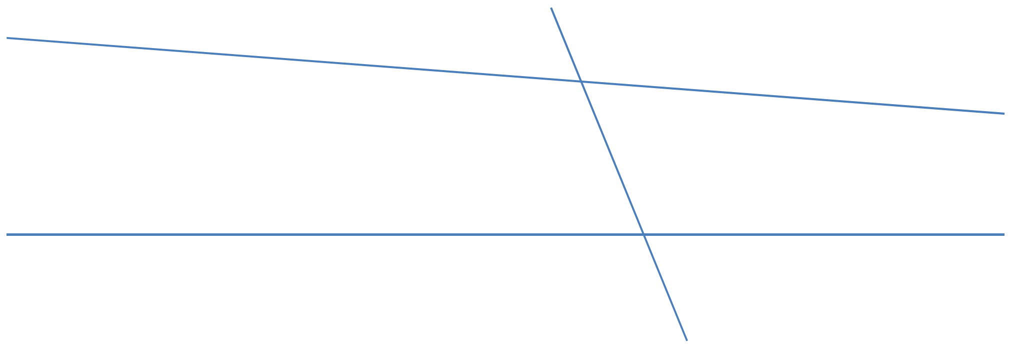
第2部
非ユークリッド幾何のモデルについて

第五公準

二直線と交わる一つの直線が同じ側に作る内角の和は二直角より小さいならば、二直線をその側に伸ばせばどこかで交わる。



第五公準と三角形の内角の和

三角形の内角の和は二直角に等しい。

⇕（同じ）

第五公準

（Saccheri）

三角形の内角の和が二直角にならないようなものができるのではないか。

問：直線とは何か？角度とは何か？

問:直線とは何か？角度とは何か？

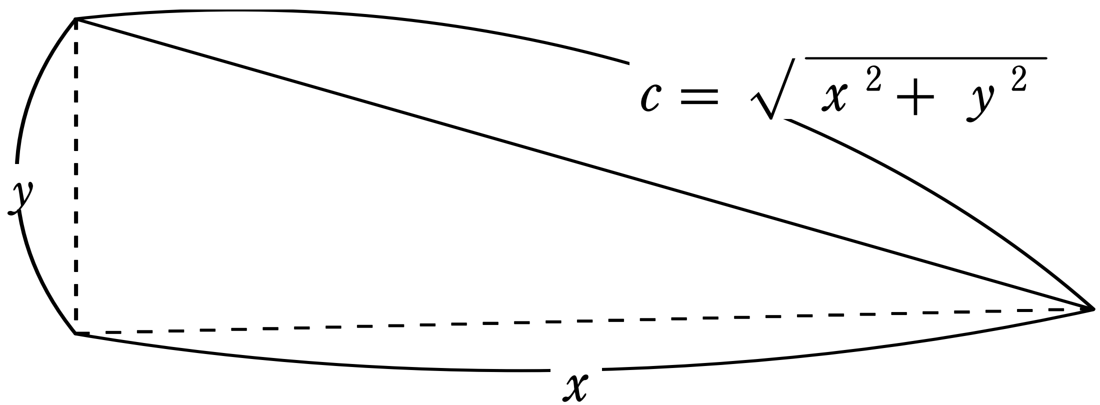
答え:

二点を結ぶ曲線の中で最も長さが短いものを**直線**という。

一点から出る二組の直線を**角度**という。

通常の距離について

ピュタゴラスの定理を用いれば、長さを求められる。



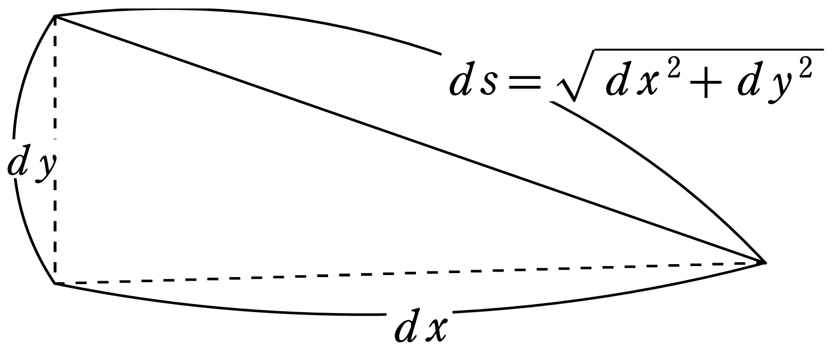
ユークリッド平面の計量

ピュタゴラスの定理を無限小で考えたもの

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

をEuclid計量と呼ぶ

イメージ:



