2013年度　数学科　リレー講座
～3日目 球面幾何学～

宮崎・兼子

2013年8月23日

注意：不用意にこのプリントの先をみることは, 今日の授業を
つまらないものにさせる可能性があります. 先生の指示に従って読み進めましょう.

目 次

序章

球面幾何学とは楕円幾何学の一種で, ”曲がった空間”[1]上での幾何学の性質を考える学問である. ”曲がった空間”は以下の 3 つがあり, 我々が今まで”まっすぐな空間”で考えていた図形 (図 1) は以下のように歪んでしまう.

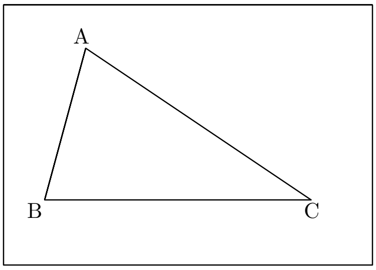


図 1: ”まっすぐ”な空間の三角形

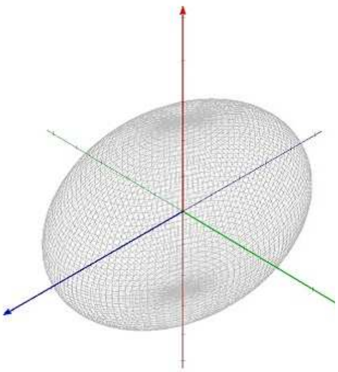


図 2: 楕円面上の三角形

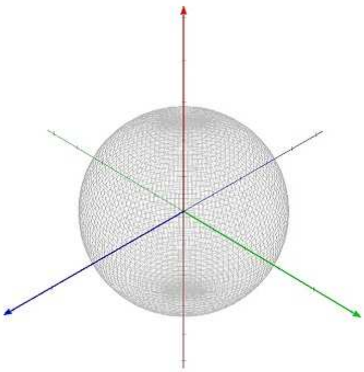


図 3: 球面上の三角形

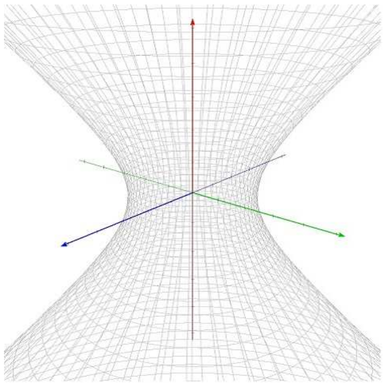


図 4: 双曲面上の三角形

今日は図 2 の球面におけるこの”曲がった空間”で, 今まで”まっすぐな空間”で学んできた直線や角, 平行線, 三角形の特徴をみていこう.

[1] ここでは, ユークリッド空間 (みなさんが学んでいる平面) を”まっすぐな空間”としている.

第 1 章　球面上の”直線”とは

球面上で考える前に, 平面上の直線について復習しておこう.

問 1. 平面における直線の特徴について説明せよ.

図 1.1: 世界地図上の二点の最短距離は？

球面を平面に移して最短距離である直線を引いても, 元の球面において最短距離になるとは限らない[1].

しかし, 球面上に”まっすぐな線”はかけないので, さきほど調べた平面における直線の**特徴**をもつものを球面上で探してみよう．すなわち, 球面上における ア $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$[2]を探してみよう！

その前に, まず言葉の定義や簡単な球面の特徴から確認していこう.

球の中心を O とする． この O を通るある直線 a と 1 点 C において直行する平面 α は C を中心とする円で球面と交わる． この円を一般に イ $\boxed{\qquad\qquad}$ といい, 直線 a と球面との交点 A, A* のうち, C に近い方をその円の ウ $\boxed{\qquad\qquad}$ という．平面 α が特に中心 O を通っているとき, α と球面との交わりを エ $\boxed{\qquad\qquad}$, A, A* を オ $\boxed{\qquad\qquad}$ という． 直径 AA* をこれら 2 つの円の カ $\boxed{\qquad\qquad}$ という.

