平成25年度 夏期講習

数学科リレー講座 2日目

第1部

非ユークリッド幾何の歴史

担当 小林

2013/08/20

目次

1　平行線の公理とは

幾何学は古代ギリシアにおいて発展した学問です。皆さんが幾何の授業で学ぶような定理のほとんどは, ギリシア時代の幾何学の中で証明されたものばかりです。このギリシアで発展した幾何学をまとめ上げた本を, ユークリッドの『原論』といい, このまとめられた幾何学をいわゆる”ユークリッド幾何”と呼んでいます。

『原論』は次のようなスタイルをとっています。まずはじめに誰もが納得している事実 (公理[1]) を挙げます。その公理を出発点として, 別のある事実が正しいことを, その根拠を, きちんと筋道を立てて説明する (証明) ことで示し, これを定理とします。この定理を公理の上に次々と積み重ねていくことにより, 幾何学を構成していきます。ユークリッド幾何学における公理は全部で 5 つあり, 第 1 公理から第 4 公理は次のようなものです。

第 1 公理	2 点を結ぶ直線はただ 1 本存在する。
第 2 公理	線分を両方向に延長することができる。
第 3 公理	1 点を中心とし, 他の 1 点を通る円が存在する。
第 4 公理	直角は互いに等しい。

第 5 公理がいわゆる「平行線の公理」と呼ばれる公理です。

> 2 直線に他の 1 直線が交わってできる 4 つの角のうち, 同じ側にある 2 つの内角の和が 2 直角より小さいなら, この 2 直線を延長すると, その側で交わる。(図 1)

これは, 次のように言い換えることもできます。この言い換えをしたのは, イギリスの数学者プレーフェア (1748-1819) です。

> 直線外の 1 点を通り, この直線に平行な直線がちょうど 1 本だけ存在する。(図 2)

[1] 数学全体の出発点となる事実を公理と呼び, 特に幾何学の出発点となる事実を公準といいますが, 現在ではあまり区別することなく使っています。

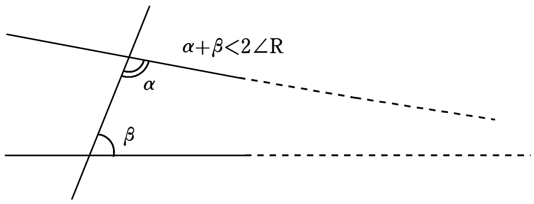


図1

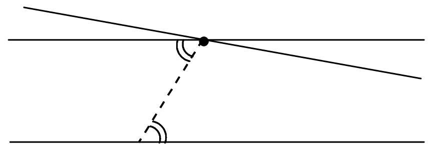


図2

第 5 公理は他の公理に比べてずいぶん複雑な表現になっています。それが人々の目につき, 平行線をめぐった議論がいろいろとされました。ユークリッド自身も, この平行線の公理をなるべく使わないようにし, 必要に迫られたときに限って用いるという姿勢をとっていたそうです。[2]平行線の公理をめぐる議論の中で, 次のように考えた人たちがいました。

> 第 5 公理は, もっと簡潔に表現できないのだろうか。あるいは, 第 1 公理から第 4 公理を使って証明されてしまうことはないのだろうか。つまり, 第 5 公理は公理ではなく定理なのではないだろうか。

このことは, ギリシアの数学者たちをはじめ,2000 年以上もの間, 数学上の大問題として議論されました。ここでは,17〜18 世紀にこの問題に取り組んだサッケリー (1667-1733, イタリア) とルジャンドル (1752-1833, フランス) について取り上げたいと思います。特にサッケリーは, 非ユークリッド幾何の発見までは到達しなかったまでも, それに関連した数々の数学的事実を明らかにし, 多大な功績を上げたことが知られています。

[2]公理の 5 番目にあることからも, そのような姿勢がうかがえます。

2　平行線の公理は証明できるか

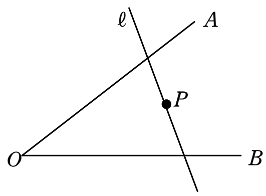
平行線の公理を証明しようという試みは多くの数学者によってなされました。17 世紀までで主なところを挙げますと,

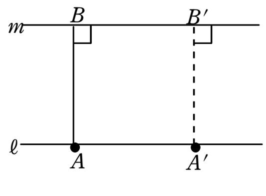
ポシドニウス (前 1 世紀)	プトレミー (前 1 世紀)
プロクルス (6 世紀)	ナサル-エディン (1201-1274)
ヴィタエ (1633-1711)	ウォリス (1616-1703)

