の世界」。初日の昨日は複素数を概観し、複素数平面にまで至りました。

複素数平面を導入せんとすれば、極形式の話は欠かせません。そのためには三角関数を学ぶ必要があります。この三角関数、高校生はすでに学んでいるものの、中学生には未知の話題です。

そこで、この日は三角比からスタート。担当は北村先生（写真 1）です。

「いやはや、(中１と中２向けに）ピタゴラスの定理から話すとなると思いやられますよ」と思案顔だった同先生。しかし、意欲ある彼らに対しては杞憂でありました。

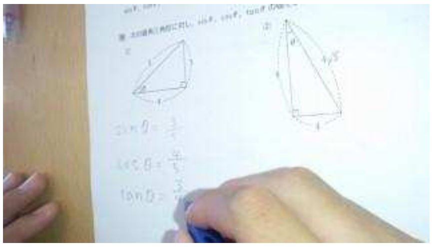
昨日同様、平易な導入（3 : 4 : 5 の直角三角形を利用した三角比の計算・写真 2）に始まり、徐々にステップアップ（写真 3)。このスムーズな展開と、温和な北村先生のキャラクターとが相俟れば、なるほど未知の内容を、それも決してゆっくりとは言えない進み具合で習っているのにも関わらず、心配顔の生徒が皆無なのも納得です。

終盤、“大物” である加法定理が登場（写真 4）。北村先生日く、「この定理の証明を扱わなかったことをはじめ、今日はなにを話して、なにを話さずにすませるか、その判断を最後まで決めかねていたのです。結果、断腸の思いで、多くの点において、計算例の紹介にとどめました」。編集子はこの判断が奏功したとみます。だからこそ初学者にとっても三角関数の計算に手がついたのでしょう（写真 5)。

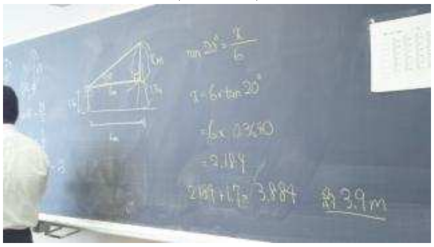
何を以って幹と考え、そしてまた何を以って枝葉と考え、勇気を持って切り落とすか―この種の講座のみならず、日々の数学の授業にて、担当者は常にこの点で葛藤していると思召せ。

ともあれ、明日は前半戦のハイライトである「ドモワブルの定理」の登場です。(数学科)

(写真 1)

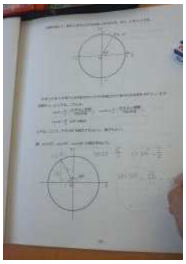


(写真 2)



(写真 3)

(写真 4)



(写真 5)

【参加者の声】

中３　伊得友翔君

三角比という用語を耳にしたことはあったのですが、習ったのは全くの初めてです。丁寧に話してもらえたのでよく理解できました。(編集子の残り１０分の時点で三角関数を定義されたけれど、どうでしたか？に対し）三角比を拡張しようとすればあのようになるのは自然に思いますので違和感はないです。やっておくように指示された練習問題を解いて明日の授業を楽しみに待ちます。

【授業をしてみて】

２日目は三角比、三角関数の話をしました。

「複素数の世界」をこれからより深く味わうための準備として、三角比、三角関数をまったく知らない中学生に向けて一から授業を行いました。

見慣れない記号や公式が多いため、苦手意識を持ってしまいやすい分野ですが、そうなることがないように、導入部分を丁寧に行うことを心がけました。

みんなしっかり取り組んでくれたことをうれしく思います。（北村亮太）

【３日目のリポート】

３日目の今日は前半戦のハイライトである「複素数の掛け算の図形的な意味」（いわゆる、ド・モワブルの定理）の紹介がテーマ。担当は小林先生です。まずは、初日に用いられた題材を今日のテーマの伏線とされました（写真 1）。巧みなストーリー構成を感じます。前の走者との好連携を思わせ、こういった点がまさに「リレー」講座のよさでありましょう。

