平成 25 年度　数学科夏期リレー講座「現代幾何学のひろがり」

1日目「現代幾何学への案内」

柴山太郎・川崎真澄

目次

注意　ネタバレがイヤなので，講習中は言われたページだけを開くようにしてください．

§1　はじめに

数学科夏期リレー講座も今年で４回目を数えることになりました．
参考までに，過去の講義テーマは以下の通りです．

第１回　「数学史　アーメスのパピルスからペレルマンまで」
第２回　「Galois 生誕 200 年記念」
第３回　「複素数の世界」
第４回　「現代幾何学のひろがり」（今回）

今回のテーマは「現代幾何学の広がり」と題して，「非ユークリッド幾何」を中心にお届けします．さて，これからの日程と総勢 12 人の講師陣を紹介します．

出講日	講師	講義内容
19 日 (月)	川崎・柴山	本講座のガイダンス
20 日 (火)	小林・田村	非ユークリッド幾何の誕生
21 日 (水)	兼子・宮崎	非ユークリッド幾何の例 ①　～球面幾何～
22 日 (木)	原・平山	非ユークリッド幾何の例 ②　～射影幾何～
23 日 (金)	網谷・上野	非ユークリッド幾何の例 ③　～ミンコフスキー幾何～
24 日 (土)	小澤・春木	エルランゲンプログラム　～幾何を俯瞰する～

初日の今回は全体のガイダンスを行いますが，6 日間で君たちに伝えられることは限られていますので各日程の講義内容は盛りだくさんになってしまうと思われます．なので，初日からたくさんの例を見て，頭を『幾何』に慣らしておこうと思っています．

はじめに言っておきますが，この講座で勉強する内容がもし理解できなかったとしても，悲観的にならないでください．内容を完璧に理解してもらうことよりも，むしろ「数学にはこんな世界があるんだ」と，純粋におもしろがってもらうことを私たちは望んでいます．この講座をきっかけに，さらなる数学への興味・関心を持ってもらえれば何よりです．とにかく楽しく，全員で，この 6 日間の講習をできればと思います．では次のページからさまざまな幾何に馴染んでいきましょう．

§2　そもそも「幾何」ってなんだろう？

例題 1　「幾何」の定義を答えなさい．

解答例　ここでは「幾何」の意味として書かれているものをいくつか挙げます．

- 図形およびそれの占める空間の性質について研究する数学の一部門．（大辞林 第三版より引用）
- 幾何学は，図形や空間の性質について研究する数学の分野である．（wikipedia より引用）
- 図形や空間の性質を研究する数学の一部門．（デジタル大辞泉より引用）
- 一般に，幾何学とは図形に関する数学であると説明されているが，幾何学の対象，内容，方法は時代とともに著しく変遷し，その範囲も非常に拡大され，現在ではこれらをすべて含むように幾何学を定義することはできない．しかしながら，幾何学と名のつく数学では，図形の直観，またはその類似に依存して研究される度合が強い．（世界大百科事典 第 2 版より引用）

どれを読んでも「幾何」とは何なのかはっきりとはわからないのではないでしょうか．数学の専門書にも「～を**幾何**という．」などきちんと定義しているものはあまりないと思います．なんとなく幾何って図形や空間を扱うものなんだと言われても，やはり数学としては気持ち悪いと感じる人もいるかと思います．

この講習の最終日には，この例題に対するひとつの答えを出します．それは 1872 年，クライン (1849-1925) という数学者が 23 歳の頃に提案したもので，そこでは「幾何とはこういうものです」と全く新しい観点から定義しています[*1]．

さて定義はさておき，次の章から「幾何」とは何なのかをイメージするために，いくつかの例を見ていきます．

[*1] クラインのエルランゲンプログラムと言います．

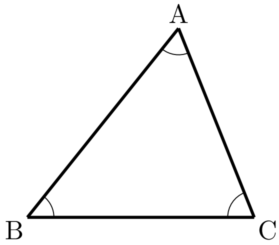
§ 3　Gauss-Bonnet（ガウス・ボンネ）の定理への案内とその周辺散策

3.1　三角形の内角の和

例題 2　校庭で太郎くんと次郎くんと三郎くんの 3 人が輪になったロープの一点をそれぞれ持ち，ぴんと張った状態で地面に置きます．できた三角形の内角の和は何度になりますか．

解答　三角形の内角の和なので，

太郎くんが点 A，次郎くんが点 B，三郎くんが点 C にいるとすれば，右の図より，$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{CAB} = 180^\circ$.

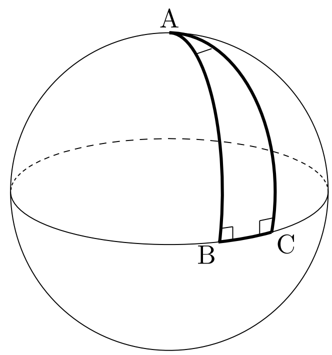


三角形の内角の和が 180° なのは君たちにとって，もはや常識といってもいいでしょうか．また，この例題では校庭が平面であると考えていることにも注意しましょう．

例題 3　上と同じように，太郎くんと次郎くんと三郎くんの 3 人が輪になったロープの一点をそれぞれ持ち，ぴんと張った状態で地面に置きます．ただし，今度は太郎くんが北極へ，次郎くんと三郎くんは赤道上へ移動しました．できた三角形の内角の和は何度になりますか．

解答　三角形の内角の和であるはずだが…

太郎くんが点 A，次郎くんが点 B，三郎くんが点 C にいるとすれば，右の図より，$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{BCA} = 90^\circ$ で，$\angle \mathrm{CAB} > 0^\circ$ であるので，



$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{CAB} &= 90^\circ + 90^\circ + \angle \mathrm{CAB} \\ &= 180^\circ + \angle \mathrm{CAB} \\ &> 180^\circ\end{aligned}$$

三角形の内角の和が 180° を超えてしまいました．どうしてこんなことが起こってしまったのか少し気になるところですが，今はまだ「よくわかんないけど球面上ではそうなってる！」と思うことにして[*2]，先に進みます．次のページ以降では球面上に描かれた三角形[*3]に関して考えられるおもしろい考察を与えていきましょう．

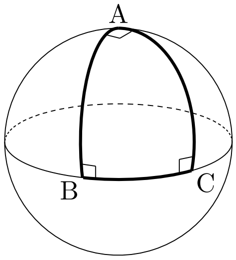
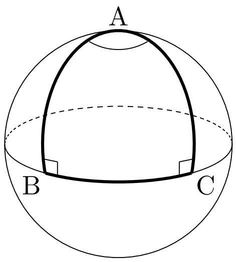
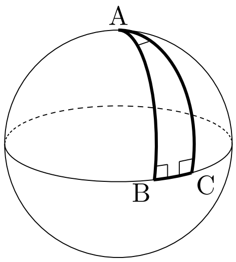
[*2] 本日の最後の章で，今まで学校で習った「三角形の内角の和は 180°」に矛盾しているわけではないことがわかります．
[*3] 球面三角形といいます．

さて，このような奇妙な性質を持つ球面三角形について，「内角の和」と「面積」を調べてみることで馴染んでいきましょう．

> **中学生の皆さんへ【角度の表し方】**
> この章では，角度を rad(ラジアン) という単位を用いて記述します．中心角 $x°$，半径 1 のおうぎ形の弧の長さが y のとき，$x° = y$ (rad) のように定義します．つまり，$x° = \dfrac{\pi}{180}x$ (rad) です．
> 例えば，$180° = \pi$ (rad)，$90° = \dfrac{\pi}{2}$ (rad)，$60° = \dfrac{\pi}{3}$ (rad) といった具合です．

