夏期リレー講習２日目（第２部）
〜計量と非ユークリッド幾何学〜

田村敬太

1　序章

紀元前から幾何学は研究されてきた. その代表としてユークリッド幾何学がある. いわゆる日常生活にも適用できる幾何学である. その幾何学の成果を集めた原論*1の中に次の公準（公理）が述べられている:

第 5 公準　一つの直線が二本の直線と交わり，同じ側の内角の和が二直角より小さいならば，この二直線を延長すると，二直角より小さな角のある側で交わる。

これは, 次の定理と同じと知られている:

定理 1.1　直線外の 1 点を通りこの直線と交わらない直線は, 1 つあって，ただ 1 つに限る .

大まかに述べると上の公準などを基に構成された幾何学である. このような幾何学とは違う幾何学を構成するために計量というものを考える.
計量とは，長さや体積を図るものである. もっとも基本的な計量は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

である.dx, dy は無限小の長さを表す. これは無限小の三平方の定理と見ることができる. 普段考えている空間*2 ではこの定理は良く知られ, 用いられている. 逆をいえば, 三平方の定理が成り立つ空間で物事を考えているとみることができ, この長さをもとにして, 長さを決めている. そこで, この長さや体積の基準を変えた空間を考えていきたい. 例えば:

$$ds^2 = dx^2 + \cos^2 y \ dy^2$$

である. この計量で計ると円が直線となってしまう. 当然のことながら, 計り方をかえたのでこのような現象がおこる, しかし, 計量を変えたことによりわかることが他にもある. それは, 角度である. 次の定理は当然のことのように用いてきたものである:

定理 1.2　三角形の内角の和は 180 度である.

この定理は平行線の第 5 公準によって導かれることが知られている. 逆に第 5 公準は上の定理からも導かれる. つまり, 次の定理である.

定理 1.3　（サッケリー）

三角形の内角の和は 180 度 $\Leftrightarrow$ 第 5 公準が成り立つ

従って第 5 公準は角度が関係していることがわかる. 次の定理は計量と角度を結ぶ定理である:

定理 1.4　(Gauss-Bonnet の定理)
A を可微分曲線がつくる三角形とする. 直線のなす角をそれぞれ ϵ_1,ϵ_2,ϵ_3 とすると次が成り立つ:

$$\int_A K dS = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \pi$$

ここで K は Gauss 曲率を表し dS は体積要素を表す.

---

*1 ユークリッドの原論と呼ばれている. この原論には幾何学だけではなく整数論についてもかかれており, あまりの業績の多さに一人で全て発見したのかという疑問がある.

*2 Euclid 空間と呼ぶ

この定理は, 現代数学では微分幾何と位相幾何を結びつける大切な役割を果たしている. ここで注目するのは空間の曲がり具合によって角度が決まるのである. これは, 第 5 公準が空間の曲がり具合に関係していることを意味していおり, 他の公準から第 5 公準が導くことができない理由になっている.
この稿では, 計量と曲率についてを簡単に説明し, 具体例として球面において平行線の公準が成り立たないことの証明をしていく.Gauss-Bonnet の定理や Gauss 曲率の詳しい性質は参考文献を読んでもらいたい. 高度な数学が多く必要なために証明を割愛させてもらうこともある. また, 写像や微分, 行列などの基礎知識は参考文献や高校の教科書などを参考にしてもらたい.
多くの知識を仮定して書くことや不十分な説明で読者に不慣をあたえることをこの場を借りて謝罪したいと思う.
記号 : $\mathbb{R}$ で数直線[*3],$\mathbb{R}^2$ で平面,$\mathbb{R}^3$ で空間を表す.
以降は, 上の記号を用いる.

2　第一次基本形式

この章では, 第一次基本形式 (計量) を定義して平面の計量を求めてみる.
写像[*4]$\mathbb{P}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(u,v) \mapsto (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ の各成分が (u,v) に関して可微分[*5]であるとする. このような $\mathbb{P}$ を曲面という.
P_u,P_v で各変数に関する微分を表すとする. 今,$\mathbb{P}_u$,$\mathbb{P}_v$ が一次独立[*6]だと仮定する.

定義 2.1　E,G,F を次のように定義する

$$E = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u \tag{1}$$
$$G = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v \tag{2}$$
$$F = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v \tag{3}$$

・を使って内積[*7]を表す.