演習問題は、この２日間の内容の理解に重点をおかれ、中学生に不安を感じさせない配慮がみてとれます。中１生もそれに応えて、$\cos 135^\circ$ や $\sin 135^\circ$ の値を難なく答え、この２日間の内容の理解が十分であることが伺えます（写真 2）。そして、極形式の紹介に話は入りました。いよいよ、本題というわけです。

360° を越える角の cos や sin の値についても違和感はないようで、中学生諸君の柔かな頭に舌を巻くほかはありません。まさに「鉄は熱いうちにうて」を実感します。

ところで、ややもすると、「おはなし」に終始するのでは？と思われがちなリレー講座ですが、授業内の演習にも十分時間が用意されています。とりわけ、今日の小林先生はその点を配慮され、だからこそ、今日初めて聞くテーマについて問われても躊躇することなく答えられる（写真 3）のも納得というものです。

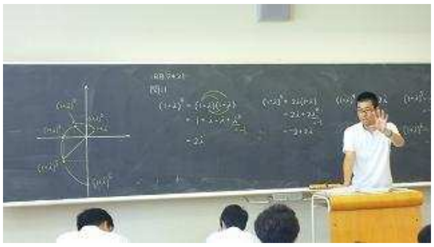
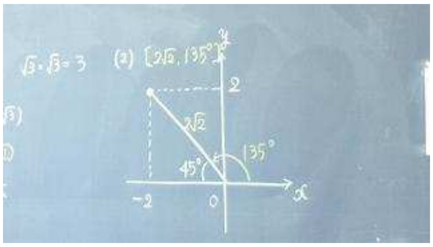
十分な演習と具体例の考察を経て、いよいよ、数学史上、有数の大定理であるド・モワブルの定理が登場。

ところで、小林先生のテキストによれば、このド・モワブル卿。フランスの数学者で 1667 年に生まれ、1754 年に没したそうです（写真 4）。また同先生によれば、ド・モワブル卿自身は三角関数に興味があり、今日いわゆる「ド・モワブルの定理」と称される表示に整理したのは C. F. ガウス（ドイツ・1777–1855）だそうで、編集子には大変に勉強になりました。

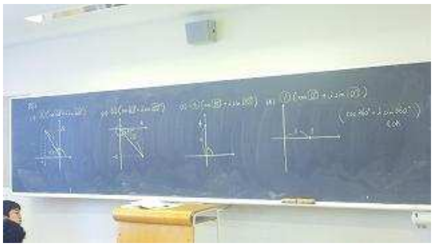
さすがに、今日初めて聞いたこの定理について、全員が感嘆の声をもらしたわけではありませんが、それでも中１の生徒を含め、何人かは感心しきりでした（写真 5)。彼らはこの定理に「なにか」を見たのかもしれません。

とにもかくにも、極めて順調に前半戦が終了しました。

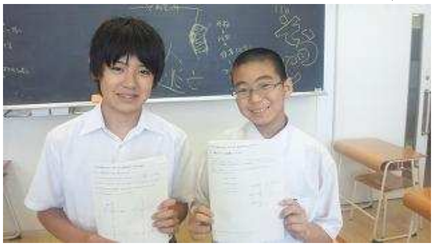
後半戦は、複素関数の具体例の紹介（４日目)、リーマン面出現（５日目)、代数学の基本定理（最終日）と続きます。(数学科)

（写真 1） （写真 2）




（写真 3） （写真 4）



（写真 5）

【参加者の声】

中１　佐藤隼君

中１の僕にとってはすごく難しいのですが、それでもなんとかついていけているのは、今日の小林先生のようにとても丁寧に説明してくださるからです。

今日のテーマであるド・モアブルの定理ですが、最初はその図形的な意味が分からなかったのですが、高１の先輩が回答されたのを聞いていて、「あっ！そういうことなのか !! 」と悟ることができました。明日からも楽しみです。

高１　高橋一誠君

今まで、虚数の意味が皆目分からなかったのですが、今日の「３乗して１になる数はなにか？」という問によって「なるほど！」と視界が開けた思いです。(虚数というネーミングがよくないと思うけれど、という編集子の問いかけに対して)「はい。でも、今日は虚数の“虚なるイメージ”が払拭できた、と言ってよいと思います。勉強になりました」。