ラジアンを使うだけでも慣れていないと大変かもしれませんが，じっくり考えてみてください．

問 1　次の表を埋めなさい．ただし，球の半径はすべて 1 であるとします．

球面三角形	球面三角形の内角の和	球面三角形の面積
 $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle CAB = \dfrac{\pi}{2}$		
 $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle CAB = \dfrac{2}{3}\pi$		
 $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2}$ $\angle CAB = \dfrac{\pi}{6}$		

問 2　上の問の結果を眺めてみましょう．球面三角形の内角の和と球面三角形の面積の間にはどんな関係が成り立つと予想できますか[4]．

[4] 実際にこの予想は正しく，アルベール・ジラール (1595-1632) が正しいことを証明しています．ここでは 2 つの角が 90° となる場合しか調べていませんが，一般の球面三角形に関して成り立つということです．

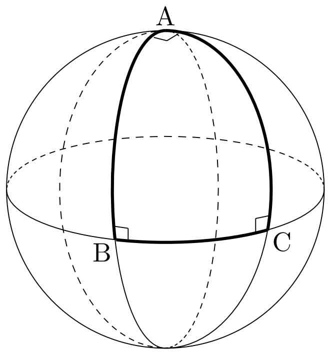
問 2 の結果「（球面三角形の面積）＝（球面三角形の内角の和）$-\pi$」に関しておもしろいところは，球面三角形は 3 つの内角が決まれば面積が決まってしまうというところではないでしょうか．これは，同じ球面上には合同な場合を除き，相似な三角形は存在しないことも意味しています．

問 3　問 2 の結果を使って，3 つの内角が $65^\circ, 70^\circ, 75^\circ$ であるような，半径 1 の球における球面三角形の面積を求めなさい．

3.2　球面の三角形分割に関するおもしろい定理の発見

これから球面を三角形で分割していくことを考えます．次の問で三角形分割のイメージをしてみましょう．

問 4　右の図のように，3 つの内角がすべて $\dfrac{\pi}{2}$ の三角形で球面を分割してみます．このように，三角形分割したときの頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f としたとき，v, e, f をそれぞれ求めなさい．



この v, e, f にある関係式が成り立つことを知っている人は多いのではないでしょうか．ここではとりあえずその関係は知らないということにして議論を進めます[*5]．

[*5] たった今，みんなはこの関係を知らなくなりました！

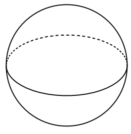
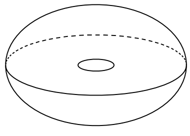
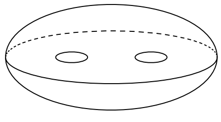
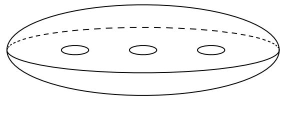
さて，球面を三角形分割し，面積の関係を式にして表してみます．半径 1 の球面を，$\triangle 1, \triangle 2, \ldots, \triangle k$ の k 個に三角形分割したとします．（ただし k は 2 以上の自然数です．）

$$
\begin{aligned}
\text{（球の表面積）} &= \begin{bmatrix}\triangle 1 \text{ の}\\ \text{面積}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\triangle 2 \text{ の}\\ \text{面積}\end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix}\triangle k \text{ の}\\ \text{面積}\end{bmatrix} \\
&= \left\{\begin{bmatrix}\triangle 1 \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix} - \pi\right\} + \left\{\begin{bmatrix}\triangle 2 \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix} - \pi\right\} + \cdots + \left\{\begin{bmatrix}\triangle k \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix} - \pi\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix}\triangle 1 \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\triangle 2 \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix}\triangle k \text{ の}\\ \text{内角の和}\end{bmatrix}\right\} - k\pi \\
&= \{2\pi \times (\text{頂点の数})\} - 3k\pi + 2k\pi \\
&= 2\pi \times (\text{頂点の数}) - 2\pi \times \frac{3}{2}k + 2\pi \times k \\
&= 2\pi \times \left\{(\text{頂点の数}) - \frac{3}{2}k + k\right\} \\
&= 2\pi(v - e + f) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}
\end{aligned}
$$

私たちは球の半径 1 の球の表面積が 4π であることを知っているので，$4\pi = 2\pi(v - e + f)$ つまり，$v - e + f = 2$ でなければならないのです！[*6]

補足 1　（穴の数とオイラー数の関係）

聞いたことがある生徒も多いと思いますが，$v - e + f$ の値を**オイラー数**といい，球面はどのように三角形分割してもオイラー数は 2 です．オイラー数は必ず 2 であると思っている人も多いのではないでしょうか．オイラー数が 2 でない立体もあるのです．実は g 人乗りのうきわに関して $g = 0, 1, 2, 3$ のとき，これを調べると，以下の表のようになっています．

球	うきわ（トーラス）	2 人乗りのうきわ	3 人乗りのうきわ
			
$g = 0$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
$v - e + f = 2$	$v - e + f = 0$	$v - e + f = -2$	$v - e + f = -4$

一般に g 人乗りのうきわに関して三角形分割すると，$v - e + f = 2 - 2g$ となり，この事実は「オイラー − ポアンカレの公式」として知られています．

また，穴の数 g は**種数**といいます．種数が同じ立体は位相幾何学の世界では同じものとみなします．例えば，位相幾何学の世界では三角柱と球は同じですし，マグカップとトーラスは同じなのです．位相幾何学の世界で同じもの同士で同じ値をとる数量を**位相不変量**といいます．オイラー数は位相不変量なのです．

[*6] $v - e + f = 2$ の証明はグラフ理論で行うのが普通です．ここでは，球の三角形分割という別のアプローチから示しました．この証明の中では，三角形の辺のとりかたが測地的なものでなければならないので限定的であると思うかもしれませんが，結果的には線がちょっと曲がってたりしても成り立ちます．v, e, f は連続的な変化で不変だからです．

3.3 一般の曲面に関する大定理

現代幾何学には主に「位相幾何学（柔らかい幾何学）」,「微分幾何学（硬い幾何学）」,「代数幾何学（代数の手法による幾何学）」の 3 種類に大別できますが，これから紹介する定理は,「位相幾何学」と「微分幾何学」の橋渡しをするめちゃくちゃすごい定理なんです[*7].

> **Gauss-Bonnet の定理** 向き付け可能な閉曲面 S にリーマン計量が与えられているとします．この曲面 S に関して，オイラー数 $v-e+f$，ガウス曲率 K をもつとすると，
>
> $$\int_S K d\sigma = 2\pi(v-e+f)$$

この定理がどういった意味なのか，皆さんはまだ全然わからないと思います．というのも，わからない単語がいくつも書いてあることと，方程式の左辺に積分記号がついているためです．しかし，右辺はどうでしょうか．前のページの ① と全く同じ形であることに気付くでしょう．実は君たちはたった今，この大定理の球面バージョンを示していたのです！

Gauss-Bonnet の定理の半径 1 の球面バージョン

特に半径 1 の球面上ではどの点をとってもガウス曲率は一定数 1 になります[*8]．このとき Gauss-Bonnet の定理の左辺は，次のように計算できます.

$$\int_S K d\sigma = (\text{球の表面積}) \times (\text{ガウス曲率}) = (\text{半径 1 の球の表面積}) \times 1 = (\text{半径 1 の球の表面積})$$

ひとつめのイコールは特にガウス曲率が一定数のときに成り立ちます．この計算によれば，半径 1 の球面における Gauss-Bonnet の定理の主張は，$(\text{球の表面積}) = 2\pi(v-e+f)$ と表せます．この式は前のページの ① そのものです.

問 5 半径 2 の球面のガウス曲率は一定数になります．Gauss-Bonnet の定理を用いて，その値を求めなさい.

