2013年度
数学科リレー講座
４日目

〜非ユークリッド幾何学の例②〜
〜射影幾何学〜

2013.8.22

数学科　原 崇泰・平山 裕之

目 次

1 はじめに **2**

1.1 射影幾何学とは . . . 2

1.2 射影幾何学の歴史 . . . 2

2 射影幾何学の基本となる考え方 **6**

2.1 射影幾何学の公理 . . . 6

2.2 無限遠点・無限遠直線 . . . 7

2.3 射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . . . 9

2.4 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . . . 11

2.5 配景変換 . . . 13

2.6 射影変換 . . . 14

2.7 複比 . . . 15

3 基本となる定理を証明するための準備 **16**

3.1 メネラウスの定理 . . . 16

3.2 メネラウスの定理の逆 . . . 17

3.3 方べきの定理 . . . 18

4 基本となる定理 **20**

4.1 デザルグの定理 . . . 20

4.2 パスカルの定理 . . . 22

4.3 パップスの定理 . . . 26

5 問題の答え **29**

1　はじめに

1.1　射影幾何学とは

非ユークリッド幾何学の 1 つの例として射影幾何学があります。ユークリッド幾何学において, 平行線の距離は常に一定であります。しかし, 目に見える事実として, 真っ直ぐに延びている平行な鉄道線路の 2 本のレール間の距離は遠くに行けば行くほど次第に小さくなり, 平行な 2 直線は 1 点で交わるように見えます。こうした遠く 1 点で交わる点を含め, 点と直線と平面, 及びそれらの間の関係を基本要素とする幾何学を射影幾何学といいます。射影幾何学ではユークリッド幾何学の基本要素となる, 長さや角度や面積という概念を必要としません。

1.2　射影幾何学の歴史

絵画・建築などにおいて空間図形を平面上に描く必要は古くから生じていたので, 射影幾何の始まりもギリシア時代からの文献の中に見出すことができます。例えば, レオナルド・ダ・ヴィンチの作品「最後の晩餐」です。

この絵を見ると奥行きを出すために遠くを小さく描いていることが分かります。この絵は 1495 年から制作に取り掛かり,1498 年に完成されました。こうした絵画を描くための理論の多くは経験的なものに過ぎず, 理論としては確立がされなかったために, 射影幾何学の学問の成立としては 19 世紀を待たなければなりませんでした。理論として確立するために 300 年以上の歴史があったことが分かります。

デザルグ (Desargues,　1593〜1662)

射影幾何学の最初の基礎を築き上げたのはデザルグになります。レオナルド・ダ・ヴィンチの透視図法などから射影の概念を思いついたといわれています。彼はフランスのリヨンで生まれ, そこで亡くなりました。初めは建築技術者として出発し, 後に幾何学を研究してそれの建築・透視図への応用に専念をしました。彼が研究の成果を発表した著書 (1639 年) は説明が不十分なこと, あるいは用語が数学的でなかったことから当時はその価値が認められませんでした。また, 彼は研究をする一方で数学の普及活動にも取り組み, 夜間にパリで数学の無料講座を開講してきました。活発な講義活動が他の数学者へも大きな影響を与え, 次世代の幾何学へと繋がることとなります。

パスカル (Pascal,　1623〜1662)

デザルグの講義活動に影響を受けた 1 人がパスカルです。パスカルはフランスのクレルモンで生まれました。16 歳のときに「円錐曲線試論」を書いて, その中で後にパスカルの定理と呼ばれる「円錐曲線に内接する六辺形の交点は一直線上にある」ことを主張しました。定理の証明は書かれていないが, 彼は論文のあとのほうで,「自分の発見はデザルグの著述に負っている。デザルグは円錐曲線論の大家であって, 自分はできるだけデザルグの方法にならうことをつとめた」と述べています。このデザルグの方法というのが射影を意味しているものと思われます。また, 気圧の単位として彼の名前が使われています。

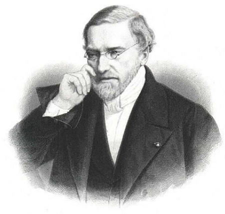
デカルト (Descartes,　1596〜1650)

デザルグの講義活動に影響を受けたもう 1 人がデカルトです。デカルトはフランスのラ・エーで生まれました。デザルグはデカルトと親交があり, デカルトはデザルグの能力を高く評価していたと言われています。しかし残念なことに, デカルトによって開拓された解析的な方法が, その後の解析学の著しい発達と相伴って幾何学における支配的な地位を占めたため, 図形を図形のまま研究をするいわゆる総合的な方法は一般に認められませんでした。従って, デザルグが基礎を築いた射影幾何の諸問題も半世紀以上にわたり放置をされていました。また, デカルトが提唱した「我思う, ゆえに我あり」は哲学史上最も有名な命題です。

モンジュ(Monge,　1746〜1818)

幾何学における総合的な方法を復活させたのはモンジュです。モンジュはフランスのブルゴーニュで生まれました。彼は陸軍工科学校に在学中, 築城問題を従来の計算による方法を用いずに, 自分の考えた幾何学的方法で短時間のうちに解き同校の練習教師に抜擢されました。やがてパリ大学の教授となり造兵技術に尽力し, またナポレオン政府の高官としてのちの理工科大学の教授, 運営者にもなりました。彼は立体を 2 つの直行平面に投影する方法（空間図形を平面で表す方法）を研究し, いわゆる画法幾何学を創設しました。この画法幾何学に用いられた方法が刺激となって, 射影幾何学の発展へと繋がりました。

ポンスレ (Poncelet,　1788〜1867)



モンジュが研究をした画法幾何学をさらに発展させたのがポンスレです。ポンスレはフランスのメスで生まれました。技術教育を受けた若い工兵士官としてナポレオン一世のロシア遠征に従軍し捕虜となりました。彼は 2 年間 (1813〜1814) にわたる収容所生活中に射影幾何学の理論研究に注力をし, 帰国後, その成果を著書「図形の射影的性質」(1822) として発表した。この書の中で彼は中心射影によって保存されるものという形で平面図形の射影的性質を明確に定義しました。ここに射影幾何学がユークリッド幾何学の中から 1 つの新しい分野としてその姿を現すことになりました。

2　射影幾何学の基本となる考え方

2.1　射影幾何学の公理

説明はできないが, 議論の出発点とする事柄を**公理**といいます。公理を基として普段教科書で見る定理が導き出されます。まず, ユークリッド幾何学についての公理です。

公理 1 2 点 A,B が与えられたら A,B を通る直線がただ 1 つ引ける。

公理 2 線分を両方向にいくらでも延長できる。

公理 3 点 A と数値 r を与えたら,A を中心とし, 半径 r の円が描ける。

公理 4 直角は全て等しい。

公理 5 直線 ℓ とその外の点 P に対して,P を通り,ℓ に平行な直線が 1 本だけ引ける。

そして, ユークリッド幾何学の公理 5 を採用せずに作り出されたものが非ユークリッド幾何学です。では射影幾何学の公理について見てみます。

公理 1 異なる 2 点 A,B を通る直線がただ 1 本存在する。

公理 2 相異なる 2 直線は 1 点で交わる。

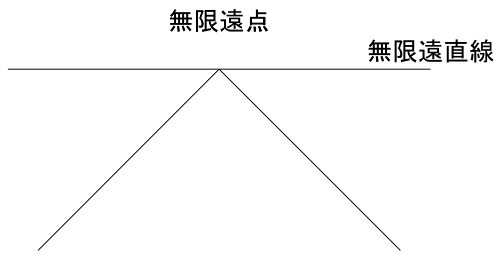
公理 3 同一直線上にない 3 点が存在する。

公理 4 すべての直線上には, 少なくとも 3 点が存在する。

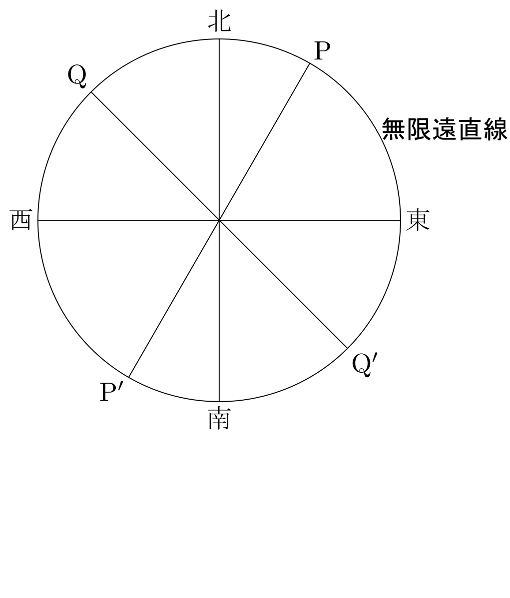
これらの公理を比較をしてみるとユークリッド幾何学の公理 5 と射影幾何学の公理 2 は相反することを言っていることが分かります。また, ユークリッド幾何学の公理 4 であった角度についての概念が射影幾何学ではなくなっていることが分かります。