微分は接線の傾きを表わすので,$\mathbb{P}_u$,$\mathbb{P}_v$ は曲面の接ベクトルを表す.[*8](u,v) を固定すると, その点における接ベクトルは $\mathbb{P}_u$,$\mathbb{P}_v$ を伸ばしたり, 縮めたして繋いだものになる.[*9]他の言い方をすると, どんな接ベクトルも次の形にかける:

$$\xi \mathbb{P}_u(a,b) + \eta \mathbb{P}_v(a,b) \tag{4}$$

ここで, ξ, η は実数を表す.

定義 2.2　(接空間)
(a,b) を固定したとき, その点における接ベクトルの全体を次の記号で表す:

$$T_{(a,b)}(\mathbb{P}(u,v))$$

[*3] 実数全体の集合
[*4] 対応関係のことを数学では写像という
[*5] 数 III の教科書参照
[*6] 矢印だと思うと三角形をつくれるということ.
[*7] 数 B の教科書参照
[*8] 曲面上を考えているので傾きではなく接ベクトルになる.
[*9] このような性質をベクトルにおいて基底という.

つまり,(4) の形のベクトルの全体をあらわす. また,(4) の形のベクトルの長さは (1), (2), (3) を用いて次のように表すことができる:

$$\sqrt{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}$$

上を記号で次のように表わす:

$$\|\xi\mathbb{P}_u(a,b)+\eta\mathbb{P}_v(a,b)\|=\sqrt{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}$$

長さのことをノルムという. 曲面 $\mathbb{P}$ の定義されている領域内に可微分曲線 $(u(t),v(t))$ をとり曲面上の曲線 $\mathbb{P}(t)=\mathbb{P}(u(t),v(t))$ を考える. 各点における接ベクトルは次のように計算できる[*10]:

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt}=\mathbb{P}_u\frac{du}{dt}+\mathbb{P}_v\frac{dv}{dt}$$

となるこの長さは, 次のようになる:

$$\left\|\frac{d\mathbb{P}}{dt}\right\|=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

曲線 $\mathbb{P}(t)$ の $\alpha\leqq t\leqq\beta$ の曲線の長さは次のように定義される:

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$$

そこで次のような量を定義する:.

$$ds^2=I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{5}$$

du,dv は無限小変化量を表す.[*11]この量を第一基本形式, または計量と呼ぶ.
この定義を用いて, 平面の計量を求めてみる.
例:(平面の計量)
平面は $\mathbb{P}(u,v)=(u,v,0)$ と表わことができるので E,G,F は次のように計算できる

$$E=1,G=1,F=0^{*12}$$

すると, 計量は次のようになる:

$$ds^2=I=du^2+dv^2$$

du,dv は無限小の変化量なので, これは無限小の三平方の定理である.
計量は行列を用いると次のように表わせる.

$$I=(du,dv)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix} \tag{6}$$

$EG-F^2>0$,$E>0$ なので, 行列の言葉を用いると上の行列は正定値対称行列になる[*13]
3 次元空間の曲面の計量は正定値対称行列で与えられる. しかし相対性理論などで用いられる計量は正定値の対称行列ではない行列がでてくる[*14].

[*10] t に関する微分, 合成関数の微分法
[*11] 正確には双対基底とよばれるものである.
[*12] 数 II の微分と空間ベクトルの内積を知っていれば計算できる.
[*13] 固有値が全て正にな対称行列を正定値対称行列という
[*14] 正確には符号数 (3.1) 対称行列がでてくる

3 Gauss 曲率

ここでは, 曲面の Gauss 曲率を定義し, 平面, 円柱, 球面の Gauss 曲率を求めてみる. この 3 つの曲率から, 展開図がかけるのかがわかる. 後述するが, 平面と円柱の曲率は等しく, 球面については等しくない. この事実が大切である.

いくつかの量を定義していく.

$$e = \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{\|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v\|}{}^{*15}$$

このベクトルを用いて次の量を定義する.

$$L = e \cdot \mathbb{P}_{uu}{}^{*16}, M = e \cdot \mathbb{P}_{uv}{}^{*17}, N = e \cdot \mathbb{P}_{vv}$$

補題 3.1 (L, M,N の性質)

L,M,N は次のようになる:

$$\begin{aligned} L &= -\mathbb{P}_u \cdot e_u \\ M &= -\mathbb{P}_u \cdot e_v \\ &= -\mathbb{P}_v \cdot e_u \\ L &= -\mathbb{P}_v \cdot e_v \end{aligned}$$

これらを用いて Gauss 曲率を定義する. 定義は記号を用いれば, 簡単であるが, 実際に計算していくのは少々厄介である.