【授業をしてみて】

昨日はじめて三角関数を学んだ生徒にとって極形式は（アイディアはともかく、表現方法が）受け入れ難いかもしれないと考え、後のド・モアブルの定理も含め全般的に数式による表現をあまり前面に出し過ぎないようにしました。実際に複素数平面に図示しながら、掛け算によって点がぐるぐると回ることが実感してもらえるような展開を心がけました。その甲斐あってか、演習では中学生も良く出来ていたようで、担当者としては嬉しい限りです。今後、三角関数を一通り学習し終えた後にまた振り返ってもらえれば、より一層理解が深まると思います。

最初の２日間に行った複素数、三角関数の導入から、後半に予定されている「オイラーの公式」や「代数学の基本定理」などの話題への橋渡しを無事終えることができ、ほっとしています。私自身、非常に勉強になりました。ありがとうございました。　（ 小林　慶祐 ）

【４日目のリポート】

昨日までは、いわば「準備編」であったリレー講座。後半の３日間はいわゆる「複素関数論」の初歩を垣間見ます。

後半戦の初日は平山先生による「複素数平面上の幾何」と「複素数の関数」の解説です。まずは昨日の内容を復習された（写真 1）あと、平面図形を複素数平面に配置して、複素数を利用した直交条件などを概観（写真 2)。「複素数平面の上に置く？そんなことをしても大丈夫なのかなぁ…」といった感じの中１生が少なくなく、また受講者全体から「さすがにこれは前半戦よりは手強いぞ」という雰囲気がひしひしと感じられます。ちなみに、このリレー講座は他校からも先生が来訪されて、聴講されております（写真 3)。

そして、いよいよ本講座の本題といえる複素関数の話題に突入しました（写真 4)。

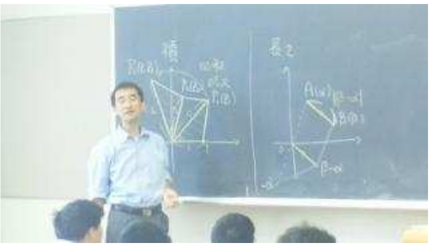
まずは一次関数を具体的に与え「幾何学的に」考察。果たして一次関数とは回転と平行移動の合成となることが示され（写真 5)、大いに頷く中３生（数学部員の由）が印象的でした。

最後は一次分数関数にまで話題はおよび、具体例を用いて、いわゆる「円円対応」を解説されました。これは、複素数平面上の「円または直線」は一次分数関数によって「円または直線」

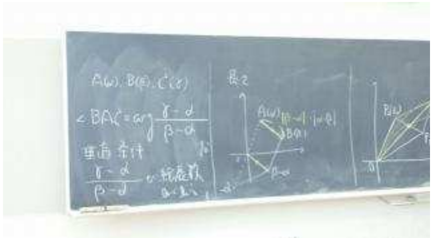
に写ることを述べたものです。（写真 6）に見ることのできる “無限遠点” の導入により，複素平面上の円は「リーマン球面」上の円と捉えることができることからこのように呼ばれているようです。