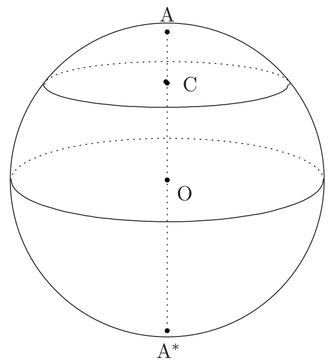


図 1.2: 大円と小円

また, 直径の両端になっている 2 点を キ $\boxed{\qquad\qquad}$ という．もし, 2 点 A, B が対心点でなければ, 3 点 A, B, O を通る平面はただ一つ存在するので, A, B を通る大円はただ 1 つに決まる.

さて, それでは, 球面上の直線を決めていこう.

[1]ある中心から任意の点までの直線が最短距離となる地図はある.
[2]最短距離らしきものはすぐにみつかるはず. それはどのような線の一部だろうか？

定理 1 球面上の 2 点間の最短距離

球面上の 2 点 (2 点は直径の両端にはないものとする) を両端とする球面上の曲線のうちで, この 2 点を両端とする大円の弧 (劣弧) がもっとも短い.

$\boxed{\text{証明}}$

一般に平面上の直線を曲面へ一般化したものを, ク $\boxed{}$ という. この測地線は次の式で定義される.

リーマン多様体上の微分可能な曲線 $x(\mu)$ が

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

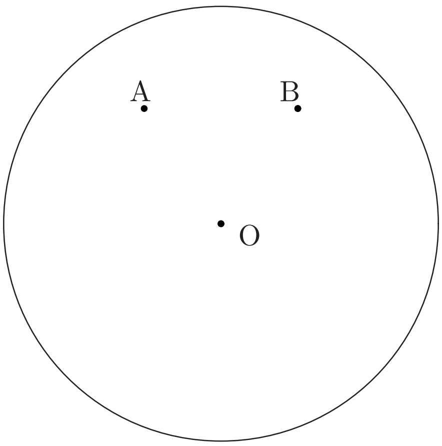
を満たすとき, $x(\mu)$ を測地線という.

この式では全然イメージがわかないだろう. 物理学では, 物体の運動や光の経路はすべて測地線をたどると考えられている. 従って物体の運動の軌跡が局所的にわかれば, その空間構造を解明することが可能だろう. だから一般相対性理論やブラックホールにおける理論で重要とされているのである.

ちなみに最短距離を表すものは測地線だが, その逆は必ずしもは成り立たない. とくにこの球面上では. 以下の例がある.

従って球面上の直線は”大円の劣弧” という条件がある.

問 2. 次の AB 間の最短距離を作図せよ.



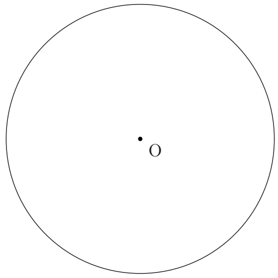
第 2 章　球面上の角と三角形

球面上の角と図形を次のように定義しておく.

定義 1 球面上の角

二つの大円が点 A で交わっているとする. このとき, 弧 AB と弧 AC が含まれる平面 α と β を考える. この二つの平面のなす角を球面上の大円のなす角とする.

また, 0° と 180° の間にある角のほうを点 A における ケ $\boxed{}$ という.

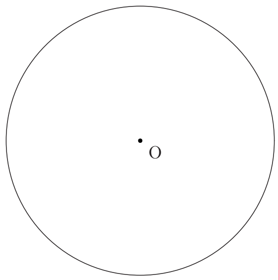


定義 2 球面上の二角形

異なる 2 つの大円の半円周によって囲まれた図形で, 小さいほうを コ $\boxed{}$ または月形という.

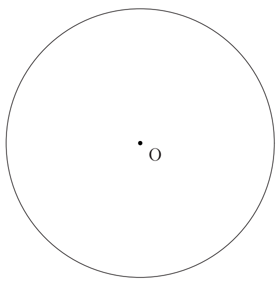
定理 2 球面上の二角形

球面二角形の 2 つの頂角は等しい.