定義 3.2 (Gauss 曲率)

上の L,M,N と E,F,G をもちいて

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

この K を Gauss 曲率という.

行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ の行列式を $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$ と記号で表し $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2$ となる. この記号を用いる K は次のように書くことができる:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

覚えるときは下の方が覚えやすい.

次の定理は K は $L.M$,N を用いなくても定義できることを意味する.

定理 3.3 (Gauss の驚愕定理)

K は第一次基本形式 (計量) だけで決めることができる.

*15 $\times$ は外積と呼ばれるもので二つの $\mathbb{P}_u$,$\mathbb{P}_v$ の二つに垂直なベクトルを表す.

*16 $\mathbb{P}_{uu}$ は u の 2 回微分を表す.

*17 $\mathbb{P}_{uv}$ は u の微分をして v の微分をしたものを表す.

これは,Gauss の驚愕定理と名付けられている. これは, 曲面ではない空間事態に曲率を定義する際の基本になっている. この定理を基に色々な空間に曲率を定義する. 有名な例は,Poincare 上半平面の曲率である. 結果から述べると, 負の一定曲率になる.*18

Gauss 曲率の例 1(平面)

$\mathbb{P}(u,v)=(u,v,0)$ と表せ, 2 章の結果から

$$E=1,G=1,F=0$$

なので

$$EG-F^2=1$$

となる. また e として

$$e=(0,0,1)$$

をとることができ,$\mathbb{P}_{uu}=\mathbb{P}_{uv}=\mathbb{P}_{vv}=(0,0,0)$ となるので,$LM-N^2=0$ 従って,Gauss の曲率 K は

$$K=0 \tag{7}$$

次に円柱の Gauss 曲率を計算してみる.

Gauss 曲率の例 2(円柱)

円柱は $\mathbb{P}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ と表わすことができる.

$$\mathbb{P}_u(u,v)=(-\sin u,\cos u,0)$$
$$\mathbb{P}_v(u,v)=(0,0,1)$$

E,F,G を計算すると次のようになる:

$$E=1,F=1,G=1,EG-F^2=1$$

また e として

$$e=(\cos u,\sin u,0)$$

が取れる.

$$\mathbb{P}_{uu}(u,v)=(-\cos u,-\sin u,0)$$
$$\mathbb{P}_{vv}(u,v)=(0,0,0)$$
$$\mathbb{P}_{uv}(u,v)=(0,0,0)$$

となるので, 上を用いると

$$L=1,M=0,N=0,LM-N^2=0$$

となる. 従って Gauss 曲率 K は

$$K=0 \tag{8}$$

以上 (7),(8) から「平面」と「円柱」の Gauss 曲率は等しい. 大切な結果なので定理にまとめてかいておく.

定理 3.4 (曲率の計算の結果)

$$\text{平面の Gauss 曲率} = \text{円柱の Gauss 曲率} = 0$$

*18 この曲率を定義するためには, 一次分形式の外積代数の知識が必要となるので, 割愛させてもらう. 詳しくは, 参考文献を参照

この結果は,, 円柱が平面に展開することができることを意味している. 小学校のころから, 円柱を平面に展開できることは当たり前のよう扱ってきた. 実は, 今まで本当にできるかという問いは置き去りされてきた. 大げさに言うと, 定理 3.4 は円柱が, 平面に展開できることを数学的に証明したことになる.
次に球面の Gauss 曲率を計算してみる.
Gauss 曲率の例 3(球面)
半径 a の球面は次のように表すことができる

$$\mathbb{P}(u,v) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)^{*19}$$

この表示を用いると

$$\mathbb{P}_u(u,v) = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\cos v, a\cos u)$$
$$\mathbb{P}_v(u,v) = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$$

となり

$$E = a^2, F = 0, G = a^2\cos^2, EG - F^2 = a^4\cos^2 u$$

となる.

$$e = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$$

補題 3.1 を用いると

$$LN - M^2 = \frac{EG - F^2}{a^2}$$

となり,(3) から Gauss 曲率は

$$K = \frac{1}{a^2} > 0$$

(7),(3) から平面と球面の曲率は等しくない. これは, 球面が平面に展開できないことや球面の直線が普通の意味での直線とは違うことを意味している.

4 Gauss-Bonnet

ここでは,Gauss-Bonnet の定理を紹介し, 球面に適用する.