などがいました。しかし, それらの取り組みはどれも, 平行線の公理と同値[3]な言い換えをしたものや, 平行線の公理から導かれることを用いて証明するという, いわば「平行線の公理を用いて平行線の公理を証明する」という誤りがありました。

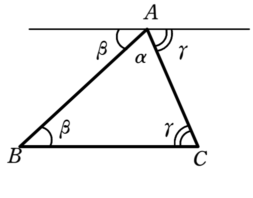
そしてやっかいなことは, 一見当たり前のように見える事実でも, それが実は平行線の公理と同値であったり, 公理を用いて得られる事実であったりすることです。しかもそれらはそれが非常に分かりづらく, 見落とされがちでした。次の 3 つの例は, 平行線の公理と同値とされる事実です。

例 1.　角 AOB 内の点 P を通り, 辺 AO, BO と交わる直線 ℓ を引くことができる。(左図)
例 2.　直線 ℓ 上の点 A から直線 m への距離は, 点 A の位置によらず一定である。(右図)
例 3.　三角形の内角の和は 2 直角である。



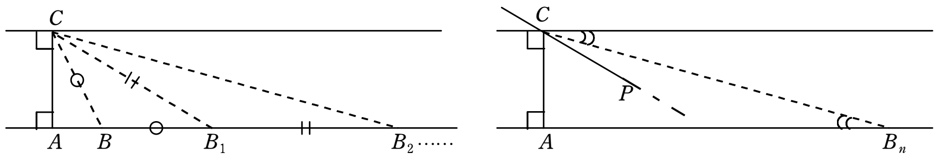


問 1. 「平行線の公理が成り立つ ⇒ 三角形の内角の和は 2 直角である」ことはすでに学習済みだと思います (下図)。



[3]2 つの命題 P, Q が同値であるとは, $P \Rightarrow$ (ならば)Q かつ $Q \Rightarrow P$ が成り立つことです。このとき,$P \Leftrightarrow Q$ と書きます。

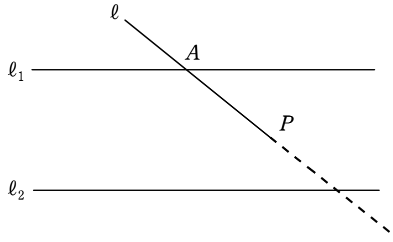
では,「三角形の内角の和は 2 直角である $\Rightarrow$ 平行線の公理が成り立つ」をどのような方針で示せばよいか, 考えてみましょう。



問 2. 次のプロクルスによる「平行線の公理の証明」には誤りがあります。それを見つけて下さい。

直線 ℓ_1, ℓ_2 は平行とし, 直線 ℓ が点 A のみで ℓ_1 と交わっているとする。

ℓ_1 に関して ℓ_2 と同じ側にある ℓ 上の点 P と ℓ_1 の距離は,P が A から離れるほどいくらでも大きくなり, ℓ_1 と ℓ_2 の距離よりも大きくなるはずである。このような P は ℓ_2 に関して A とは異なる側にあるはずだから, 線分 AP は ℓ_2 と交わる。したがって,ℓ と ℓ_2 は交わる。



そして歴史的には, 非ユークリッド幾何学の登場 (平行線の公理を満たさない平面の発見) により彼らの努力は水の泡となってしまいます。そんな中, この「平行線の公理を満たさない平面」にあと少しで到達しそうだったのがサッケリーでした。一方のルジャンドルは, 平行線の公理の証明をいろいろと試みている途中で数々の有用な定理を導き出し, 後進の数学者たちに非ユークリッド幾何学発見への一つのきっかけを与えました。

サッケリーは, 次のようなアイデアを持っていました。

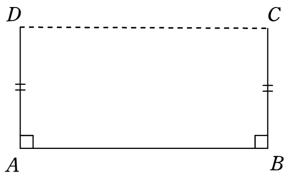
> 平行線の公理を証明するのに, 背理法を使ってはどうか。すなわち, 平行線の公理を否定した公理から出発し, 矛盾を導く。そうすれば, 最初の仮定, つまり平行線の公理を否定したことが誤りで, 間接的に平行線の公理が証明されたということになるだろう。