計量とは

計量を使うことにより、長さが決まる。

キチンと言うと計量を積分することによって長さが決まるので、計量は普段の生活のものさしにあたるもの。

計量を変えると、直線が通常のまっすぐな線から変わることを意味している。

ポアンカレ上半平面

複素数平面の $z=x+iy(y>0)$ の部分

$$H=\{x+yi \mid x\text{実数},\ y>0\}$$

これをポアンカレ上半平面という。

$$dz=dx+idy,\quad d\overline{z}=dx-idy$$

$$ds^2=\frac{dz\cdot d\overline{z}}{y^2}=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

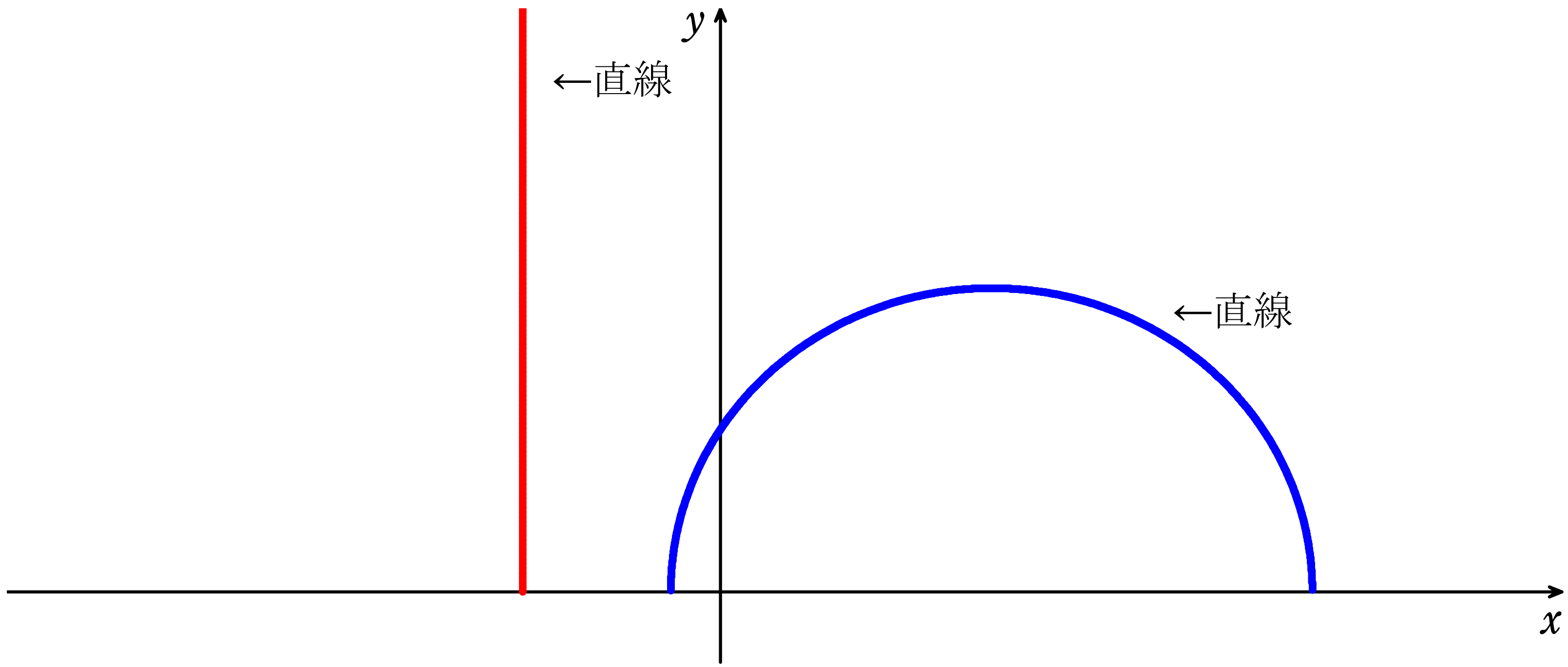