---

*7 「位相幾何学」と「代数幾何学」を結ぶ定理としては，Riemann-Roch の定理があります．詳しく知りたい生徒は § 3.5 を見てください.

*8 ガウス曲率はどういうものかは補足 2 を見ましょう.

前の補足 1 で種数 g に対して，オイラー数は $2-2g$ と表せることを紹介しました．つまり，g 人乗りのうきわに対して三角形分割すると，$v-e+f=2-2g$ というわけです．この事実から，種数を使って Gauss-Bonnet の定理を記述することができます．

Gauss-Bonnet の定理　向き付け可能な閉曲面 S にリーマン計量が与えられているとします．この曲面 S に関して，種数 g，ガウス曲率 K をもつとすると，

$$\int_S K d\sigma = 4\pi(1-g)$$

種数が決まっていれば左辺のわけのわからない積分（$\int_S K d\sigma$）[*9]の結果が一瞬でわかってしまうのです．さらに，左辺 $\int_S K d\sigma$ は位相不変量であることも確認できます．

問 6　次の立体に関して，$\int_S K d\sigma$ の値を答えなさい．

(1)　トーラス

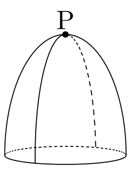
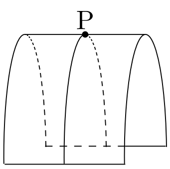
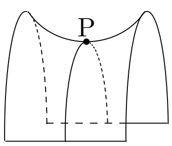
(2)　マグカップ

(3)　君が今している腕時計

研究課題　今までの議論で半径 1 としてきた部分を，すべて半径 r として議論を再構築しなさい．

補足 2　（ガウス曲率）

ガウス曲率とは曲面の各点における曲がり具合を示す量です．ガウス曲率が大きいほど，急激な曲がり具合です．定義は難しいので，ここではイメージとしてとらえましょう．点 P におけるガウス曲率の符号とその曲面の具体例を以下の表にまとめました．

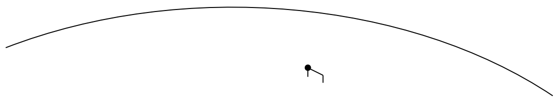
符号	正	0	負
具体例			

一般に曲面は各点によってガウス曲率が違うので，Gauss-Bonnet の定理における K は一般に定数ではないことにも注意しましょう．

[*9] 一般の立体に関して左辺を計算するのはすごーく大変です．トーラスですらすごーく大変だと感じると思います…

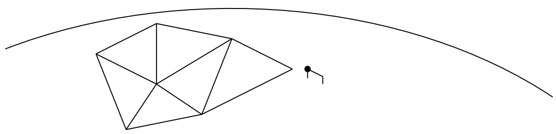
3.4　お話：位相不変量

ある閉曲面の上にアリがいます．アリにとってはその曲面が全体としてどんな形なのかわかりません．どのようにすれば大まかな形を調べられるでしょうか．



アリ A の発想　アリ A はその場でうじうじしててもわかんないから，飛行機を作って少し離れて全体を見渡してみようと言いました．確かに，大まかな形はわかりそうです．ただ，見る角度によって違う形に見えそうですので，いろいろな角度から見なければなりません．

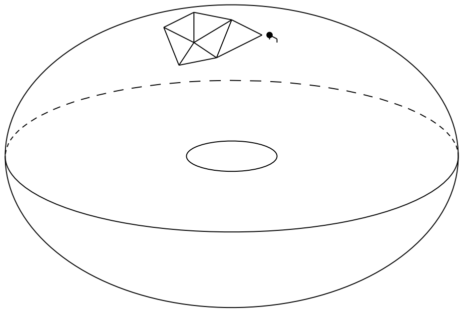
アリ B の発想　数学が好きなアリ B は地面に三角形を描き始めました．最終的にこの閉曲面は三角形で埋め尽くされました．（アリ B は閉曲面を三角形分割したのです．）



頂点の数 v，辺の数 e，面の数 f は曲面上にいるアリにとっても数えることができます．実際に計算してみると，$v-e+f=0$ となりました．

実は補足 1 で述べた結果はもっと強く言うことができ，種数 g の閉曲面のオイラー数は $2-2g$ であるだけでなく，オイラー数が $2-2g$ ならば種数が g でなければならないという事実も知られているのです．

つまり，$v-e+f=0$ なら，穴が 1 個だけあるような閉曲面であるとわかってしまうのです．位相不変量であるオイラー数のおかげで，アリ B は 2 次元の世界から飛び出すことなく 2 次元の世界の形を知ることができたのです．



その昔，このアリと同じように，ヒトは地球の形がわからずにいました．
はるかかなたまで続く平面だと思っていたのでしょう．……Ⓐ

ヒトにとって今，興味があるのは宇宙の形です．
はるかかなたまで続く３次元空間だと思っていますか？……Ⓑ

宇宙の話は私もよく知りませんが（理科の先生に聞いてください），Ⓐ と Ⓑ は同じような疑問であり，現在は Ⓐ が否定の形で知られているわけですから，数百年後には Ⓑ が否定の形で知られていても全然おかしくないと思います．

調べようと思っても，我々は４次元空間に存在することができませんから，少し離れて全体を見渡すことは不可能です．つまり，アリ A の発想は使えないわけであり，アリ B の発想を使うべきなのです．３次元から飛び出すことなく３次元の世界の形を知るために，位相不変量を使いたいということです．ところが，現在のところ，３次元の立体に対してはそのようなうまい位相不変量は見つかっていません．逆を言えば，それを見つけることで宇宙の形がわかる可能性もあるのですね．

数学という学問ではまだわからないことがたくさんあり，それを解決することで自然科学の問題が解決することも多くあります．どの分野でもそうですが，知られていないことを発見することや未解決問題を解決することは将来の皆さんに期待したいところです．とはいえ，わからないことを解決するためには，わかっていることを勉強しなければならないこともまた事実ですので，学校の授業は一番に大事にしながら，自分が興味を持っているいろいろなことを勉強していきましょう．

3.5　お話：Riemann-Roch（リーマン・ロッホ）の定理とその応用

位相幾何と微分幾何を結ぶ橋のひとつに Gauss-Bonnet（ガウス・ボンネ）の定理がありますが，位相幾何と代数幾何を結ぶ橋のひとつに Riemann-Roch（リーマン・ロッホ）の定理があります．それを詳細に述べるのは本稿の目的を逸脱してますが，将来，この定理を耳にした受講生の皆さんが，「あっ！そういえば…」と思い出して，このページを開いてくれればうれしい，そんなつもりで，本定理に関する若干のメモをしておきます．

Riemann-Roch の定理

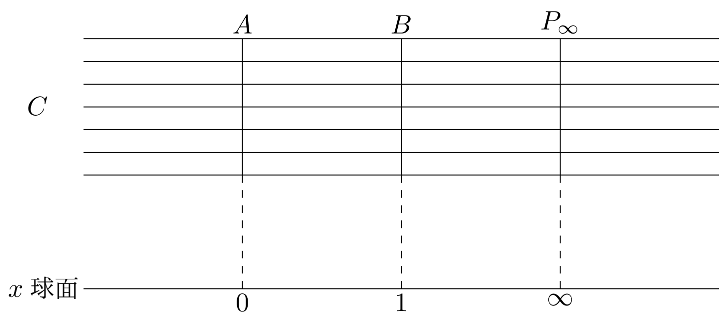
C：種数 g のコンパクトリーマン面，D：C 上の因子，$\mathrm{deg}D$：D の次数，
f：恒等的にゼロでない C 上の有理形関数，$(f)=\mathrm{div}f$，
ω：C 上の Abel（アーベル）微分，$(\omega)=\mathrm{div}\omega$，
$L(D)=\{f|(f)+D\geq 0\}$，$l(D)=\mathrm{dim}L(D)$，$\Omega(-D)=\{\omega|(\omega)-D\geq 0\}$，$i(D)=\mathrm{dim}\Omega(-D)$ とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$l(D)-i(D)=\mathrm{deg}D-g+1$$