さすがに、時間の制約からリーマン球面についての詳しい言及はなされなかったのですが、このリーマン球面が明日のテーマの理解をするための鍵を握っています。

それにつけても、さすがに数学愛好者の集う本講座。欠席者が殆どいません。この調子でラストまで駆け抜けてください。（数学科）

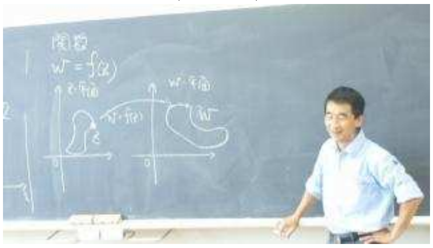


（写真 1）



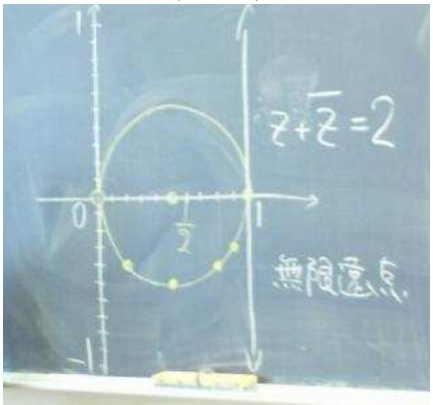
（写真 2）

（写真 3）



（写真 4）

（写真 5）



（写真 6）

【参加者の声】

高１　東野哲君

今日は冒頭から未知の記号が頻発し、前途多難を感じさせましたが、具体例の計算を行うことで、漸く平山先生の主張されたことが理解できました。曰く言い難いのですが、授業の最後に説明された「円円対応」には深遠ななにかがあるのではないか、とにらんでいるのですが…(東野君、審美眼ありますね)。

このリレー講座は毎日違った先生が登場されるので日々新鮮な気持ちで授業を受けられるのがいいですね。８０分があっという間です。

中３　湯原卓也君

複素数ってすごいですね。平面図形の問題があんな感じで解決してしまうのですから。いよいよ準備が終わって本題ですね。今日は複素関数が楽しかったです。

【授業をしてみて】

今日のテーマは「複素数平面上の幾何」と「複素数の関数」の二つ。

前半では，複素数平面上に長さ，角度を導入して，図形の証明が複素数の計算でできることを。後半では，複素数平面から平面への関数を，具体的にグラフをかいてイメージをもってもらうことを目標に進めました。

今回の講座は，リーマン面，オイラーの公式，代数学の基本定理まで扱うという壮大な（無謀ともいえる）企画のもと，今日は複素数の関数のイメージだけでも何とか伝えて，あと２日のメインテーマにつながるようにしたいと思っていました。細かい計算や公式導出はバッサリ省いて，それでも講座前半で学んだ基本を復習すれば，後から十分読み返していけるような内容構成にしたつもりです。

1 次分数関数の $w = \dfrac{1}{z}$ により直線が円に移されることを示すのに，簡単な計算から平面上に点を順にとってグラフを浮かびあがるようにした部分は，中学１年生レベルでも理解してもらえたのではないかと思います。複素数という道具を使うと実はいろいろなことができるんだ，ということから，ますます数学に興味をもってもらいたいと思います。

私自身は，従前のカリキュラムで扱った内容の復習をしながら，1 次分数関数による円円変換の話など，当時はあまり授業では話さなかった部分の勉強ができ，楽しい講座準備期間でした。（平山裕之）

【５日のリポート】

リレー講座もいよいよ、終盤戦。５日目の今日は編集子の川崎が担当致しました。

今日のテーマはリーマン面。これはその名が示すように、数学史上の大立者である B. リーマンの天才により与えられた概念です。

まずは、昨日、平山先生から紹介のあった z の複素関数のバトンを受けて、 $w = z^2$ が、$w = z^{\frac{1}{2}}$ になってもやはり z の関数なのか？を問題提起。結果、z の関数とはならない（写真 1）ものの、そこで「切り捨てることなく」、なんとか関数として「認め、活かす」方法はないか？と考えた末に出てきたであろうリーマンの天才と偉大な精神による卓抜なアイデアを紹介 (写真 2)。

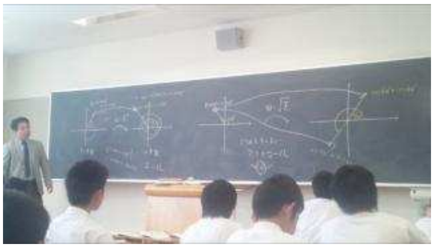
そして、立体射影により、球面上の北極以外の点をひとつとると、それは必ず複素数平面上のひとつの点に対応すること、および北極は、昨日登場した仮想の「無限遠点」に対応することにすれば、複素数平面は球面と「ある意味で」同じとみなしてよいことを解説しました。