2.2　無限遠点・無限遠直線

射影幾何学の公理 2 に着目をしてみよう。相異なる 2 直線は 1 点で交わるということから, この世界では平行線は存在しないことが分かります。では具体的に公理 2 とはどのようなものなのか考えてみます。私たちが世界を眺めるとき, はるか彼方に地平線が見えます。そしてその地平線に向かって真っ直ぐに延びていく線路を想像してみましょう。するとこの 2 本の線路は地平線の上で交わっているように見えます。こうして, 地平線上で交わっている平行線の交点を**無限遠点**と言います。そしてこの無限遠点の集まり, つまり地平線を**無限遠直線**といいます。



射影幾何学はいわば, この私たちの目に見える世界をそのままの形で幾何学の世界に移したものであります。注意として, 平行な 2 直線の無限の彼方には, 同じ無限遠点があると考えます。例えば真っ直ぐ延びる線路の上に立っていることをイメージすると, 上り側に見える無限遠点と下り側にある無限遠点が同じものとして考えるということです。



$\boxed{\text{問題}}$　この絵画はフェルメールの「音楽の稽古」という作品です。この作品の中で８本の平行線が重なる無限遠点を見つけなさい。

『音楽の稽古』（The Music Lesson）は、オランダ黄金時代の画家ヨハネス・フェルメールが 1662 年から 1665 年ごろに描いた絵画。キャンバスに油彩で描かれた作品で、イギリス王室の美術品コレクションであるロイヤル・コレクションが所有し、ロンドンのセント・ジェームズ宮殿に所蔵されている。
(Wikipedia より引用)

2.3　射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

ユークリッド平面上の直線に無限遠点を加えたものを**射影直線**といい, 一般的に $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と表します。
言葉で表すと非常に簡単に思えます。しかし, 今回は少し厳密に定義を紹介していきます。

> $\boxed{\text{定義}}$ （射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$）
> $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し
> $(x,y) \sim (x',y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ s.t.\ (x,y) = \lambda(x',y')$
> としたとき,$\sim$ は同値関係をなし, この同値関係による同値類すべての集合[a]を
> **射影直線**という。すなわち, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ である。(x,y) の
> 属する同値類を $[x,y]$ と表す。
>
> ベクトル $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の同値類には,
> 球面 $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}(X,Y)$ が
> 含まれていることが分かる。これより,S^1 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする関係を考えると,S^1 上の同値類のなす全ての集合を射影直線として捉えることもできる。
>
> [a]数学的には商集合といいます。

まず初めに同値関係という言葉についてです。(x,y) と (x',y')
(ただし $(0,0)$ を除く。) が同値関係[*1]をなすとは次の式を満たす実数 λ(ただし $\lambda \neq 0$ を除く。) が存在することです。

$$(x,y) = \lambda(x',y')$$

この式は (x,y) と (x',y') が原点を通る直線上の点であることを表します。
この関係を同値関係といい,$xy \neq 0$ のとき次のように表せます。

$$(x,y) \sim \left(1, \frac{y}{x}\right) \sim \left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

例えば, 次の同値関係が成り立ちます。

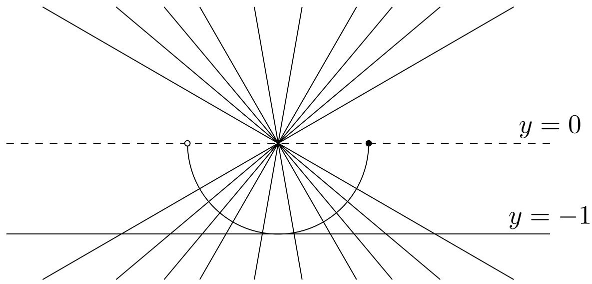
$$(12,24) \sim (6,12) \sim (3,6) \sim (1,2)$$

同値関係にある元の集まりを同値類と呼びます。そしてこの同値関係による同値類のなす全ての集合を射影直線といいます。
同値関係についてはいいでしょうか。

[*1] 同値関係はたくさんありますが, 今回はその中の 1 つになります。

次に S^1 上の同値類のなす全ての集合を射影直線として捉えることについて考えてみましょう。
ベクトル $(X,Y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ の同値類には, $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ として円 $S^1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}(X,Y)$ が含まれていることが分かります。これより,S^1 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする同値関係を考えると, この同値関係による S^1 上の同値類のなす全ての集合を射影直線として捉えることもできます。また, この円上の 2 点は単位円[*2]の直径の両端であって対蹠点 (たいせきてん) と呼ばれます。対蹠点を同一視すると射影直線は半円と捉えることもできます。

射影直線の可視化を表す図になります。



[*2] 半径が 1 の円のことをいいます。

2.4　射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

ユークリッド平面の世界に無限遠点・無限遠直線を付け加えた平面のことを**射影平面**といい, 一般的に $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と表します。
言葉で表すと非常に簡単に思えます。しかし, 今回は少し厳密に定義を紹介していきます。

$\boxed{\text{定義}}$ (射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)
$(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対し
$(x,y,z) \sim (x',y',z') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ s.t.\ (x,y,z) = \lambda(x',y',z')$
としたとき,$\sim$ は同値関係をなし, この同値関係による同値類すべての集合[a]を**射影平面**という。すなわち, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/\sim$ である。(x,y,z) の属する同値類を $[x,y,z]$ と表す。

ベクトル $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ の同値類には,
球面 $S^2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}(X,Y,Z)$ が含まれていることが分かる。これより,S^2 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする関係を考えると,S^2 上の同値類のなす全ての集合を射影平面として捉えることもできる。

[a]数学的には商集合といいます。

まず初めに同値関係という言葉についてです。(x,y,z) と (x',y',z') (ただし $(0,0,0)$ を除く。) が同値関係[*3]をなすとは次の式を満たす実数 λ(ただし $\lambda\neq 0$ を除く。) が存在することです。

$$(x,y,z) = \lambda(x',y',z')$$

この式は (x,y,z) と (x',y',z') が原点を通る直線上の点であることを表します。
この関係を同値関係といい,$xyz\neq 0$ のとき次のように表せます。

$$(x,y,z) \sim \left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \sim \left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right) \sim \left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)$$

例えば, 次の同値関係が成り立ちます。

$$(12,24,8)\sim(6,12,4)\sim(3,6,2)\sim\left(1,2,\frac{2}{3}\right)$$

同値関係にある元の集まりを同値類と呼びます。そしてこの同値関係による同値類のなす全ての集合を射影平面といいます。

[*3]同値関係はたくさんありますが, 今回はその中の 1 つになります。

同値関係についてはいいでしょうか。
次に S^2 上の同値類のなす全ての集合を射影平面として捉えることについて考えてみましょう。
ベクトル $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の同値類には, $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ として球面 $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}(X,Y,Z)$ が含まれていることが分かります。これより,S^2 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする同値関係を考えると, この同値関係による S^2 上の同値類のなす全ての集合を射影平面として捉えることもできます。また, この球面上の 2 点は単位円[*4]の直径の両端であって対蹠点 (たいせきてん) と呼ばれます。対蹠点を同一視すると射影平面は半球面の表面と捉えることもできます。

(射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 内での直線の表し方)
$\left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid ax+by+cz=0\right\}$, ただし,$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ とします。 このように射影平面内での直線を表すことができます。先ほど勉強した 射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ の次数を増やしたものと同じになります。

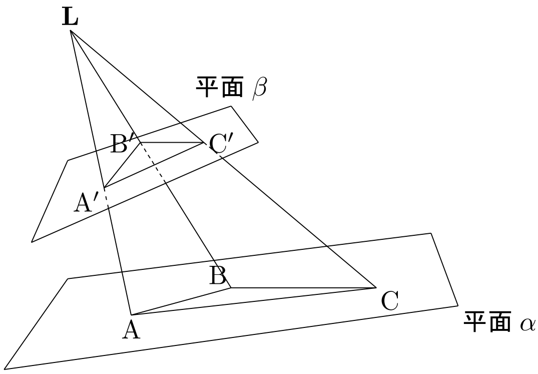
定義　無限遠直線 (地平線)
$G_\infty = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid z=0\right\}$ を無限遠直線 (地平線) といいます。

射影平面上において,$z=0$ としたときの同値類の集まりを**無限遠直線 (地平線)** といいます。
また, 射影幾何学の公理 2「相異なる 2 直線は 1 点で交わる」ことより, 無限遠直線と射影直線の交点は 1 点で交わり, その交点を**無限遠点**といいます。

[*4] 半径が 1 の円のことをいいます。

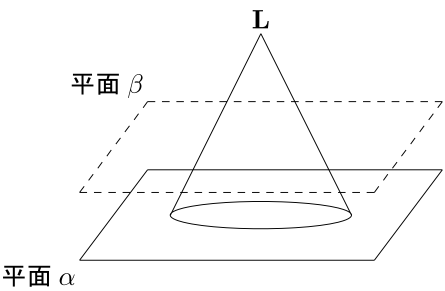
2.5　配景変換

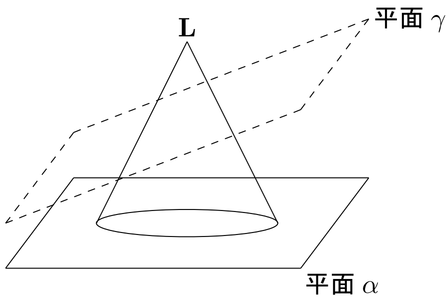
図のように 2 つの平面 α と β を取り, それらの面上にない点 L を取ります。平面 α 上の △ABC に対して点 L と △ABC の各頂点を結んだ直線と平面 β との交点をそれぞれ A$'$,B$'$,C$'$ とします。この対応により, 平面 α 上の図形は平面 β 上の図形に写され, 新たに △A’B’C’ を作ることができます。特に直線は直線に写されることが理解できると思います。L を光源と考え,L から光が出て平面 α と β に光が当たることで図形が作られるイメージができると思います。