（使用例）

本講座の最終日には“エルランゲンプログラム”が紹介されます．その提唱者である Felix Klein（フェリックス クライン）が深く研究したために“クライン曲線”と名付けられているコンパクトリーマン面を C として取りあげて，幾つかの D について $l(D)$ を計算してみます．なお，コンパクトリーマン面については，昨年の本リレー講座 5 日目の講義録[*10]などを参照してください．

C は方程式 $y^7=x(x-1)^2$ で表され，これは x 球面上の 3 点 $x=0,1,\infty$ で分岐する 7 葉の巡回的被覆面と考えられ（下図参照），これらの分岐点をそれぞれ，A,B,P_∞ とします：



[*10] http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/2012summer_5Kawasaki.pdf

（ステップ１）

C の種数 g の計算（さきの URL での講義録 p.18 などを参照してください）:

リーマン・フルヴィッツの定理より $2g-2=-2\times 7+3(7-1) \quad \therefore g=3$（３人乗りの浮き輪！）

（ステップ２）

「C 上の Abel 微分のなすベクトル空間（g 次元になる)」の基底を求める：

$(x-1)=7B-7P_\infty$，$(y)=A+2B-3P_\infty$，$(dx)=6A+6B-8P_\infty$ により，

$\left(\dfrac{dx}{y^3}\right)=3A+P_\infty$，$\left(\dfrac{(x-1)dx}{y^5}\right)=A+3B$，$\left(\dfrac{(x-1)dx}{y^6}\right)=B+3P_\infty$ となり，

求める基底は，$\left\{\dfrac{dx}{y^3}, \dfrac{(x-1)dx}{y^5}, \dfrac{(x-1)dx}{y^6}\right\}$ とできる．

（ステップ３）

$l(D)$ を計算する：

D として，$D=nP_\infty(n=0,1,2,\dots)$ してみます．例えば，$n=3$ とすると，ステップ２での計算により，$i(D)=1$ と分かるので，リーマン・ロッホの定理により $l(D)-1=3-3+1$ となり，$l(D)=2$ と分かる．同様にして，次の結果を得る：

n	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
$l(D)$	1	1	1	2（計算済）	2	3	4	$\dots$

因みに D として，$D=nA(n=0,1,2,\dots)$ や $D=nB(n=0,1,2,\dots)$ としても同じ表を得る．

（注意）

この結果はリーマン面 C 上の３つの分岐点 A,B,P_∞ がワイエルシュトラス点であることを意味します．また，C に双有理変換

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{Y^3}{X} \\ y=-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X=\dfrac{y^3}{1-x} \\ Y=-y \end{cases}$$

を施すと，特異点のない４次曲線 $x^3y+y^3+x=0$ となります．

クライン曲線は興味深い数多の性質をもつ（クライン博士の慧眼に敬服します）もので，興味ある人は，例えば，J.Matsieva 氏による簡にして要を得たガイド The Klein Qurtic[*11]などを参照することをお勧めします．

[*11] http://www.math.hmc.edu/~ursula/teaching/math189/finalpapers/julia.pdf#search='Klein+curve'

§ 4　Desargues（デザルグ）の定理への案内とその周辺散策

4.1　立方体はどう見えているか

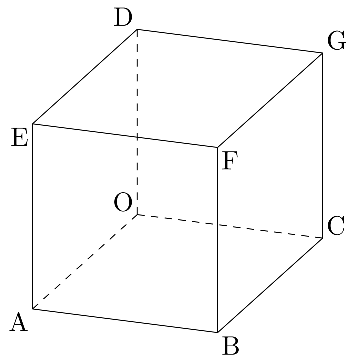
中学 1 年の空間図形で，見取図を習ったと思います．立体を 1 つの方向から見て，その見たままを平面上に描き表した図を**見取図**といいます．また，見取図では隠れて見えない線は破線で描きます．

なんの疑問も持たずに授業を聞いていた生徒と，そうでない生徒がいると思います．見たままを描くことはなかなか容易ではないですよね．立体の見え方についてもう少し深く考えてみましょう．

例題 4　立方体を，そのまま見えたとおりに描いてみましょう．さて，君はどの辺を平行に描きましたか．

解答例　右の図．

OA// CB// DE// GF
OC// AB// DG// EF
OD// AE// BF// CG
に気をつけて描いた人が多いのではないでしょうか．
中学生・高校生にとってはこれは模範解答といってもいいでしょう[*12]．

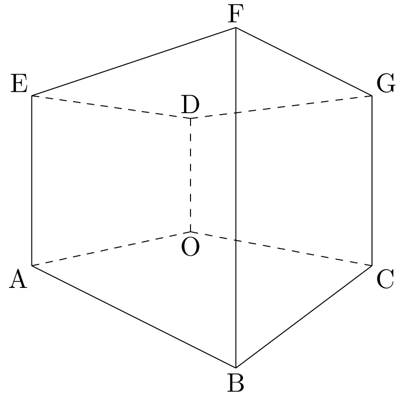


しかし，厳密に考えたときこれらの線分は本当に平行に見えているのでしょうか．

例題 5　ものすごく大きな立方体の建物を，そのまま見えたとおりに描いてみましょう．さて，君はどの辺を平行に描きましたか．

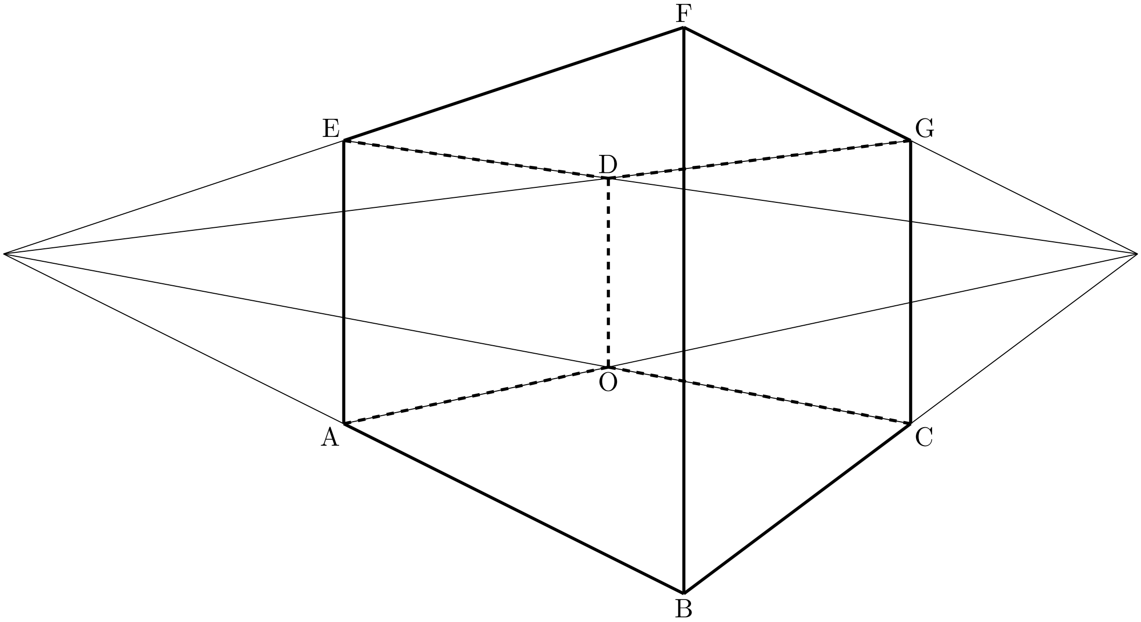
解答例　右の図．

点 B の近くにいる人から見た立方体の建物は右の図のように見えるはずですが，例題 4 で平行にかいた線分が明らかに平行ではないように見えます．どうしてこんなことが起こってしまうのでしょうか．