定義 3 球面上の三角形

異なる 3 つの大円によって囲まれ, その交点を A, B, C とする. 劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ で囲まれた図形を サ $\boxed{}$ といい, 3 点 A, B, C をこの図形の シ $\boxed{}$, $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ をこの図形の ス $\boxed{}$ という.



次に球面三角形の面積を求める前に, 新しい角度の表し方を学んでおく.

定義 3 弧度法

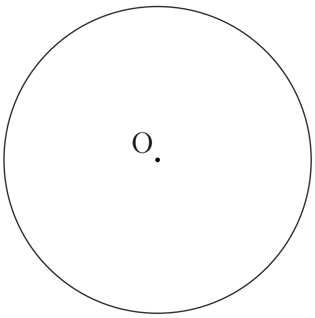
円の半径に等しい長さの弧の中心に対する角度を セ $\boxed{\qquad}$ と定義する. これで角度を表す方法を弧度法という.

任意の中心角 θ(シータと読む) を弧度法で表す場合, 円の半径を r, 扇形の弧の長さを L とすると, 定義より

$$\theta = \frac{L}{r}$$

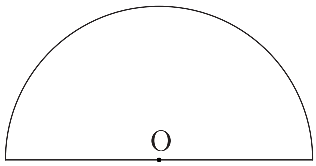
問 3. 次の円または扇形の中心角を弧度法で表せ.

(1) 中心角は 360°



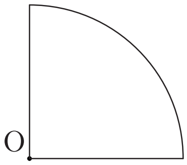
$360^\circ =$ ソ $\boxed{\qquad}$

(2) 中心角は 180°



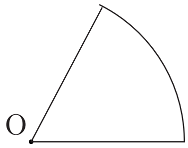
$180^\circ =$ タ $\boxed{\qquad}$

(3) 中心角は 90°



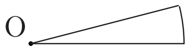
$$90^\circ = \boxed{\text{チ}\quad}$$

(4) 中心角は 60°



$$60^\circ = \boxed{\text{ツ}\quad}$$

(5) 中心角は 1°



$$1^\circ = \boxed{\text{テ}\quad}$$

(6) 一般化

(度数法) $\times$ $\boxed{\text{ト}\quad}$ $=$ (弧度法)

さて, これで準備はできたので球面上の三角形の面積をもとめてみよう. この三角形は二角形の面積の一部なので, 二角形の面積を利用して求めてみる.

定理 3 球面上の二角形の面積

頂角が α(アルファと読む) の球面上の二角形の面積は, ナ $\boxed{}$ となる.

証明

定理 4 球面上の三角形の面積

球面上の三角形の各頂点 A, B, C における頂角を α, β(ベータ), γ(ガンマ) とする．このとき, 三角形の面積 S は,

$$S = {}^{\text{ニ}}\boxed{}$$

$\boxed{\text{証明}}$

球面上の有限個の大円の劣弧で囲まれた図形を ヌ $\boxed{}$ と呼ぶ。その球面多角形が n 個の劣弧で囲まれているとき、 ネ $\boxed{}$ と呼ぶ。その P の内部または周上にある任意の 2 点 P, Q は直径の端点ではなく、その 2 点を端点とする劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ が P の内部または周上にあるとき、P は ノ $\boxed{}$ であると呼ばれる。球面三角形は常に球面凸三角形であるが, $n \leqq 4$ に対してはは必ずしも球面凸 n 角形ではない。

球面凸多角形に関しては, 平面幾何よりも面積を一般化しやすいので, 証明まではいかなくとも推測してその公式を求めてみよう.

定理 5 球面凸多角形の面積 (球面三角形の一般化)

球面凸 n 角形の面積は, 各頂角を α_1, α_2, α_3, $\cdots\cdots\alpha_n$ とすると, その面積 S は,

$$S = {}^{ハ}\boxed{}$$

問 4. 球面凸四角形, 球面凸五角形, $\cdots$ と推測していくことにより, 球面凸 n 角形の面積を推測せよ.