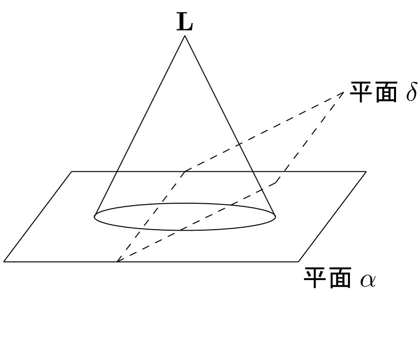


このように,1 つの点 L を中心として射影平面 α 上の点を射影平面 β 上の点に対応させる対応を**配景写像**といい,△ABC を △A$'$B$'$C$'$ に映す変換を**配景変換**といいます。

$\boxed{\text{問題}}$　平面 α に円があるとき, 平面 α の図形を平面 β と γ と δ にそれぞれ点 L を中心として配景変換を行うとどのような図形になるでしょうか。ただし, 平面 β は平面 α に平行な面であり, 平面 γ と δ は平面 α に平行ではない面とし,γ は円との交点がなく,δ は円との交点があるものとします。

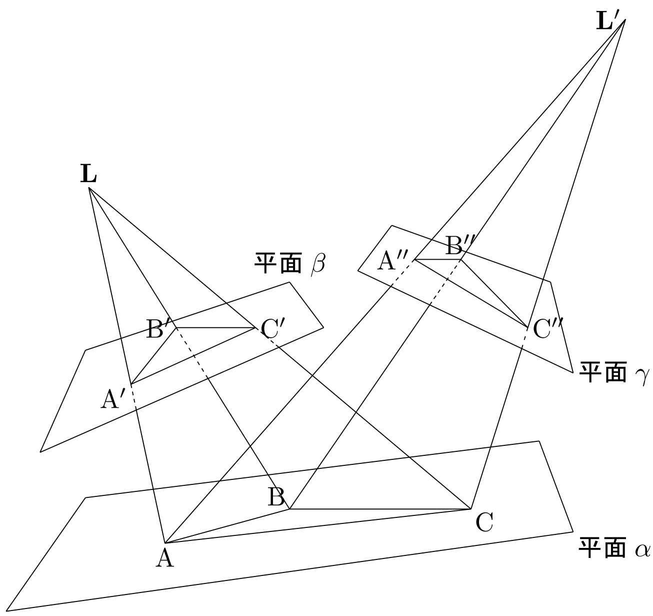






2.6 射影変換

先ほどと同じように,2 つの平面 α と β を取り, それらの平面上にある △ABC と △A′B′C′ を考えます。今回はさらにそれらの面上にない点 L′ を取ります。そして点 L′ と △ABC の間に点 L’ を通らない平面 γ を取り,L′ と △ A′B′C′ の各頂点を結んだ直線との交点をそれぞれ A″,B″,C″ とします。これにより平面 γ 上に △A″B″C″ を作ることができます。このように △A′B′C′ を △A″B″C″ に映す変換を射影変換といいます。



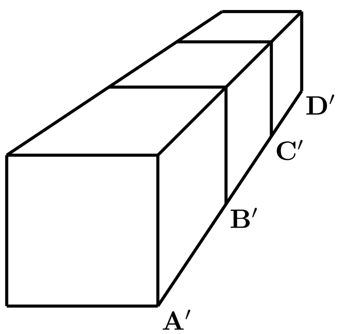
2.7　複比

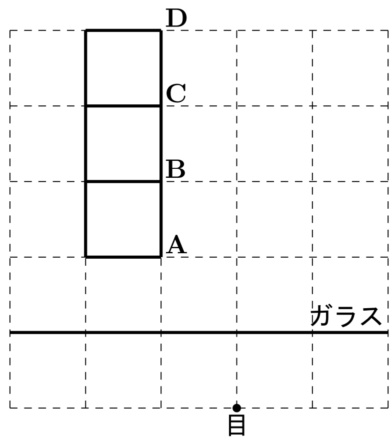
射影幾何学において重要な比の値を表すものとして**複比**があります。
立方体を並べたものの辺の比について考えて見ましょう。

$\boxed{\text{問題}}$　下の右図のように立方体を 3 個並べたところ, ガラスには左の図のように映りました。右の図の 1 マスは 1cm とします。点 A,B,C,D はガラス上にある点 A′,B′,C′,D′ に映るものとします。

(1) A′B′:B′C′:C′D′ を求めなさい。

(2) $\dfrac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}}$ と $\dfrac{\mathrm{A'C'}\times\mathrm{B'D'}}{\mathrm{A'D'}\times\mathrm{B'C'}}$ の値をそれぞれ求めなさい。





実物の同一直線上にある 4 点から計算される比の値は, ガラスに映った図の比の値と等しいことが分かります。
このとき用いられた $\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}}$ と $\frac{\mathrm{A'C'}\times\mathrm{B'D'}}{\mathrm{A'D'}\times\mathrm{B'C'}}$ の値のことを**複比**といいます。そして次の等式が成り立つとき**複比は等しい**といいます。

$$\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{A'C'}\times\mathrm{B'D'}}{\mathrm{A'D'}\times\mathrm{B'C'}}$$

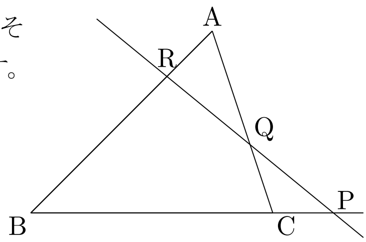
配景変換を行っても線分の比の値が変わらないことが分かりました。

3　基本となる定理を証明するための準備

射影幾何学の基本となる定理を学ぶ前に, これらの定理を証明するために用いるメネラウスの定理とメネラウスの定理の逆と方べきの定理を紹介します。この章で学ぶ定理は全て中学 2 年生で学びます*5。

3.1　メネラウスの定理

定理 3.1 (メネラウスの定理)　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB，またはその延長が，頂点を通らない 1 つの直線とそれぞれ P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立ちます。



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

証明

C を通り，PR と平行な直線が AB と交わる点を S とする。
平行線と線分の比の定理より

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{BR} : \mathrm{RS}$$
$$\mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = \mathrm{SR} : \mathrm{RA}$$

よって

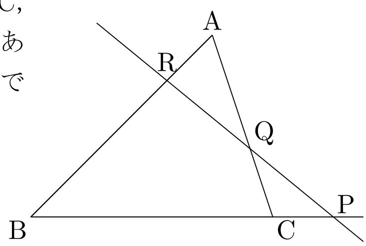
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RS}} \times \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

□

*5 中学 1 年生は予習も兼ねて, 中学 2 年生以上はもう一度きちんと確認をしましょう。

3.2　メネラウスの定理の逆

定理 3.2 (メネラウスの定理の逆)　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ P，Q，R があり，この 3 点のうち，1 個または 3 個が辺の延長上の点であるとする。このとき，



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

が成り立つならば，P，Q，R は一直線上にある。

$\boxed{\text{証明}}$ (同一法による)

直線 PQ と AB またはその延長との交点を R′ とする。
△ABC と直線 PQR′ において, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR'}}{\mathrm{R'B}} = 1$$

一方，仮定より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

よって

$$\frac{\mathrm{AR'}}{\mathrm{R'B}} = \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$$

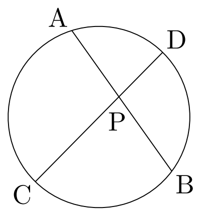
よって，R′ は R と一致する。
したがって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　□

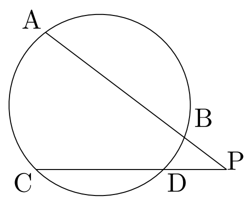
3.3　方べきの定理

円の 2 つの弦について, 次の定理が成り立ちます。

定理 3.3 (方べきの定理 (1)) 円の 2 つの弦 AB,CD, またはそれらの延長が点 P で交わるとき, 次の式が成り立ちます。

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$$

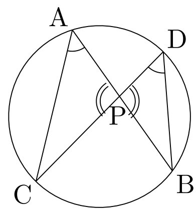




証明

点 A と C, 点 B と D を結ぶ。

(i) 弦 AB と CD が交わる場合 △PAC と △PDB において,



$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{DPB}$(対頂角)

$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{BDP}$($\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角)

故に二角相等により

$\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$

よって $\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB}$

故に $\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$ □

(ii) 弦 AB の延長と CD の延長が交わる場合 △PAC と △PDB において,

$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{DPB}$(共通)

四角形 ABCD は円に内接しているから

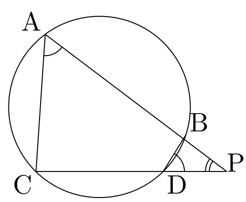
$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{BDP}$