次節以降で, サッケリーやルジャンドルが具体的にどのようにこのアイデアを実行したかを紹介していきます。以降は, 平行線の公理は仮定しません。

3　非ユークリッド幾何の発見

3.1　サッケリーの四辺形と 3 つの仮説

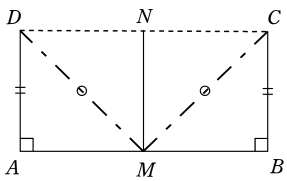
線分 AB の両端に等しい長さの垂線 AD , BC を立てて,C と D を結びます。こうしてできた 4 辺形 ABCD を S-四辺形と呼びます。このとき,$\angle C = \angle D$ になり, また $AB//DC$ が成り立ちます。



問 3. S-四辺形において, 辺 AB, DC の中点をそれぞれ M, N とします。
ここで,$AB//DC$ になる理由を考えてみましょう。

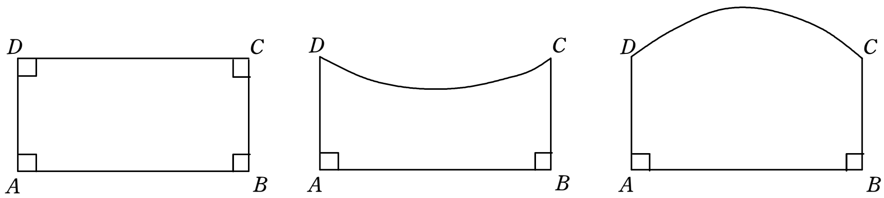
hint.1. $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ を利用すると,$\triangle NMD \equiv \triangle NMC$ がいえます。

hint.2. 2 直線に他の 1 直線が交わってできる 4 つの角のうち, 同じ側にある 2 つの内角の和が 2 直角なら, この 2 直線は平行です。(平行線の公理を使わなくても示せる事実です。)



この S-四辺形 ABCD について次の 3 つの可能性があります[4]。

直角仮説: $\angle C = \angle D = \angle R$
鋭角仮説: $\angle C = \angle D < \angle R$
鈍角仮説: $\angle C = \angle D > \angle R$



直角仮説　　鋭角仮説　　鈍角仮説

鋭角仮説と鈍角仮説から矛盾が出れば, 直角仮説が示されたことになります。さらに, 後で紹介する「サッケリー・ルジャンドルの第 2 定理」から, 直角仮説が三角形の内角の和が 2 直角であることと同値であることが分かります。P4 の例 3 より, 三角形の内角の和が 2 直角であることと平行線の公理は同値なので, 直角仮説と平行線の公理が同値であることになります。すなわち, 直角仮説が示されれば平行線の公理が証明できたことになります。

直角仮説 $\Leftrightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角に等しい $\Leftrightarrow$ 平行線の公理

[4]3 つのうちどの場合でも, $AB//DC$ は成り立ちます。また,AB や AD, BC の長さによらず, ある S-四辺形が 1 つの仮説を満たす場合, どんな S-四辺形も同じ仮説を満たします。

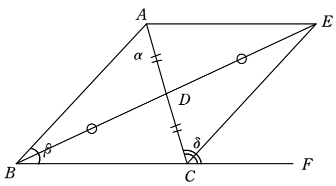
3.2　サッケリー・ルジャンドルの 2 定理

定理. (サッケリー・ルジャンドルの第 1 定理)
三角形の内角の和は 2 直角を超えることはない。

「三角形の内角の和は 2 直角である」という事実に慣れ親しんでいるため奇妙な感じがしますが, それは平行線の公理と同値な事実です。この定理は, 平行線の公理を用いずに証明できます。以下の 2 つ補題 (定理の証明に用いる命題) を使って証明します。

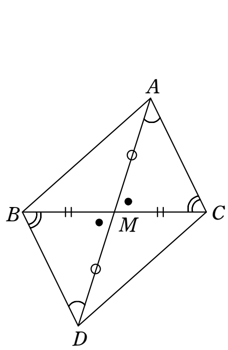
補題 1. 三角形の 2 つの内角の和は,2 直角よりも小さい。[5]

下図のように,AC の中点を D とし,BD を延長して $BD = DE$ となる点 E をとり,
E と A , E と C を結ぶ。
このとき,$AD = CD, BD = ED, \angle ADB = \angle CDE$ より,$\triangle ABD \equiv \triangle CED$ である。
よって,$\angle BAD = \angle ECD, \angle ECD$ は $\angle FCD$ の一部であるから,$\delta > \alpha$ となる。
両辺に γ を加えて,$\delta + \gamma > \alpha + \gamma$　　ゆえに,$2\angle R > \alpha + \gamma$



補題 2. $\triangle ABC$ と内角の和が等しく,$\angle A'$ が $\angle A$ の半分以下である $\triangle A'B'C'$ が存在する。