[*12] 初等中等数学においては遠近の差がでないように描くのが普通です．

例題２の図は実は補助線を加えると以下のようになっていることが想像できるでしょうか．透視図ってどこかで聞いたことがありますか？（１点透視図法，２点透視図法，３点透視図法があります．）下の図では２点透視図法を利用して図を描いていると言えます．

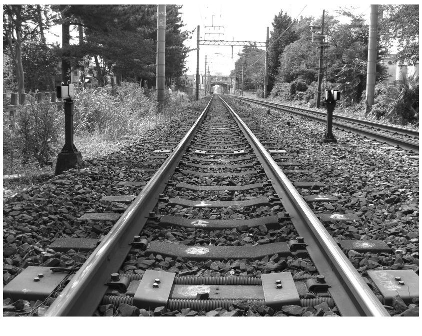


すなわち，例題４で平行に描いた線分は直線として考えると１点で交わっていることが分かります．この図では OD// AE// BF// CG のように見えるかもしれませんが，実際にはどこかで１点で交わるのです*13．（例えば，高層ビルを見上げることで上の階のほうが小さく見えるのは想像できると思います．）

問７　上の図に地平線を赤で描きいれなさい．ただし，地球は平面であるものとします*14．

これからしばらく，地球は平面であるものとします．

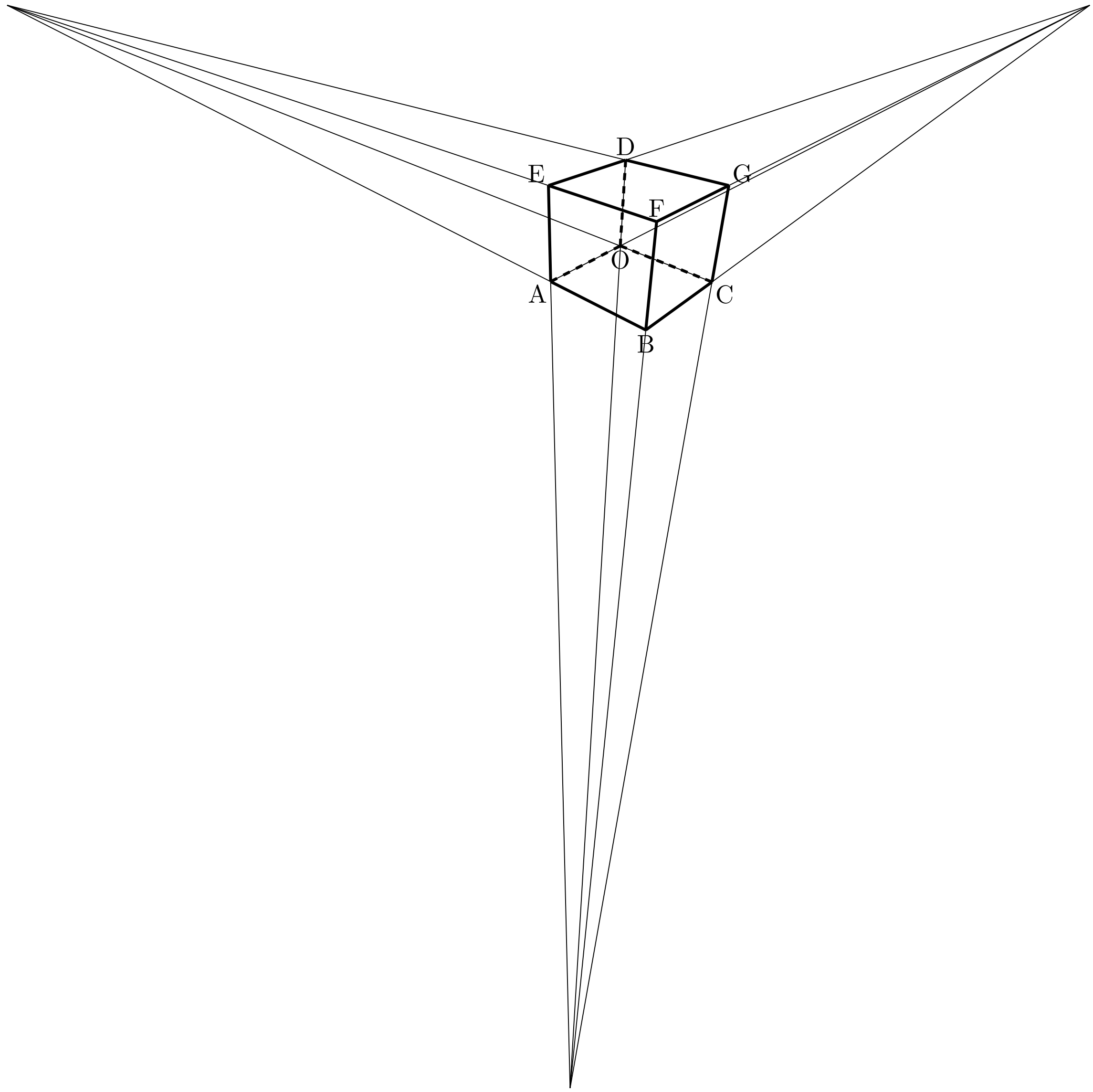
右の写真は線路の上から，進む方向を撮ったものです．平行な２直線が地平線で交わっているように見えるでしょうか．平行な直線は違う角度から見ることで交わる（ように見える）ことがあるのです．



*13 交わらない場合もありますがこれは後に述べます．平面は射影平面を表す万能の道具ではないのです．

*14 地球の形が問題自体に依存してくる理由は後の補足３で考えましょう．

例題 4 も同じように考えることができます．次のような図になりますね．確かに平行に見えると思われていた線分が，実は平行でなく，1 点で交わっているということがわかると思います．



問 8　立方体は四角形 OABC を下にして地面においています．上の図に地平線を描きいれなさい．

問 9　前のページの図と上の図それぞれに，直線 DF と直線 OB の交点を描きいれなさい．

上の問で気付いたかもしれませんが，地球（平面）と平行である平行な 2 直線は，その“ほとんど”が地平線上で交わるのです．“ほとんど”と書いた部分が平面と射影平面のギャップに起因するところでもあります．後ほど詳しく見ることにしましょう．

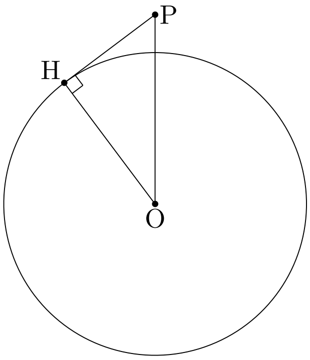
次の問題は宿題にしますので，家で考えてみてください．まだ初日なのでわからないと思いますが，4 日目の講義との関連性を見出せるととてもおもしろいと思います．

研究課題　上の図と同じように「三角柱」は実際どう見えているかイメージして，図を描きなさい．その際，平行な辺はすべて交点も明記し，地平線も描きなさい．

補足３　（地平線に関する考察）

本講習の意図とは話が少しそれてしまいますが，幾何に馴染むためにここでは少しだけ地平線に関する考察をします．

例題 6　地球を完全な球だと仮定します．地球の上に立っているあなたから見た地平線までの距離を求めなさい．ただし，地球の半径を r，あなたの身長（目の高さ）を h とします．