故に二角相等により

$\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$

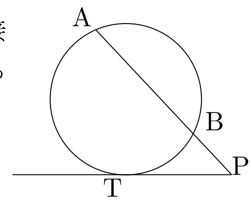
よって $\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB}$

故に $\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$ □



円の弦と接線について, 次の定理が成り立ちます。

定理 3.4 (方べきの定理 (2)) 円外の点 P から円に接線をひき, 接点を T とする。点 P を通る直線と円との交点を A,B とするならば, 次の式が成り立ちます。



$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$$

証明

点 T と A,T と B を結ぶ。

$\triangle$PAT と $\triangle$PTB において,

$\angle$APT = $\angle$TPB(共通)

PT は円の接線であるので接弦定理より

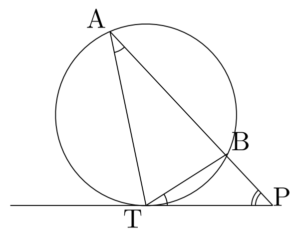
$\angle$PAT = $\angle$PTB

故に二角相等により

$\triangle$PAT $\backsim$ $\triangle$PTB

よって PT : PB = PA : PT

故に $\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$ □

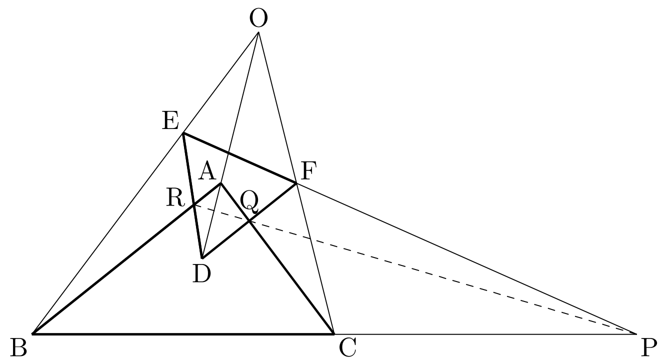


4　基本となる定理

4.1　デザルグの定理

メネラウスの定理とその逆を用いた例として，共線 (いくつかの点が同一直線上にあること) に関する定理の 1 つであるデザルグの定理を示します。このデザルグの定理は，19 世紀に当時の研究されていた様々な幾何学を統一する理論となった**射影幾何学**において基本となる定理です。
まず初めにユークリッド平面上においてです。

定理 4.1 (デザルグの定理)　2 つの三角形 △ABC と △DEF において，3 直線 AD，BE，CF が 1 点で交わるとき，直線 BC と直線 EF の交点を P，直線 CA と直線 FD の交点を Q，直線 AB と直線 DE の交点を R とすると，3 点 P，Q，R は一直線上にある。



証明

$\triangle$OBC と直線 PFE において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FO}} \times \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EB}} = 1 \quad \cdots ①$$

$\triangle$OAC と直線 DQF において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{FC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}} = 1 \quad \cdots ②$$

$\triangle$OAB と直線 DRE において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \times \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}} = 1 \quad \cdots ③$$

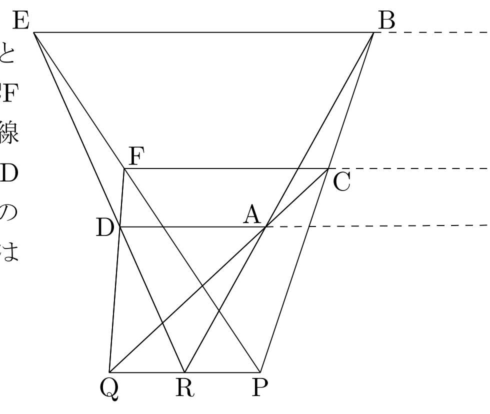
①，②，③の辺々をかけ合わせて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

メネラウスの定理の逆より，3 点 P，Q，R は一直線上にある。 □

次に, 射影平面上において, デザルグの定理の拡張として次の系が成り立ちます。

系 4.2 2 つの三角形 $\triangle$ABC と $\triangle$DEF において，3直線 AD，BE，CF が平行であるとき，直線 BC と直線 EF の交点を P，直線 CA と直線 FD の交点を Q，直線 AB と直線 DE の交点を R とすると，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

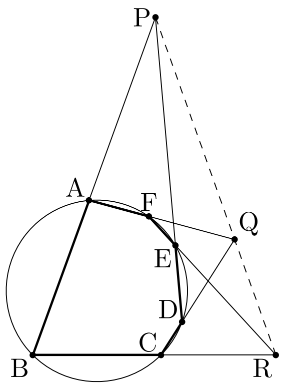


AD，BE，CF が平行であるというのを，AD，BE，CF が無限遠点で交わると考えると，デザルグの定理の一部として扱うことができます。

4.2　パスカルの定理

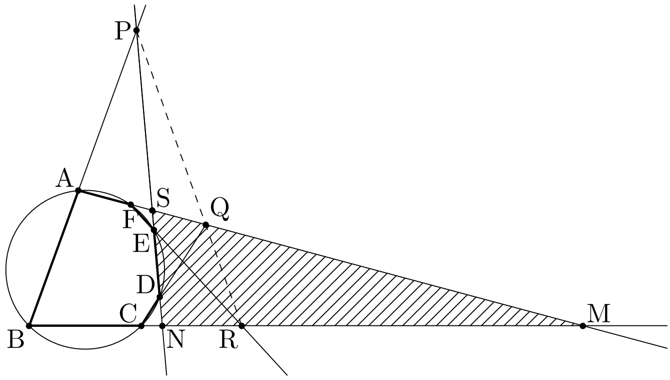
デザルグの愛弟子であるパスカルが 16 歳のときに著した円錐曲線試論の中に示されている定理について, まず初めにユークリッド平面上において 2 つのパスカルの定理を紹介します。

定理 4.3 (パスカルの定理 (1)) 円に内接する六角形 ABCDEF において，直線 AB と直線 DE の交点を P, 直線 CD と直線 FA の交点を Q, 直線 EF と直線 BC の交点を R とすると,3 点 P，Q，R は一直線上にある。（この直線をパスカル線といいます。）



証明

直線 BC と直線 DE の交点を N, 直線 BC と直線 AF の交点を M, 直線 AF と直線 DE の交点を S とする。



△SMN と直線 PAB において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}}\times\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BN}}\times\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}}=1 \quad \cdots ①$$

△SMN と直線 QDC において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}}\times\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CN}}\times\frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{DS}}=1 \quad \cdots ②$$

△SMN と直線 REF において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FM}}\times\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}\times\frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ES}}=1 \quad \cdots ③$$

①，②，③の辺々をかけ合わせて，

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}}\times\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BN}}\times\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}}\times\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}}\times\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CN}}\times\frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{DS}}\times\frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FM}}\times\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}\times\frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ES}}=1 \quad \cdots ④$$

また円と 3 点 S,M,N において, 方べきの定理より

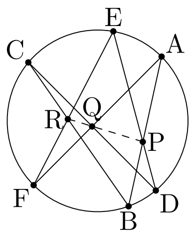
$$\mathrm{SA}\times\mathrm{SF}=\mathrm{SD}\times\mathrm{SE},\quad \mathrm{MA}\times\mathrm{MF}=\mathrm{MB}\times\mathrm{MC},\quad \mathrm{NE}\times\mathrm{ND}=\mathrm{NB}\times\mathrm{NC} \quad \cdots ⑤$$

⑤を④に代入すると,

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}}\times\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}}\times\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}}=1$$

よって, メネラウスの定理の逆より，3 点 P，Q，R は一直線上にある。 □

定理 4.4 (パスカルの定理 (2)) パスカルの定理 (1) において A〜F を並び方を変えることで, 円に内接する六辺形 ABCDEF においても同様に, 次のことを言うことができます。直線 AB と直線 DE の交点を P, 直線 CD と直線 FA の交点を Q, 直線 EF と直線 BC の交点を R とすると,3 点 P，Q，R は一直線上にある。



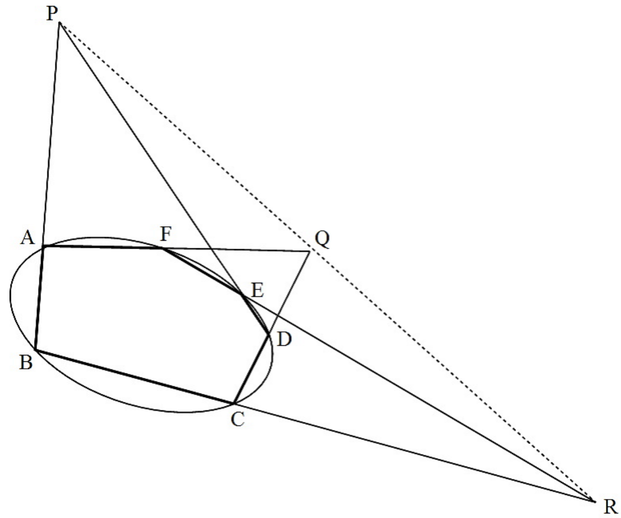
証明

パスカルの定理 (1) と同様に, 直線 BC と直線 DE の交点を N, 直線 BC と直線 AF の交点を M, 直線 AF と直線 DE の交点を S として, メネラウスの定理の逆を利用して証明することができます。 □