下図において,$AM = DM, BM = CM, \angle AMC = \angle DMB$ より,$\triangle AMC \equiv \triangle DMB$ である。
よって,$\angle ACM = \angle DBM, \angle CAM = \angle BDM$ となり,$\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ は内角の大きさが等しい。
ここで, $\angle BAM, \angle BDM$ のうちどちらか一方は $\angle A$ の半分以下であるから,$\triangle ABD$ が題意の $\triangle A'B'C'$ のことである。

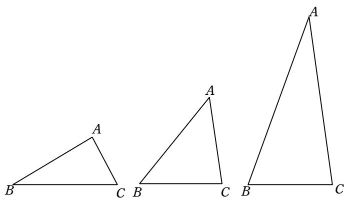


[5]これを使うと, P.6 の問にある hint.2. の事実が, 背理法によって示せます。

定理の証明.(の概要)

補題 2. より,$\triangle ABC$ の内角の和は,$\angle A$ に対応する角をを半分以下とした新しい三角形 $\triangle A'B'C'$ で考えればよいことになる。これを繰り返すことにより, 三角形の 1 つの内角はいくらでも小さくして考えてよいことになる。(下図)

このとき, 三角形の内角の和が 2 直角より大きいと仮定すると,1 つの内角はいくらでも小さくできるわけだから, 残りの 2 つの内角の和が 2 直角を超える場合が出てきてしまう。これは補題 1 に矛盾する。よって, 三角形の内角の和は 2 直角より大きくはならない。



定理. (サッケリー・ルジャンドルの第 2 定理)

直角仮説が成り立つ $\Leftrightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角に等しい

鋭角仮説が成り立つ $\Leftrightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角より小さい

鈍角仮説が成り立つ $\Leftrightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角より大きい

証明.(の概要)

直角仮説が成り立つ $\Rightarrow$ ($\triangle ABD$ の内角の和)+($\triangle ACD$ の内角の和)$= 2\angle R$

$\Rightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角に等しい

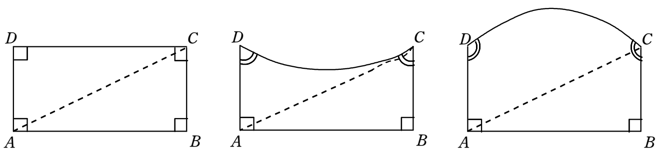
鋭角仮説が成り立つ $\Rightarrow$ ($\triangle ABD$ の内角の和)+($\triangle ACD$ の内角の和)$< 2\angle R$

$\Rightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角より小さい

鈍角仮説が成り立つ $\Rightarrow$ ($\triangle ABD$ の内角の和)+($\triangle ACD$ の内角の和)$> 2\angle R$

$\Rightarrow$ 三角形の内角の和は 2 直角より大きい

逆は背理法で示せます。



直角仮説　　鋭角仮説　　鈍角仮説

この 2 つの定理を総合すると, 鈍角仮説が成り立つとすると矛盾が起こることになります。よって, 鈍角仮説は否定されます。

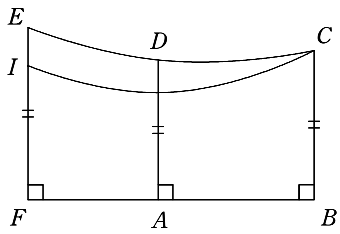
3.3　鋭角仮説から非ユークリッド幾何へ

では, 鋭角仮説はどうだったのでしょうか。三角形の内角の和が 2 直角より小さいというのは, サッケリー・ルジャンドルの定理に反するわけではありません。つまり矛盾が起きているとは言えない状況だったのです。

さらに, 鋭角仮説のもとでは, 次のようなことも導かれます。

直線外の 1 点を通り, この直線に平行な直線が 2 本以上存在する。

問 4. $EF > AD$ より, 線分 EF 上に $IF = AD$ となる点が取れます (下図)。この図において,「直線外の 1 点を通り, この直線に平行な直線が 2 本以上存在する」状況にあることを確かめてみましょう。



サッケリーやルジャンドルは, この奇妙な結果に困惑しました。ところが, 明確な矛盾点が見いだせないにも関わらず, 最終的には「どうみてもおかしな結果を生じるので, この仮説は否定される」と結論づけて終わってしまいました。平行線の公理の証明にこだわり, 結果的には非ユークリッド幾何学の発見に肉薄していたが第 1 発見者としての栄誉は逃すことになってしまいます。