定理 4.1 (Gauss-Bonnet の定理)
A を可微分曲線がつくる三角形とする. 直線のなす角をそれぞれ ϵ_1,ϵ_2,ϵ_3 とすると次が成り立つ:

$$\int_A KdS = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \pi$$

ここで K は Gauss 曲率を表し dS は体積要素を表す.

dS は具体的には, 外微分形式などの知識が必要であるのでここでは説明しない. 感覚的に理解すればよいので大体 $\sqrt{EF - G^2}dudv$ と考えてもらえればよい. これの意味は,$\mathbb{P}_u$, $\mathbb{P}_v$ で作る無限小の平行四辺形の面積である. 上の定理は曲がり具合に沿って, この無限小の平行四辺形を領域内で集めていくと, 角度の和が出でくる.

*19 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と表すのが一番簡単である. しかし, この表示だと全体を一つの表示で表せない.

小さい四角形なので, 開き具合程度の量がでてくる.
例:(球面への Gauss-Bonnet の定理の適用)
半径 a の球面の Gauss 曲率は (3) から $K=\frac{1}{a^2}>0$ よっていつも 0 より大きい.

$$\int_A \frac{1}{a^2}dS=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\pi$$

となる.K は 0 より大きいので積分は 0 より大きい.*20 式を書き換えると

$$\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3=\pi+\int_A \frac{1}{a^2}dS$$

これは, 三角形の内角の和が 180 度より大きいことを意味している*21
以上から, 第 5 公準が成りたたないことがわかった.

5 まとめ

これまでにわかったことをまとめてみると次の図式のようになる:

$$\text{計量} \Rightarrow \text{Gauss 曲率} \Rightarrow \text{Gauss} - \text{Bonnet の定理} \Rightarrow \text{第 5 公準}$$

まず始めに無限小の長さ (計量) 定義した. そこから, 曲率を定義し, 球面に Gauss-Bonnet の定理を用いて三角形の内角の和が 180 度より大きいことを証明した. この結論から, 第 5 公準がなりたたないことを見た. ここからわかることは, 第 5 公準は曲面の曲がり具合に関係しているもので, 曲面の外から見ないとわからない. 他の公準は, 曲面の上での性質である. だから, 第 5 公準は他の公準から導かれないという事実の裏付けなっている. さらに, 曲率は計量にのみ依存していることが知られている（定理 3.3）結局, この無限小の長さが曲がり具合を決めることができる. つまり, 非ユークリッド幾何学の構成にあたり計量（長さ）が重要な役割を果たす.
この稿では球面に関しての第 5 公準がなりたたない証明を与え, 非ユークリッド幾何学のモデルを計量という概念を用いて身近なモデルで説明した. 他のモデル, 例えば円盤や Poincare 上半平面などの双曲幾何学の詳しい説明は参考文献を参照してもらいたい. 結果から言うと Gauss 曲率は常に負になることが知られている. このように, 計量を変えると曲率が変化し, 色々な幾何学のモデルができる. しかし, このようなモデルを統一的に扱う方法もある. 変換群による同伴ファイバー束という. これによれば, 計量も切断という概念で統一的に扱うことができる.

6 参考文献について

この稿の全体は **[1]** を中心にまとめた
[1] は定理の細かい証明も書いてある. この稿ではかけなかったことなども書いてある. 例えば,Gauss 曲率が第一次基本形式（計量）にしか依存しないなどの定理（定理 3.3）の証明も書いてあり, 微分形式を用いた Gauss 曲率の求め方（Elly-Cartan の方法）や Gauss-Bonnet の定理の証明など書いてある. この稿の内容に興味をもったら, 二変数の微積分の知識が必要や行列の簡単な知識が必要になるが, 一読を薦める. **[2]** は第 5 公準と

*20 積分の単調性
*21 π は 180 度と同じである.

微分幾何との関係などが書いてあり, 歴史的なつながりなども書いてあるので理論的ではなく概要が知りたいという人にお薦めの一冊.
[3] は予備知識として必要な微積分などをまとめた古典的名著である. この本はとても難しく簡単には理解できないであろうと思う. しかし, 長い年月読み継がれてきた日本の数学の原典で多くの微積分の本はこの本を基に書いている. 色々なことをキチンと理解したいなら手に取ること薦める.
[4] も上記の本と同じで古典的名著である. 行列や線形代数の内容はほとんどすべて書いてある.

参考文献

[1] 小林昭七 曲線と曲面の微分幾何 裳華房
[2] 小林昭七 ユークリッド幾何から現代幾何へ 日本評論社
[3] 高木貞治 解析概論 岩波書店
[4] 佐武一郎 線型代数学　裳華房