問題 (高校生向け) 実は, パスカルの定理は 2 つだけではありません。パスカルの定理は文字の並び順によって作られる図形が異なります。何種類の図形を描くことができるでしょうか。

次にパスカルの定理 (1) において, 射影幾何学の配景変換を用いたパスカルの定理を紹介します。

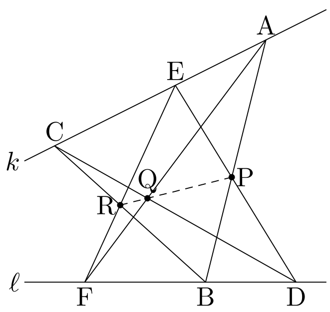
系 4.5 (パスカルの定理) 楕円に内接する六角形 ABCDEF において,
直線 AB と直線 DE の交点を P, 直線 CD と直線 FA の交点を Q, 直線 EF と直線 BC の交点を R とすると,3 点 P，Q，R は一直線上にある。



4.3 パップスの定理

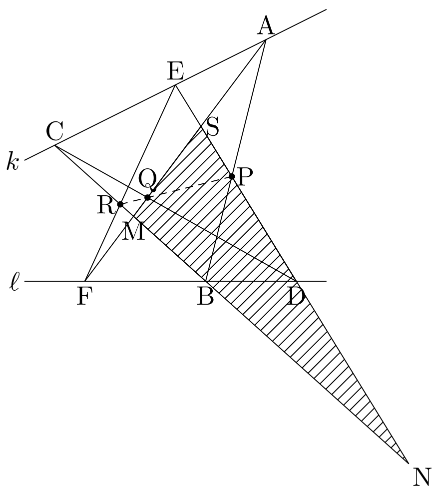
パスカルの定理 (2) において, 配景変換を用いた楕円における特別な場合がパップスの定理となります。[*6]

定理 4.6 (パップスの定理) 直線 k 上に 3 点 A,E,C, 直線 ℓ 上に 3 点 D,B,F が与えられているとき, 直線 AB と直線 DE の交点を P, 直線 CD と直線 FA の交点を Q, 直線 EF と直線 BC の交点を R とすると,3 点 P，Q，R は一直線上にある。



証明

直線 BC と直線 DE の交点を N, 直線 BC と直線 AF の交点を M, 直線 AF と直線 DE の交点を S とする。



[*6] どのように特別かは代数幾何学の分野となります。

△SMN と直線 APB において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}} \times \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BN}} \times \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}} = 1 \quad \cdots ①$$

△SMN と直線 CQD において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}} \times \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CN}} \times \frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{DS}} = 1 \quad \cdots ②$$

△SMN と直線 ERF において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FM}} \times \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}} \times \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ES}} = 1 \quad \cdots ③$$

①，②，③の辺々をかけ合わせて，

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}} \times \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BN}} \times \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}} \times \frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}} \times \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CN}} \times \frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{DS}} \times \frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FM}} \times \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}} \times \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ES}} = 1 \quad \cdots ④$$

また △SMN と直線 k,ℓ において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AM}} \times \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CN}} \times \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{ES}} = 1 \quad \cdots ⑤$$

$$\frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FM}} \times \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BN}} \times \frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{DS}} = 1 \quad \cdots ⑥$$

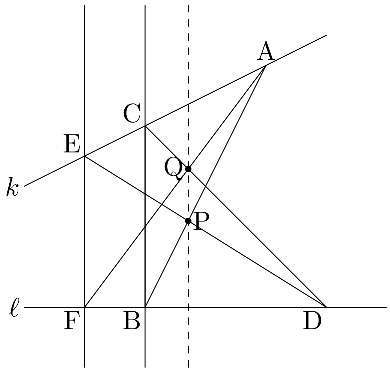
⑤と⑥を④に代入すると，

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PS}} \times \frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{QM}} \times \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RN}} = 1$$

よって, メネラウスの定理の逆より，3 点 P，Q，R は一直線上にある。 □

実は, 点の取り方によっては, パップスの定理はユークリッド平面上で成り立たないときがあります。しかし射影平面で考えることにより, パップスの定理の拡張として次の系が成り立ちます。

系 4.7 (パップスの定理) 直線 k 上に 3 点 A,E,C, 直線 ℓ 上に 3 点 D,B,F が与えられているとき, 直線 AB と直線 DE の交点を P, 直線 CD と直線 FA の交点を Q, 直線 EF と直線 BC の交点を無限遠点 R_∞ とする。そのとき 3 点 P，Q，R_∞ は一直線上にある。

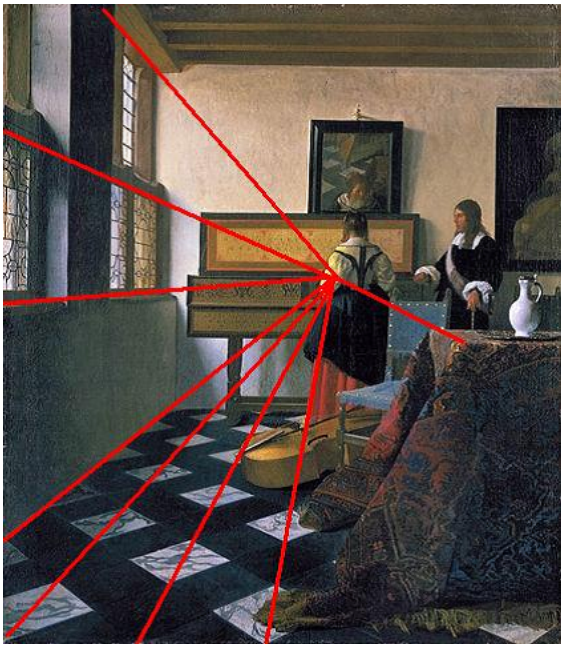


ユークリッド平面上では,EF//CB とすると EF//CB//PQ が成り立つことが確認できます。
すると EF，CB，PQ が平行であるというのを，EF，CB，PQ が無限遠点 R_∞ で交わると考えると，パップスの定理の一部として扱うことができます。

$\boxed{\text{問題}}$ 2 本の直線 k と ℓ において,k 上に 3 点 A,E,C, 直線 ℓ 上に 3 点 D,B,F を自分で取ってパップスの定理が成り立つことを確認しなさい。

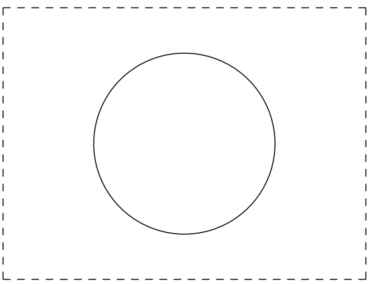
5　問題の答え

P.8 の答え

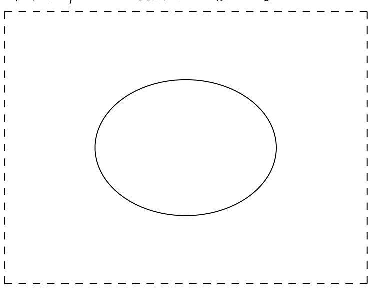


P.13 の答え

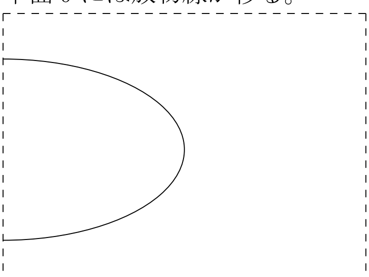
平面 β には円が移る。



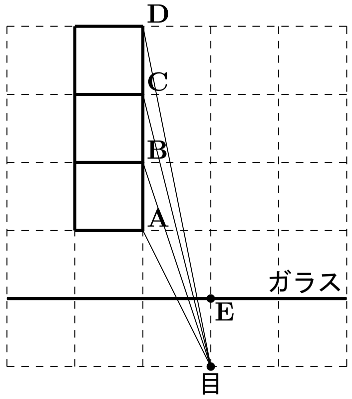
平面 γ には楕円が移る。



平面 δ には放物線が移る。



P.15 の答え



目と A,B,C,D をそれぞれ結びガラスとの交点を A′,B′,C′,D′ とする。図のようにガラス上に E を取る。

(1) $\mathrm{A'B'} = \mathrm{A'E} - \mathrm{B'E} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

$\mathrm{B'C'} = \mathrm{B'E} - \mathrm{C'E} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

$\mathrm{C'D'} = \mathrm{C'E} - \mathrm{D'E} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{20}$

よって，　$\mathrm{A'B'}:\mathrm{B'C'}:\mathrm{C'D'} = \dfrac{1}{6} : \dfrac{1}{12} : \dfrac{1}{20} = 10 : 5 : 3$

(2) AC=2cm，BD=2cm，AD=3cm，BC=1cm より

$$\frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BD}}{\mathrm{AD} \times \mathrm{BC}} = \frac{2 \times 2}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

$\mathrm{A'C'} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\mathrm{cm}$，$\mathrm{B'D'} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}\mathrm{cm}$，

$\mathrm{A'D'} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10}\mathrm{cm}$，$\mathrm{B'C'} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}\mathrm{cm}$ より

$$\frac{\mathrm{A'C'} \times \mathrm{B'D'}}{\mathrm{A'D'} \times \mathrm{B'C'}} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{15}}{\dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{12}} = \frac{4}{3}$$