解答例　右の図において，点 P を目の位置，点 O 地球の中心とすると，点 H が地平線の位置です．地平線までの距離を l として（ただし，目から地平線までの距離としています），△PHO においてピタゴラスの定理を用いることで．$l^2 + r^2 = (r+h)^2$ がわかります．$l > 0$ なので，$l = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2hr + h^2}$ と表せます．

問 10　地球の半径を 6,378km として，自分の身長を代入することで，地平線までの距離を実際に確かめてみましょう．

問 11　富士山の山頂は，銚子市 (千葉県の一番東の市) から見えるでしょうか．ただし，富士山と銚子市の距離は 195km，富士山の標高は 3,776m とします．

電卓を使わないとルートの計算が難しいですが，実際に計算してみると，仮に 150cm の人の場合は約 4.37km 先まで見えるようです．180cm の人の場合は約 4.79km です．150cm の人が 30cm 身長を伸ばすと約 420m だけ視野が広がるのですね．

例題 7　地球を平面だと仮定します．地球の上に立っているあなたから見た地平線までの距離を求めなさい．また，地平線はどの位置に見えるか考えなさい．

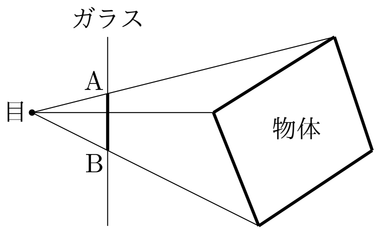
解答例　もし地球が平面だとすれば地球上のどの点も見ることができるはずですので，地平線までの距離は，あえて答えるなら ∞（無限大）でしょうか．さらに，地平線の位置は“目の高さ”になるはずです．目の高さより少し下を見ると必ず地球（平面）とぶつかってしまうからですね．

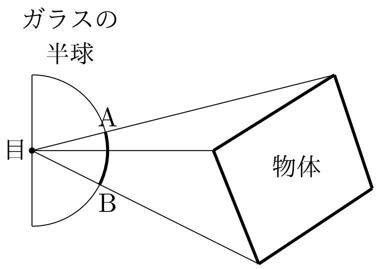
この問題のおもしろいところは，地平線の位置が身長に依存しないところだと思います．すなわち，どんな身長が高い人でも，どんな高いところに登って見ても，目の高さに地平線があるわけです．例えば，富士山の山頂から見たら地平線は少し下になりそうな気がしますが，実際は目の高さなのです．さらにもっと上まで行っても，地上 384,400km 月面の近くに行っても地球に足を向けている限り，目の高さに地平線はあるのですね．きっととても不思議な光景でしょうね．

4.2　ものを“見る”とはどういうことか

今までの議論で当たり前のように“見る”という言葉を使っていきましたが，ものを“見る”とはどのようなことなのでしょうか．ここでは，“見る”ということを，“ガラスに映るものを考える”ということだとみなして議論していきます．

ガラスの形を 2 つ考えます．ひとつめは平面のガラス，ふたつめは半球型のガラスです．

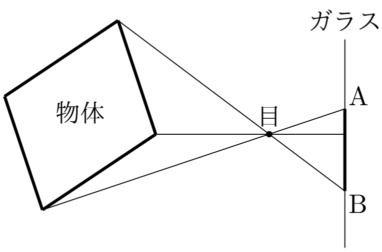


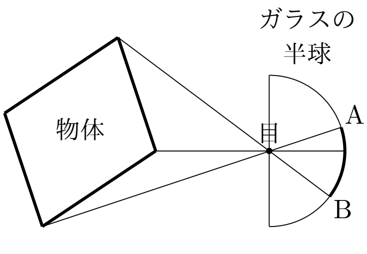


上のふたつの図において，ガラスに映るものは AB の部分ですね．これまでの議論では，左のような平面を考えることによって，レジュメに図を描きました．ところが，平面には射影幾何は厳密に表すことはできないのです[*15]．そのことをこれからイメージできるようになってもらいます[*16]．

少し“見る”範囲を拡張してみます．ガラスの手前に物体がある場合も表してみましょう．

“見る”という感覚からすると不思議に感じるかもしれませんが，次の図のように表せそうです．左がガラスの平面，右がガラスの半球と対応しています．素直に受け入れてくれますか？



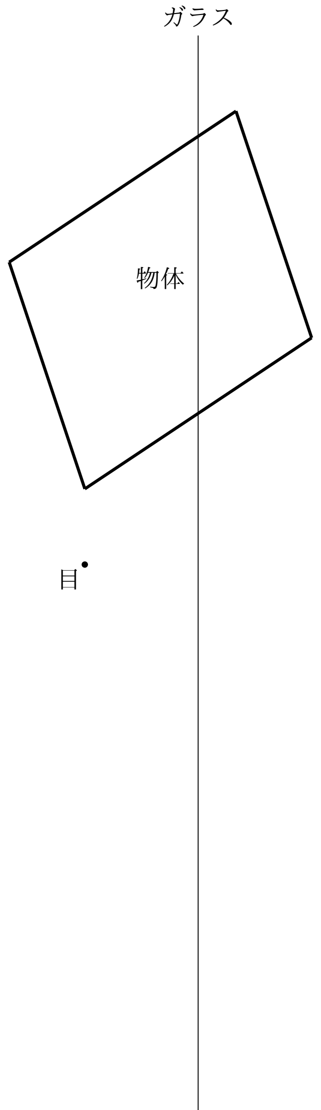


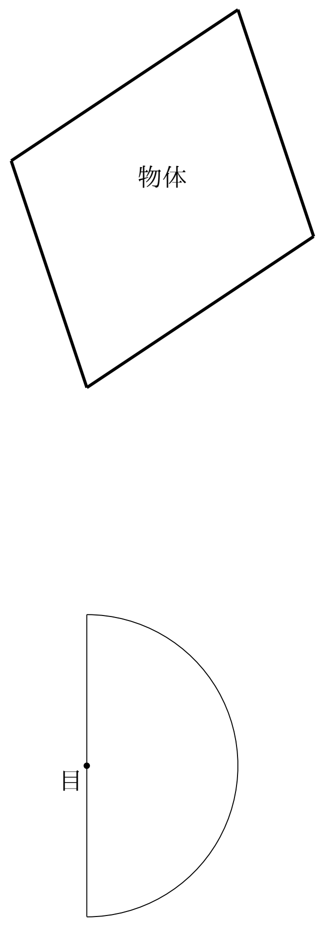
次のページの問を解いてイメージをわかせてみましょう．

[*15] ガラスの平面に映るものを考えると，ガラスと平行な関係にある平行線は交わらないのです．

[*16] とはいえ，2 次元に表すことはわかりやすいですし，表せるように描くことがほとんどの場合に関して可能ですので，射影幾何を利用する具体的な例を考える際に平面上に描き表して考えることは有用であると言えます．

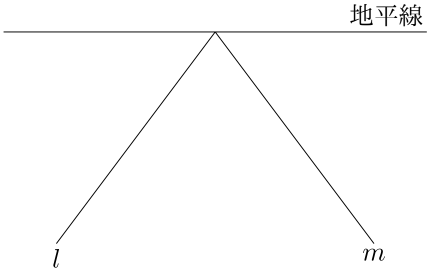
問 12　次の図のような位置関係においては，どのようにガラスに物体が映るでしょうか．右の図と左の図についてそれぞれ定規を使って描いてみましょう．





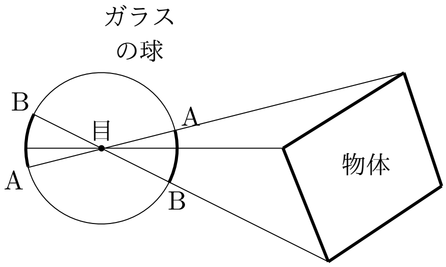
問 12 で平面よりも半球面のほうが万能であることを理解してもらえましたか？また，感覚の鋭い生徒は，底面の円周を含まない半球面は，平面と全く同じ性質になることも理解しているのではないかと思います．