第 3 章　球面と平面幾何の諸性質

先ほどの球面三角形の面積の公式から, 球面では三角形は 3 つの内角の和できまることが分かった. 当然三角形の面積は正なので,

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} - \pi \quad > \quad 0$$

これらの角度はすべて弧度法で表していたことを考慮すると, $\pi =$ ヒ $\boxed{}$ となるので, 三角形の 3 つの内角の和は フ $\boxed{}$ より大きいことがわかる.

そうすると, 今まで平面で成り立っていたいくつかの定理に疑問がでてくるだろう.

問 5. 今まで学んだ平面幾何の知識の中で, 球面上では成り立たなくなる性質もしくは球面上でも成り立ちそうな性質を挙げてみよう.

成立しそうな性質	成立しない性質

成り立たないもの 1 相似な三角形
　球面上で相似な三角形は存在しない.

さきほどの球面三角形の面積の公式から, ”対応する 3 つの内角がそれぞれ等しい”三角形の面積は唯一なので, 相似な三角形が存在しない.

中学生はこれから先の話になるが, 相似な三角形が存在しないということは, 平面幾何での三角比の定義を球面上にそのまま応用することはできない. そのため, 球を巧みに切って平面に落としてから従来の三角比を適用させ各辺と角の関係を調べていくことになる. これが**球面三角法**である.

球面幾何学版の正弦定理・余弦定理は存在する. これらは高校数学の知識で十分証明可能なので, 三角比を学んだら証明してみよう.

球面版正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

(A, B, C は球面三角形 ABC の頂角, a, b, c は球の中心を O としたときの線分 OB と OC, OA と OC, OA と OB のなす角とする.)

球面版余弦定理

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

(A は球面三角形 ABC の頂角, a, b, c は球の中心を O としたときの線分 OB と OC, OA と OC, OA と OB のなす角とする.)

成り立たないもの 2 三角形の内角と外角の関係

球面三角形では「2 つの内角の和はそれと隣合わない一つの外角に等しい」が成り立たない.

問 6. 反例 (成り立たない例) を挙げよ.

成り立たないもの 3 平行線の性質
「任意の直線 l および l 上にはない任意の点 P について, P を通り l に交わらない (平行な) 直線 l' がただ一つ存在する」が成り立たない.

これは球面上の直線である大円を 2 つ書けば成り立たないことがすぐわかる.

実は先ほどの成り立たない 2 つの例もこの平行線の性質が成り立たないのが原因である.
平面幾何はユークリッドが作った 9 つの公理と 5 つの公準[1]から出発している. この 5 つの公準の中に, 第 5 公準と呼ばれているものが, いわゆる**平行線公準**である.

第 5 公準 平行線公準
1 つの線分が 2 つの直線に交わり、同じ側の内角の和が 2 直角より小さいならば、この 2 つの直線は限りなく延長されると、2 直角より小さい角のある側において交わる。

微妙に平行線に関する記述が異なっている. 実は我々が小学校や中学校で習っていた平行線の性質は, 学校平行線定理と呼ばれ**交わらない**ということを全面に主張していた. 平面幾何において学校平行線定理と第 5 公準は当然のごとく同値であるが, 実は球面幾何においては同値ではなくなってしまう[2].

この第 5 公準は文章が長く, あまり単純明快とは言えない.(誤解を招きやすい) ではもし球面上ではなく平面上で, 第 5 公準をつぎのように

2 つの直線は 1 点で交わる

としたらどのような理論が展開されていくだろうか？

問 7. 上の理論体系を考えてみよ.

[1]現在は公理も公準もさほど違いはないようだ. とにかく論理を始める最初の約束事と考えておけばよい.
[2]なぜなら, 2 直角より小さい角のある側, そうでない側にかかわらず, 球面上の直線は必ず**交わる**からである.

関連図書

[1] 見城尚志・佐野茂『ピタゴラスの定理でわかる相対性理論』初版（技術評論社，2011）

[2] 寺阪英孝『総合初等幾何学』初版 (共立出版, 1949)

[3] David W. Henderson (著), Daina Taimina (著), デビッド・W・ヘンダーソン (著), ダイナ・タミナ (著), 鈴木 治郎 (翻訳) 『体験する幾何学』（ピアソン桐原　2010）