P.24 の答え

数珠順列を考える。6 個の点の取り方は $(6-1)! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

図形を裏返すと重なるものができるので $120 \times \dfrac{1}{2} = 60$

よって，60 種類の図形ができる。

参考文献

[1] 中沢貞治著 (1967):いろいろな幾何 (共立出版)

[2] 難波誠著 (2008):平面図形の幾何学 (現代数学社)

[3] 丹羽敏雄著 (2001):射影幾何学入門 (実教出版)

[4] 瀬山士郎著 (2007):幾何物語 (ちくま学芸文庫)

[5] 大和澄夫著 (2010):複素数とその canvas〜複素数で描く世界〜

[6] 春木淳著 (2013):数学 B テキスト

[7] 岡部恒治著 (1996):マンガ幾何入門　頭脳が楽しく鍛えられる (講談社)

[8] 木之本藤隆著 (2012):中学への算数　2012 年 10 月号 (東京出版)

1 章の射影幾何学の歴史については,[1] と [7] を特に参考にして書きました。テキストの中の数学者, レオナルド・ダ・ヴィンチの「最後の晩餐」, フェルメールの「音楽の稽古」の画像は Wikipedia(http://ja.wikipedia.org/wiki/) からのものとなります。

数学科リレー講座
4日目
非ユークリッド幾何の例②
～射影幾何学～

2013年8月22日(木)
数学科 原崇泰・平山裕之

レオナルド･ダ･ヴィンチ　最後の晩餐

デザルグ
1593～1662

パスカル
1623～1662

デカルト
1596～1650

モンジュ
1746～1818

ポンスレ
1788～1867

射影幾何学の公理

ユークリッド幾何

公理 1 2 点 A,B が与えられたら A,B を通る直線がただ 1 つ引ける。

公理 2 線分を両方向にいくらでも延長できる。

公理 3 点 A と数値 r を与えたら,A を中心とし, 半径 r の円が描ける。

公理 4 直角は全て等しい。

公理 5 直線 ℓ とその外の点 P に対して,P を通り,ℓ に平行な直線が 1 本だけ引ける。

射影幾何

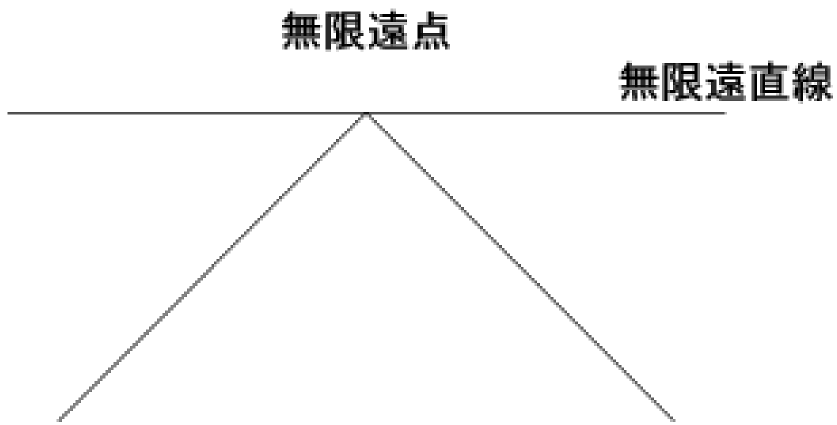
公理 1 異なる 2 点 A,B を通る直線がただ 1 本存在する。

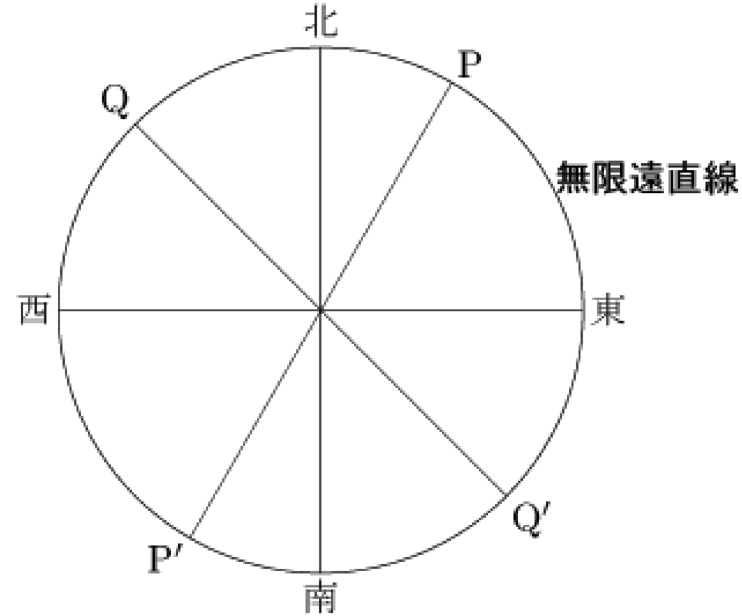
公理 2 相異なる 2 直線は 1 点で交わる。

公理 3 同一直線上にない 3 点が存在する。

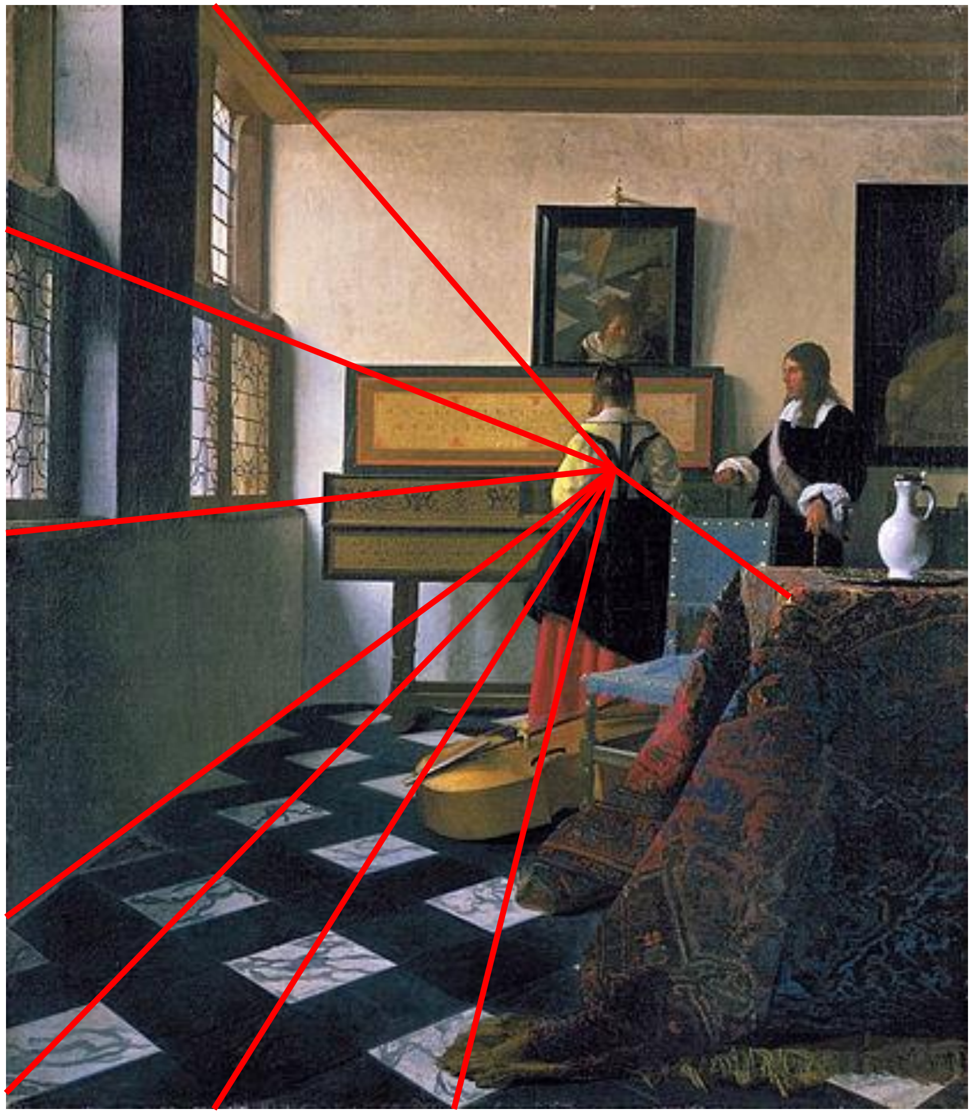
公理 4 すべての直線上には, 少なくとも 3 点が存在する。

無限遠点・無限遠直線





フェルメール　音楽の稽古
透視図法



射影直線

$\boxed{\text{定義}}$ (射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$)

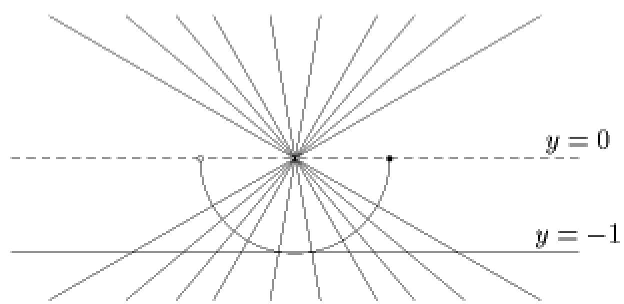
$(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し

$$(x,y) \sim (x',y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ s.t.\ (x,y) = \lambda (x',y')$$