後半は、その「ある意味」とはなにか？を探求。まずは、事物の「ほどよい」分類の基準とはなにか？を考察し、今回は立体の場合についてのほどよい分類の基準とは何かを考えました。「面の数による分類」は強力、と思いきや曲面に関しては無力。さて、どうするか？との問題提起から、その一解答は「同相」にあることを解説。穴空きの多面体にも適用できるよう、一般的なオイラーの多面体定理を紹介し、穴の 1 つあいた多面体に対して定理を適用しました (写真 3)。はてさて、同相の考え方は納得されたでしょうか。ここで、今日の前半の話題を合流させ、$w = z^{\frac{1}{2}}$ の（コンパクト化された）リーマン面が球面に同相であることを示し（写真 4)、これ以外の数式で表されたリーマン面が、一体、いくつの穴があいた曲面に同相になるのかという問に答える、いわゆる「リーマン・フルヴィッツの公式」を紹介し、実際に受講者と共に、穴の数を計算してこの日を終えました。

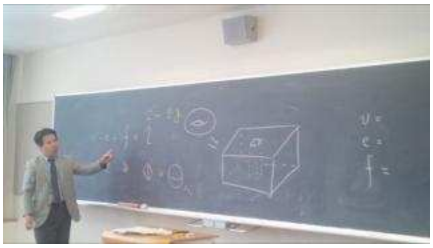
また、授業後は多くの生徒が教室に残って “位相談義” に花を咲かせていました。また、各自で持参した粘土でトーラスに同相なコーヒーカップを作ったり、実際に球面の三角形分割をしてオイラーの多面体定理を確かめていました (写真 5)。

なにかと話題沢山となったこの日ですが、受講者の皆さんが思いを馳せる話題はあったでしょうか。わたくしは、リーマン面のアイデアに至ったリーマン博士の精神に、心を熱くするものを感じており、生涯に渡り留めておきたいと切に思います。

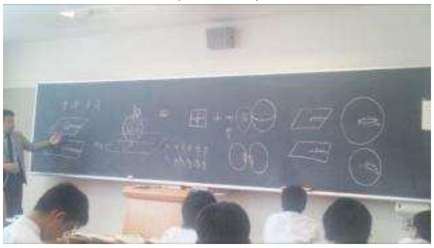
さて、明日はいよいよアンカーの登場です。ご期待ください。(数学科)



（写真 1）

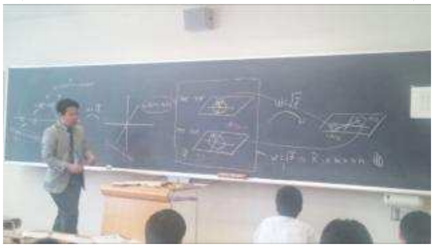


（写真 2）



（写真 3）

（写真 4）



（写真 5）

【参加者の声】

中 1 森基君

昨日までは難しいことをやっているなあ、と感じながらも先生方が丁寧に教えてくださるので理解でき、それが嬉しかったです。今日の授業では、難しいことが沢山でてきて、理解できないこともあるのに、なぜか面白く、ワクワクしながら聞けて、引き込まれたので嬉しかったです。複素数平面に無限遠点を加えることで、球面に同相になるところは特に印象に残りました。（編集子より：森くんはリーマン・フルヴィッツの公式を利用して genus（穴の数）の計算を達者にしていたので驚きました！こちらこそ嬉しくなりました）

高 1　長沼将人君

複素数の復習から始まり、いくつもの話題が出てきたにも関わらず、８０分が瞬く間に過ぎていて驚きました。時に数学から離れた話題もありましたが、それすら数学的だと感じられたのは一体なんなのでしょう。不思議でなりません。印象に残ったことはリーマン面の構成です。

そして、それがいくつの穴が空いている曲面に同相なのかを考えようなんて、凄いことを考えるものですね。

【６日目のリポート】

リレー講座の最終日。６日目の今日は「オイラーの公式」と「代数学の基本定理」の２本立てで盛りだくさんです。どちらのテーマも厳密に話を進めていくのは高校生でも大変なことなので、定理の内容の紹介と、その意味するところを感じ取ってもらうことを目標としました。