という計量をいれる。

ポアンカレ上半平面の直線

先ほどの計量を使うと直線は

１:x軸に中心をもつ半円

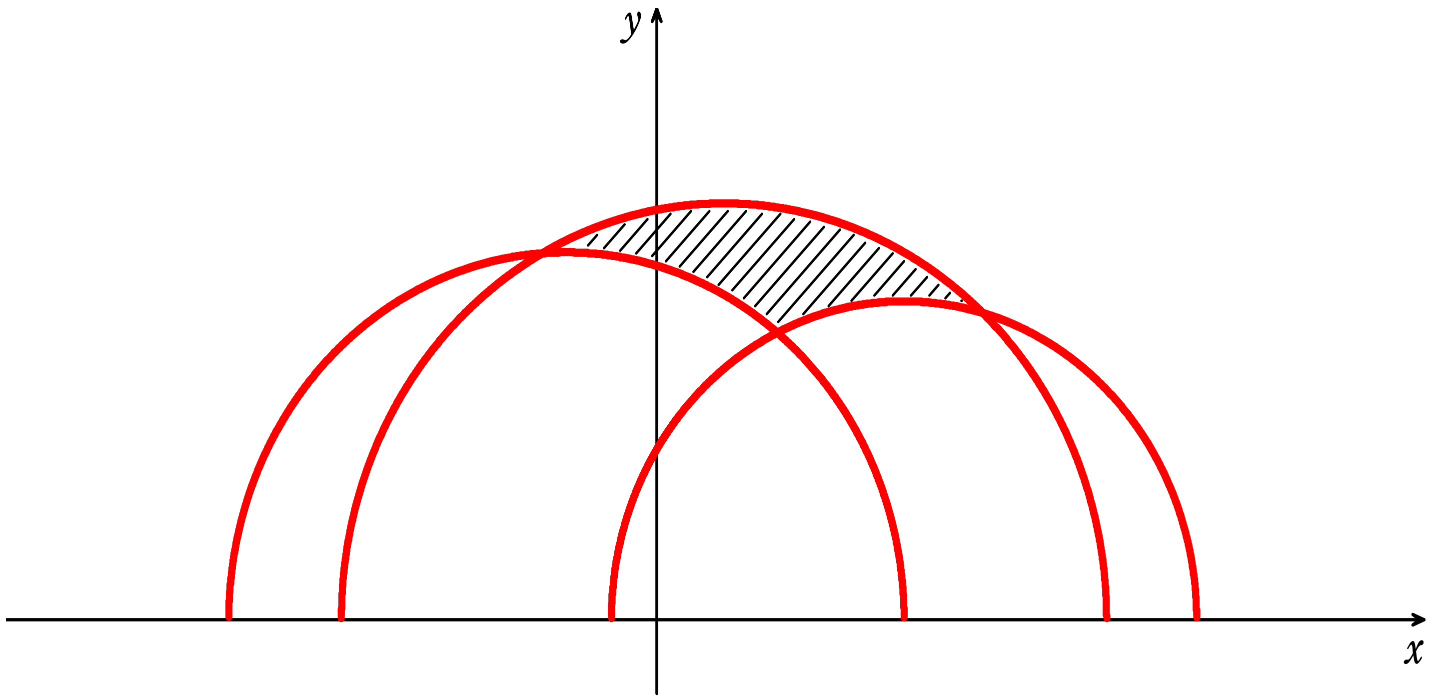
２:x軸に平行な直線



ポアンカレ上半平面上の三角形

三角形は下の斜線部

三角形の内角の和＜二直角



球面

半径1の球面は次のように表示する

$$x = \cos u \cos v,\ \ y = \cos u \sin v, z = \sin v$$

$$(0 \leqq u < 2\pi,\ 0 \leqq v < \pi)$$

実は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

（高校生は確認してみよう！）

参考:

半径を変えるとどこが変わるか、考えてみよう。

球面の計量

上記の表示式 $x = \cos u \cos v,\ y = \cos u \sin v, z = \sin v$

を使うと $(0 \leqq u < 2\pi,\ 0 \leqq v < \pi)$

$$ds^2 = du^2 + \cos u\, dv^2$$

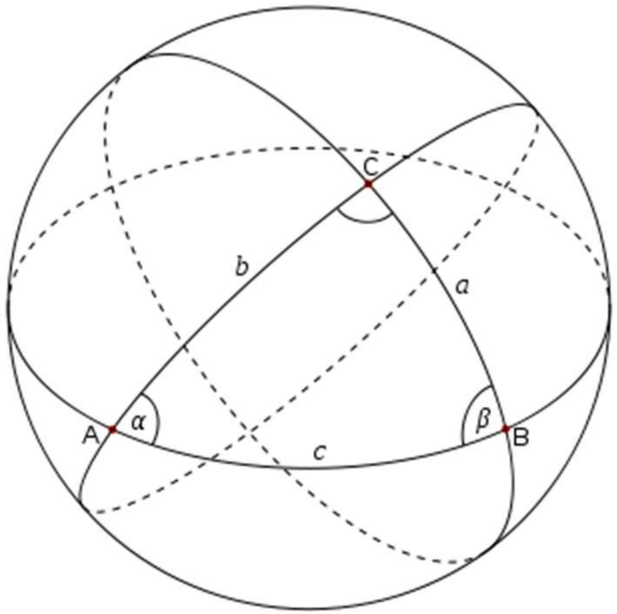
という計量がはいる。

参考：半径を変えるとどこが変わるか、考えてみよう。

球面の直線と三角形

下の図の円が直線になる。

三角形の内角の和＞二直角



２つのモデルの違い

三角形の内角の和

ポアンカレ上半平面＜二直角

球面＞二直角

この違いは計量にある！

Gauss・Bonnetの定理

計量と内角の和を結びつける定理

$$\int_{\text{三角形の内部}} K\, dS = \text{三角形の内角の和} - \pi$$

Kは曲率と呼ばれる量（曲がり具合）、dSは体積要素

この定理は第五公準が平面の曲がり具合に関係していることを表している。普通の平面では、曲率は0になることが知られおり、三角形の内角の和は二直角になる。

第五公準とGauss・Bonnetの定理

平面の曲がり具合→Gauss・Bonnetの定理

Gauss・Bonnetの定理→三角形の内角の和

三角形の内角の和→第五公準

という関係が導かれる。

第五公準は曲がり具合を表していることがわかり、第一公準から第四公準との違いはここにある。

円盤モデル

このモデルは、ポアンカレ上半平面と同じモデルを与える。

半径1の円の内部 $D=\{u+vi \mid u^2+v^2<1\}$

計量は

$$dw=du+idv, \quad d\overline{w}=du-idv$$

$$ds^2=4\frac{dw\cdot d\overline{w}}{\{1-(u^2+v^2)\}^2}=4\frac{du^2+dv^2}{\{1-|w|^2\}^2}$$

ここで $|w|^2=w\cdot\overline{w}$

上半平面と円盤モデルの対応

上半平面の $z=x+iy$ について $w=\frac{i-z}{z+i}$ を決めると w は円盤の中に入る。

この規則を使うと

$$dw=\frac{-2i\,dz}{(z+i)^2} \qquad d\overline{w}=\frac{2i\,d\overline{z}}{(\overline{z+i})^2}$$

$$\frac{1}{(1-|w|^2)^2}=\frac{|z+i|^4}{(4y)^2}$$

計量の対応

$$dw=\frac{-2idz}{(z+i)^2} \quad d\overline{w}=\frac{2id\overline{z}}{(\overline{z+i})^2} \qquad \frac{1}{(1-|w|^2)^2}=\frac{|z+i|^4}{(4y)^2}$$

を使って

$$ds^2=4\frac{dw\cdot d\overline{w}}{(1-|w|)^2}$$

を計算してみよう。次が成り立つ。

$$ds^2=\frac{dz\cdot d\overline{z}}{y^2}$$

まとめ

“長さ”とは、測り方で変わる。

測り方は一定ではない。これは、単位が変われば、数値が変わることと同じである。

今回は、“長さ”という視点から第五公準から導かれる、「三角形の内角の和は二直角である。」に焦点をあてて、Riemann幾何学の代表的なモデルを紹介した。

次回以降には、射影幾何学などのRiemann幾何学のような“長さ”を用いない非Euclid幾何学の例も紹介していく。

参考書

1: 曲線と曲面の微分幾何（裳華房）小林昭七

2: ユークリッド幾何から現代幾何へ（日本評論社）
小林昭七

１は二変数の微分積分の計算方法を知っていれば、何とか理解できる。内容としては、古典曲面論と呼ばれるものが書かれている。説明も丁寧で、現代数学との繋がりも書かれているので、理工系に進みたい人は一読をお薦めする。

２は歴史的背景や、Euclid幾何学の話も書いてある。1と同様で二変数の微分積分の計算方法を知っていれば、より深く学べると思う。