その後, ダランベール (1717-1783),W・ボヤイ (1775-1856), ティボー (1775-1832) など数々の数学者が平行線の公理の証明を試みましたが, すべて失敗に終わりました。

19 世紀に入り, 平行線の公理の証明も暗礁に乗り上げていた頃,J・ボヤイ (1802-1860), ロバチェフスキー (1793-1856) は上で述べたような事実を認め, 鋭角仮説を公理として構成される幾何学に目を向けていたといわれています。これが, 非ユークリッド幾何のはじまりとされています。ガウス (1777-1855) もほぼ同時期に非ユークリッド幾何の研究を行っていました。

では, この鋭角仮説が発端となるこの非ユークリッド幾何は, 本当に矛盾がないのでしょうか。また, 果たしてこのような幾何は現実に存在するものなのでしょうか。

4　非ユークリッド幾何の誕生

ガウス, ボヤイ, ロバチェフスキーらは, 平行線の公理から脱却し,「直線外の 1 点からその直線に平行な直線が 2 本引けると仮定したらどうなるか」という方向で新しい幾何を模索していましたが, そのような幾何が矛盾なく現実に存在するかどうかは確信が持てずにいました。実際, ボヤイとロバチェフスキーはその点についてきちんと証明しておらず, ガウスに至っては, 非ユークリッド幾何の登場が引き起こすであろう混乱や否定的な反応を懸念し, 自身の構想を公表することさえしませんでした。

そこに一筋の光が差し込みます。リーマン (1826-1866) の登場です。彼はほとんど同時期に 3 数学者と同様の研究を行い, 非ユークリッド幾何をも含むようなまったく新しい幾何学の構想を考えました。1854 年には, ドイツのゲッチンゲン大学の教授就任講演にてガウスを前にしてその構想を発表し, ガウスを大いに感嘆させたといわれています。その講義録が 1868 年に出版され, 大きな反響を呼びました。その後, ベルトラミ (1835-1900), クライン (1849-1925), ポアンカレ (1854-1912) などによって, 非ユークリッド幾何が矛盾なく存在することの証明がなされました[6]。そこで採られた手法というのが,「非ユークリッド幾何のモデルを作る」という考え方です。

モデルについての説明は第 2 部で行いますが, 「直線外の 1 点からその直線に平行な直線が 2 本引ける」ようなモデルが作られ, ボヤイやロバチェフスキーの考えた幾何学が広く受け入れられるようになりました。さらには, 先で否定された鈍角仮説を満たす新たな幾何学が生まれることも分かりました。そこでは, 平行線の公理の替わりに「直線外の 1 点からその直線に平行な直線は 1 本もない」という公理を設け, 第 2 公理の「線分を両方向に延長することができる」を否定することで成り立っています。

[6] 実際には, 矛盾がないことを証明する道筋が示されたというのが正確なところです。モデルを作るのは”ふつうの” ユークリッド平面 (座標平面と考えても良い) の上なので, 非ユークリッド幾何に矛盾がないことを示すにはユークリッド幾何に矛盾がないことを示さなくてはなりません。ユークリッド幾何は座標平面を入れて考えることで, 代数計算の問題に帰着させることができます。よって, 数の計算に矛盾がないこと, さらに突き詰めると実数の体系に矛盾がないことが示されれば良いことになります。実数の体系に矛盾がないことは, 多くの数学者が直観的には確信していますが, 現在のところは残念ながらきちんとは証明されていません。

モデルの作り方や, それに付随して平行線の公理の替わりとなる公理をどのようにするか, 他の公理はそのまま公理とするかどうか, などによって様々な種類の非ユークリッド幾何学を考えることができたようです。3日目以降は色々な非ユークリッド幾何学について紹介をしていきます。

特にクラインは, 様々な非ユークリッド幾何学はその由来こそ違えど, それらの違いの決め手となるのは平行移動や回転などの「図形の動かし方」(数学的に表現すると「空間の変換群」) であるとの考察を得ていたようです。それを「エルランゲン・プログラム[7]」としてまとめました。これによって, 難解な非ユークリッド幾何がずいぶんと分かりやすく広く理解されるようになったといわれています。

参考文献

[1] 幾何入門 1・砂田利一・岩波講座 現代数学への入門

[2] 幾何物語・瀬山士郎・ちくま学芸文庫

[3] 非ユークリッドの世界・寺阪英孝・講談社ブルーバックス

[4] 中高生のための幾何学読本・本庄隆・東京書籍

[7] クラインがドイツのエルランゲン大学に就任する際に研究計画として提出した論文であったことから, このような名前がつけられました。