問 13　見る範囲を拡張したガラスの平面を考えます（つまり，ガラスより手前の線路も見える！）．地平線で交わっているように見える線路 ($l \parallel m$) はガラスにどのように描けるでしょうか．左の図に描きいれてみましょう．



問 12 を解いてみて，ガラスの半球の議論が少し気持ち悪いと感じた人もいるかもしれません．というのも，底面の円周上に対応する射影幾何の点はその円の反対側の点と同じとみなせるので，半球面上ではすべての点が同等であるわけではないのです．

そこで右の図のようにガラスの球を考えれば，ある点を見たときに，その点はガラスの球面上にちょうど 2 個ずつ映り[*17]，球面上のすべての点が同等です．（例えば，図の 2 つの点 A は同じ点としてみなせるわけです．）物体をこのように表す場合は，図でいうと球面の右側の AB の部分と左側の AB の部分の 2 箇所に現れます．



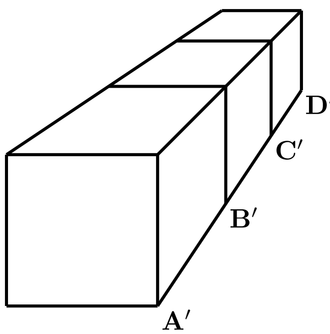
射影幾何という分野において扱う平面を“射影平面”といいますが，それは実際の平面で表すことは不可能であり，このような球面で反対の点を同一視したもので表すことができます．実際に射影平面を考えるときは，一般の平面を想像するよりもこのような球面を想像することのほうがむしろ自然だと私は思っています[*18]．そうは言っても，射影平面の定義をまだしっかりとしていないので，射影平面の雰囲気だけでもつかめればそれは大きな収穫だと思います．

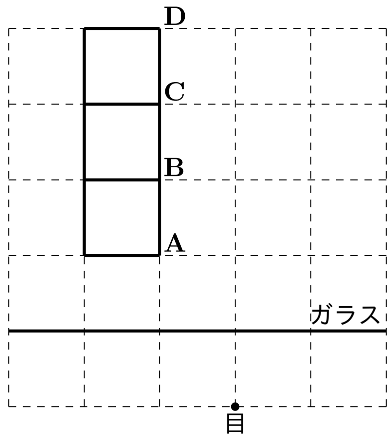
次の研究課題は今までの話を知った上で当然わいてくる疑問だと思います．家で少し考えてみましょう．

研究課題 立方体を並べたものはどのように見えるのかを考えましょう．

下の右の図のように立方体を 3 個並べたところ，ガラスには左の図のように映りました．右の図の 1 マスは 1 m とします．点 A,B,C,D はガラス上にある点 A′,B′,C′,D′ に映るものとします．

このとき，$A'B' : B'C' : C'D'$ を求めなさい．





また，できた人は $\dfrac{AC \times BD}{AD \times BC}$ と，$\dfrac{A'C' \times B'D'}{A'D' \times B'C'}$ をそれぞれ求めてみなさい．

---

*17 球の内部や球と交わる物体でも“目”以外の部分の点は，必ず球面上の 2 箇所に映ります．

*18 数学において，根底にある論理が正しければ，考え方・感じ方は人それぞれで良いと思います．

4.3　補足：本章の数学的表記

数学をよく勉強している人にとっては数学の記号はとてもわかりやすいです．というのも，その厳密性により正しく伝わるからです．補足４では，今までの議論を数学の記号を用いて厳密に表してみます．今はまだ内容に関しては全然わからないと思いますが，今までイメージした内容なので“なんとなく”わかる部分もあるのではないでしょうか．「ああ，補足４が早く完全に読めるようになりたいな」と思ってもらうことが私の願いです．

補足４　（今までの議論の数学的表記）

この補足４は目で眺めるだけにしましょう．

定義 1　(射影平面 $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$)

$(x_0, x_1, x_2), (x_0', x_1', x_2') \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ に対し，

$(x_0, x_1, x_2) \sim (x_0', x_1', x_2') \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \text{ s.t. } (x_0, x_1, x_2) = \lambda (x_0', x_1', x_2')$

としたとき，$\sim$ は同値関係をなし，この同値関係による同値類すべての集合を**射影平面**という．すなわち，$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} / \sim$ である．(x_0, x_1, x_2) の属する同値類を $[x_0, x_1, x_2]$ で表す．

ベクトル $(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ の同値類には，球面 $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ 上の２点，すなわち $\pm \frac{1}{\sqrt{X_0^2 + X_1^2 + X_2^2}} (X_0, X_1, X_2)$ が含まれていることはただちにわかる．このことから，中心に関して点対称な２点を同じものとみなすことで，S^2 を射影平面を捉えることもできる．

定義 2　($\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の直線)

$\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$ を，$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の**直線（射影直線）**という．（ただし，$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ とする．）また，$(x_0, x_1, x_2) \sim (x_0', x_1', x_2') \Longrightarrow a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0 x_0' + a_1 x_1' + a_2 x_2' = 0$ なので，これは well-defined である．

平面 $\mathbb{R}^2$ と射影平面 $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の間に，以下で定義される写像を考える．

$$\begin{aligned} i_p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2) &\mapsto [x_1, x_2, -1] \end{aligned}$$

補題 3　（平面と射影平面の対応）

(i) $G_\infty = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | x_2 = 0\}$ を，**無限遠直線 (地平線)** という．i_p の像は $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ における G_∞ の補集合と一致する．

(ii) G を G_∞ とは異なる $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の直線とすると，$i_p^{-1}(G)$ は $\mathbb{R}^2$ における直線である．逆に，g を $\mathbb{R}^2$ の直線とすると，$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の直線 G が存在して，$g = i_p^{-1}(G)$ が成り立つ．

定理 4　（射影平面の直線の性質）

(i) $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の異なる２点を通る直線はただひとつ存在する．

(ii) $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の異なる２つの直線は１点で交わる．

補題により，$\mathbb{R}^2$ の各直線 g に対して，$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ の直線 G が存在して $g = i_p^{-1}(G)$ であった．定理より，G は無限遠線 G_∞ と１点 g^∞ で交わる．g^∞ を g の**無限遠点**という．明らかに $G = i_p(g) \cup g^\infty$ であり，$\mathbb{R}^2$ の任意の直線 g はその無限遠点 g^∞ を添加することによって完備化されて，直線 G となる．G を g の**射影的完備化**という．g_1, g_2 を２つの平行な互いに異なる直線，G_1, G_2 をそれらの射影的完備化とすると，G_1 と G_2 の交点は G_∞ 上であり，これは平行な２直線は無限遠線（水平線）上で交わることを意味している．

【補足４の図形的意味を考えてみよう】

もし時間があれば，雰囲気だけでも一緒に読んでみます．ここにメモをとりましょう！

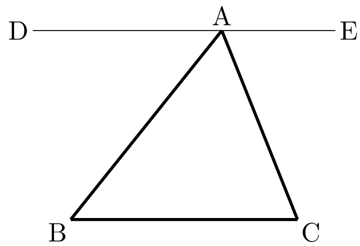
§ 5　「幾何」はどのように論じられてきたか？

5.1　ユークリッド幾何の５つの公理

今まで見てきた例を考えると学校で教わっている幾何と比べて少し不思議な感じがしますね．例えば，三角形の内角の和は 180° であると証明したはずですよね*19．授業でやった証明は間違っていたのでしょうか．