としたとき,$\sim$ は同値関係をなし, この同値関係による同値類すべての集合[a]を**射影直線**という。すなわち, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ である。(x,y) の属する同値類を $[x,y]$ と表す。

ベクトル $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の同値類には,
球面 $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}(X,Y)$ が含まれていることが分かる。これより,S^1 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする関係を考えると,S^1 上の同値類のなす全ての集合を射影直線として捉えることもできる。

[a]数学的には商集合といいます。



射影平面

$\boxed{\text{定義}}$ (射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)

$(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対し

$(x,y,z) \sim (x',y',z') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ s.t.\ (x,y,z) = \lambda(x',y',z')$

としたとき,$\sim$ は同値関係をなし, この同値関係による同値類すべての集合[a]を**射影平面**という。すなわち, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ である。(x,y,z) の属する同値類を $[x,y,z]$ と表す。

ベクトル $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の同値類には,

球面 $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 上の 2 点, すなわち $\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}(X,Y,Z)$ が含まれていることが分かる。これより,S^2 に中心に関して点対称な 2 点を同値であるとする関係を考えると,S^2 上の同値類のなす全ての集合を射影平面として捉えることもできる。

[a]数学的には商集合といいます。

射影平面の直線

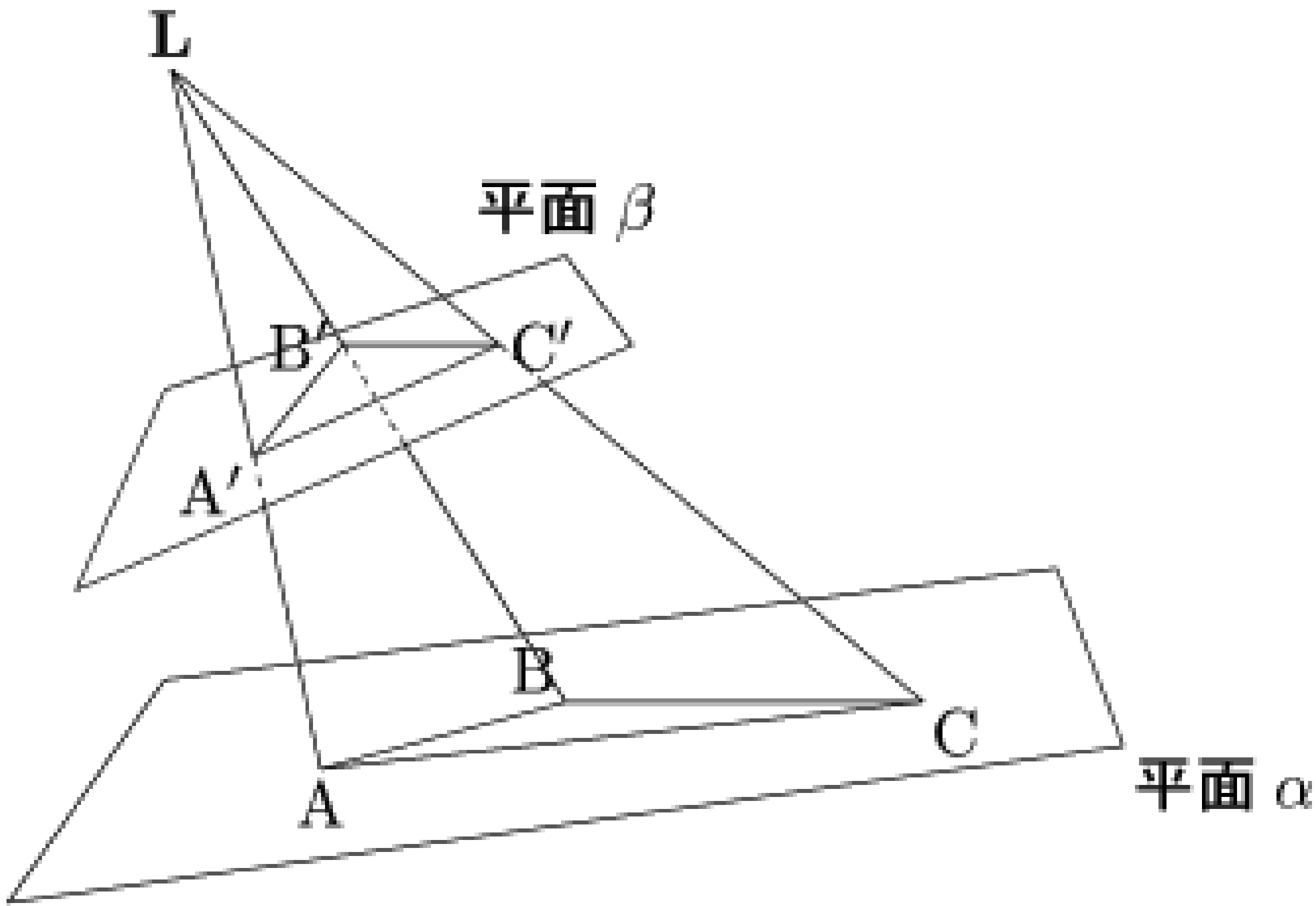
(射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 内での直線の表し方)

$\left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid ax+by+cz=0\right\}$, ただし,$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ とします。

定義　無限遠直線 (地平線)

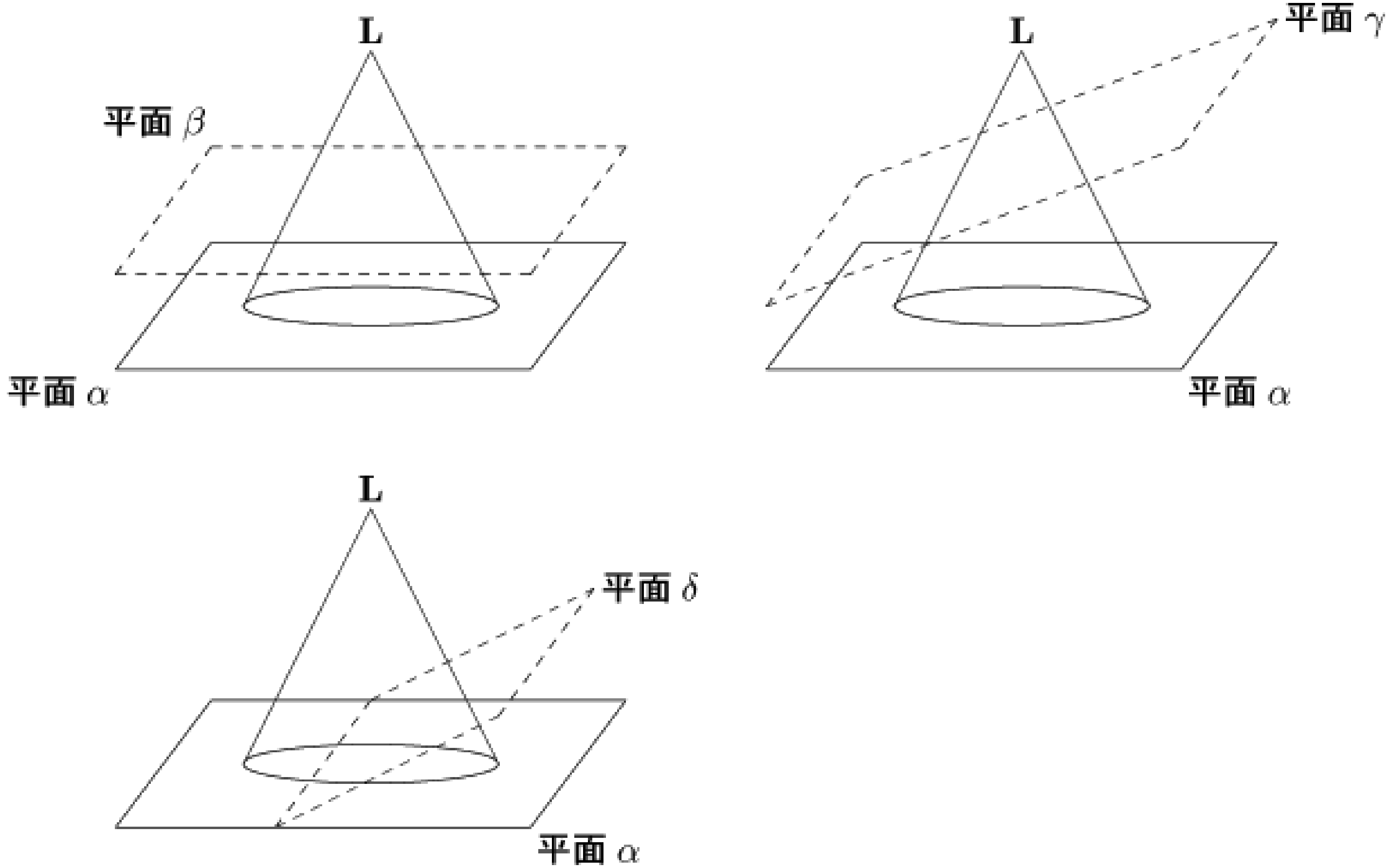
$G_\infty = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid z=0\right\}$ を無限遠直線 (地平線) といいます。