オイラーの公式とは「$e^{i\pi} = -1$」というものです。数年前「博士の愛した数式」という小説や映画でも取り上げられ、割とよく知られている公式です。自然対数の底 e、円周率 π、虚数単位 i、そしてマイナスが付いていますが、数の基本である 1。これらが結びつき簡潔な式にまとまっているところに、美しさを感じ惹かれてしまいます。ですが、見た目には簡潔な式ですが、いざ、この式が表すことを説明しようとするとものすごく大変なことで、しかも、複素数に触れたのが５日前！という中学生に対しては、何を強調して伝えればいいか悩むところでした。（これはもう１つのテーマの代数学の基本定理でも同じです。）

まず、指数法則を複素数まで拡張していくとき、$e^{i\theta}$ をどのように定義すればよいのかがポイントであることを強調して、$e^{i\theta}$ のもっている指数法則が３日目のド・モアブルの定理によく似ていることに気づいてもらいます。そして、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であることを実感する、という流れで行いました（写真 1)。

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という関係式を認めてしまえば、オイラーの公式は単に $\theta = \pi$ と代入しただけなのですが、実は、この関係式は２つめのテーマの代数学の基本定理の話にも登場します。

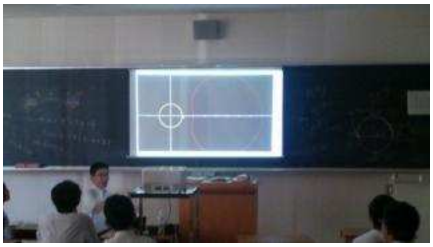
代数学の基本定理とは「n 次方程式は必ず複素数に解をもつ」というものです。１次方程式を習ったばかりの中学１年生では何がスゴイ定理なのかわかりにくいかもしれませんが、２次方程式を実数の範囲で考えると解なしの可能性があることを知っていれば、その意味も見えてくると思います。方程式 $f(z) = 0$ が解をもつ、ということを実感することをメインにしたので、実際に複素平面上で関数 $w = f(z)$ がどのような振る舞いをするのかをパソコンを使って見てもらいました（写真 2)。

変数 z が半径 r の円（写真では黄色い線）を動くときに、関数の値 $w = f(z)$ がどのような図形（写真では赤い線）を動くのかを、さまざまな r に対して観察し、$w = 0$ となる、つまり、赤い線が原点を通るような r が必ずあることの雰囲気を感じました（写真 3)。

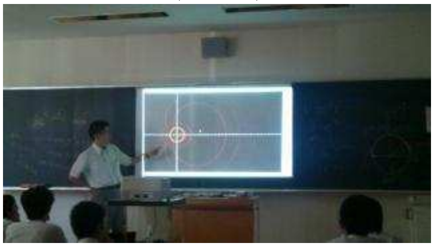
また、関数 $f\,(z)$ が２次式のときは値の赤い線はクルクルっと２回転、３次式のときはクルクルクルっと３回転するのですが、その理由を $e^{i\theta}$ を用いて説明して、今日の講座を終了しました（写真 4）。

（小澤　嘉康）

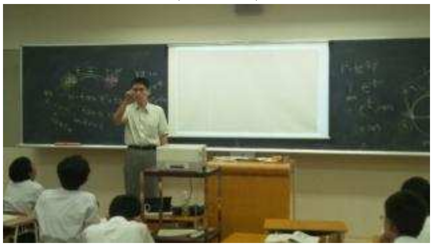
（写真 1）



（写真 2）



（写真 3）



（写真 4）

【参加者の声】

中３　羽片創君

いきなりオイラーの公式が出てきて面喰らったが、指数法則の拡張の話をきくとわかった（気になれた）。自然対数の底ｅをｉπ乗すると-1 になるというのが、とても印象に残りました。今までの色んな定理が一つにつながっていくのがとてもおもしろかったです。

中３　梶原尚之君

今回のリレー講座の目標である「複素数を知る」ために、今の自分には未知であり、まだ学習していない三角関数などのツールを使ったため、理解するのにとても苦労した。しかし、今回の講習で、分からないながらも、手探り状態だが複素数というものを知った。その行為を経て、代数というものが何なのか理解が出来たと思う。特に最終日の講習では、数学が求めているのものを理解できた（気がする）。