【三角形の内角の和が 180° であることの証明】

△ABC において，点 A を通り辺 BC に平行な直線 DE を右図のようにひく．



このとき，平行線の錯角は等しいので，

$\angle$ABC$=\angle$BAD ·········①

$\angle$BCA$=\angle$EAC ·········②

①，②より，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{BCA}+\angle \mathrm{CAB} &= \angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{EAC}+\angle \mathrm{CAB}\\ &= \angle \mathrm{EAD}\end{aligned}$$

３点 A,D,E は一直線上にあるから，$\angle$EAD$=180°$ になり，三角形の内角の和は 180° である．■

実は中学・高校で扱う「幾何」はユークリッド幾何に基づいています．ユークリッド幾何はでは，使って良い条件として５つの公理（公準）があります．

公理１　２点 A,B が与えられたら A,B を通る直線が１本だけ引ける．
公理２　線分を両方向にいくらでも延長できる．
公理３　点 A と数値 r が与えられたら，A を中心とし，半径 r の円が描ける．
公理４　直角は全て等しい．
公理５　直線 l とその外の点 P に対して，P を通り l に平行な直線が１本だけ引ける．*20

公理とは，議論の出発点となる前提条件のことです．これら５つの公理を認めることで，ユークリッド幾何の性質に関するさまざまな定理が導かれます．ところが，今まで見た例は三角形の内角の和が 180° を超えてしまいました．つまり，これらの公理が成り立たない世界の例を見ていたわけです！

問 14　今までの例では成り立っていない公理を，５個の中からあてずっぽうで選びなさい．

問 15　前の問で挙げた公理を使えないとすると，上の証明はどこが間違っていますか．

*19 中１は２学期以降ちゃんとやります．

*20 これはいわゆる『平行線の公理』です．実はもともとこの公理は『２直線に他の１直線が交わってできる４つの角のうち，同じ側にある２つの内角の和が２直角より小さいなら，この２直線を延長すると，その側で交わる』という少々難解な文言なのですが，ここではそれと同値なものを紹介しています．

5.2　平行線の公理を否定して得られる「非ユークリッド幾何」

もともと『幾何学』とは土地を測定する学問でしたが，図形そのものの性質や美しさを直接の対象とした数学へと変わっていきました．

ユークリッド（BC330 頃-275 頃）は今から 2000 年以上も前に，それまで知られていた幾何学の知識を集大成し，一冊の本『原論』にまとめました．この『原論』は長い間幾何学の教科書としてだけでなく，その，定義，定理，証明と続く全体のスタイルで，厳密な学問のひとつの典型的な例として扱われてきました．その結果，『原論』は世界中で，聖書につぐベストセラーであるといわれています．

このユークリッド幾何では，使ってよい条件（それは理屈抜きで正しいとしている条件）として前のページで述べた５つの公理（公準）があります．公理５は特に『平行線の公理』として知られています．実はもともとこの公理は『２直線に他の１直線が交わってできる４つの角のうち，同じ側にある２つの内角の和が２直角より小さいなら，この２直線を延長すると，その側で交わる』という少々難解な言い回しの公理です[*21]．このレジュメでは，それと同値な条件を公理５として紹介しています．

昔からその複雑さが大勢の数学者の目をひき，平行線の公理に関してさまざまな議論がなされてきました[*22]．その中で浮かんできたのは「ひょっとしたら平行線の公理は公理ではなく定理なのではないだろうか．つまり，平行線の公理は他の４つの公理から証明できるのではないだろうか．」という疑問でした．

大勢の数学者がこの問題に取り組んできましたが，どうしても証明することはできなかったようです．そんな中，「平行線の公理を証明するのに背理法を使ってはどうか．つまり，平行線の公理を否定した公理から出発し，どんどん幾何学を組み立てていく．そうすればそのうちに矛盾に行き着くに違いない．つまり，最初の仮定は誤りで，これで間接的に平行線の公理が証明されたことになるだろう．」というおもしろい発想が出てきました．これに取り組んだのはサッケリー（1667-1733）です．サッケリーは議論を進めていく中で次々と奇妙な定理を得ました．その一部を紹介します．

定理１　合同な場合を除き，相似な三角形は存在しない．
定理２　正三角形（３つの内角の等しい三角形）の辺の長さは，角の大きさで決まる．
定理３　三角形の面積は２直角と内角和の差に比例する．

これらは私たちの日常的な経験から考えれば誤っているように感じます．しかし，数学においてこれで矛盾しているとは言えません．「A が成り立つ」という事柄と「A が成り立たない」という事柄が証明されたときのみ，数学的に矛盾していると言えます．実際，サッケリーはこの奇妙な定理を前にして『矛盾』と判断してしまいましたが，実は論理的な整合性をもつものだったのです．

この事実をきちんと認め，新しい幾何の成立を宣言したのは，ボヤイ (1802-1860) とロバチェフスキー (1793-1856) でした．この２人が初めて非ユークリッド幾何学を世に知らしめたと言われています[*23]．『非ユークリッド幾何』とは，平行線の公理を否定した『幾何』なのです．

---

*21 この難解さこそが，そもそもユークリッド自身が第５公理を苦肉の策として採用したことを物語っているように私は感じています．

*22 複雑さのみに依るものでもないと思います．平行線の定義が綺麗ではないと感じる数学者も多かったため，あまり公理に組み込みたくなかったのではないでしょうか．現にユークリッド自身も平行線の公理はなるべく使わないように証明を進めていたようです．

*23 ガウス (1777-1855) も非ユークリッド幾何の成立は確信していたようですが，なぜか世に発表することはしませんでした．

5.3 （本日２回目の）そもそも「幾何」ってなんだろう？

長い間，ユークリッド幾何が唯一無二の『幾何』でした．昔は『幾何』の定義といえば，５つの公理を提示し，この公理が成り立つ世界とでも答えれば 100 点だったのでしょう．さて，非ユークリッド幾何が誕生してから『幾何』とは何なのかいよいよわからなくなってきました．

というのも，公理系が異なるさまざまな幾何が構築される中，『幾何』においてはこの公理を使わなければならないなどといったルールはなく，さらに現代においては『位相幾何学』，『微分幾何学』，『代数幾何学』などといった，公理系を意識していない幾何が数多く構築されています．このような多方面まで分化している現代数学の幾何において，『幾何』そのものが何なのか曖昧になってしまっているように思いませんか？

「幾何とは何なのか」をもう 1 度考え直すことは，ある意味自然なことであり，とても重要なことであることを実感してもらえるでしょうか.

明日からの４日間，幾何の例をいくつか見ていきます．それらの幾何にはどんな特徴があるのか，どんな共通点があるのか，幾何とはそもそも何なのかを意識しながら聞いて欲しいと思います．最終日に，クラインが提唱したエルランゲンプログラムを勉強することで，『幾何』に一本の背骨が通ることに期待しましょう．

参考文献

[1] 瀬山士郎，『幾何物語』，ちくま学芸文庫

[2] 寺阪英孝，『非ユークリッド幾何の世界』，講談社

[3] 寺阪英孝，『初等幾何学』，共立出版

[4] J.R. ウィークス，『曲面と 3 次元多様体を視る』，現代数学社

[5] 難波誠，『代数曲線の幾何学』，現代数学社

[6] 林正人，『中高一貫ハイステージ数学　幾何（上）』，東進ブックス

[7] H. クネーラー，『幾何学（下）』，Springer

[8] 大森英樹，『幾何学の見方・考え方』，日本評論者

[9] 伏見康治，安野光雅，中村義作，『美の幾何学』，ハヤカワ文庫

[10] 木之本藤隆，『中学への算数 (2012.10 号 P.60-61)』，東京出版

[11] 見城尚志，佐野茂，『ピタゴラスの定理でわかる相対性理論』，技術評論社