配景変換

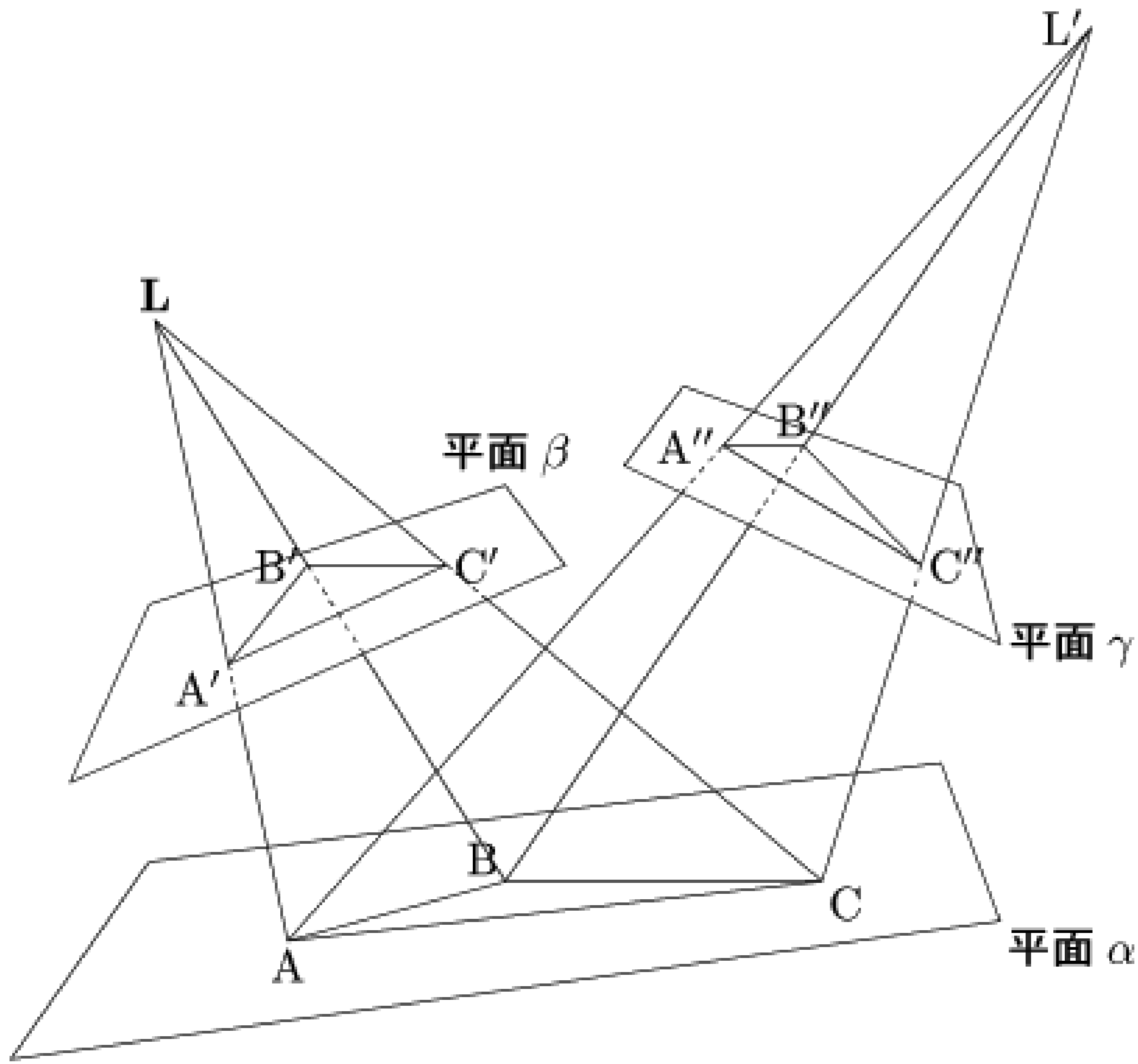


配景変換　問題

$\boxed{\text{問題}}$　平面 α に円があるとき, 平面 α の図形を平面 β と γ と δ にそれぞれ点 L を中心として配景変換を行うとどのような図形になるでしょうか。ただし, 平面 β は平面 α に平行な面であり, 平面 γ と δ は平面 α に平行ではない面とし,γ は円との交点がなく,δ は円との交点があるものとします。



射影変換

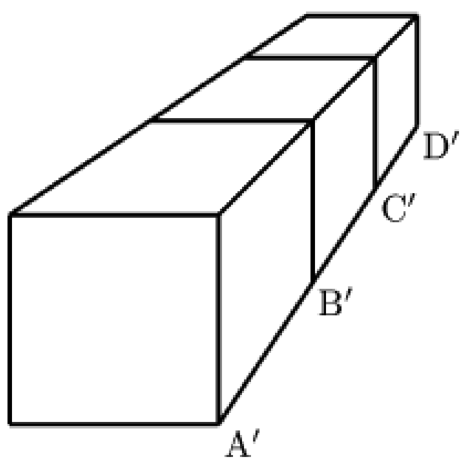


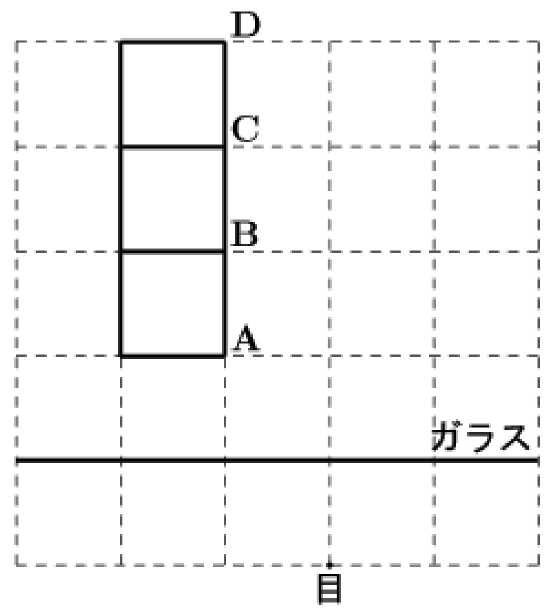
複比　問題

問題　下の右図のように立方体を 3 個並べたところ, ガラスには左の図のように映りました。右の図の 1 マスは 1cm とします。点 A,B,C,D はガラス上にある点 A', B', C', D' に映るものとします。

(1) $A'B' : B'C' : C'D'$ を求めなさい。

(2) $\dfrac{AC \times BD}{AD \times BC}$ と $\dfrac{A'C' \times B'D'}{A'D' \times B'C'}$ の値をそれぞれ求めなさい。

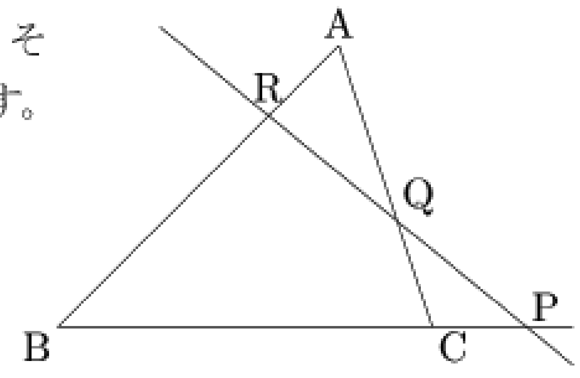




メネラウスの定理

定理 3.1 (メネラウスの定理)　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB，またはその延長が，頂点を通らない 1 つの直線とそれぞれ P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立ちます。

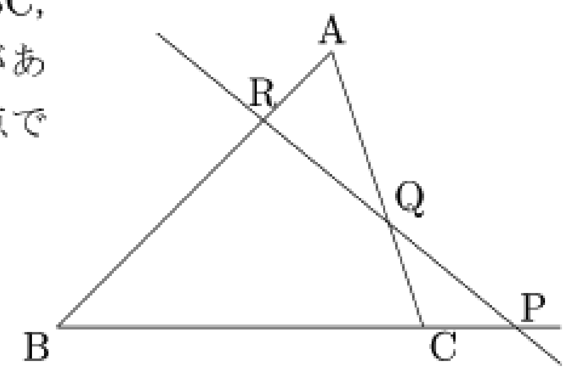
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$



定理 3.2 (メネラウスの定理の逆)　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ P，Q，R があり，この 3 点のうち，1 個または 3 個が辺の延長上の点であるとする。このとき，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

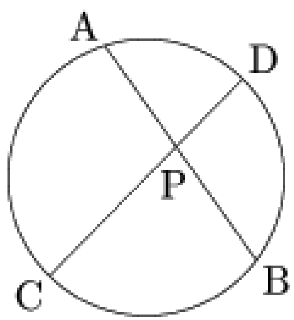
が成り立つならば，P，Q，R は一直線上にある。

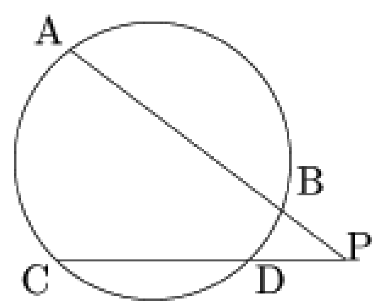


方べきの定理

定理 3.3 (方べきの定理 (1)) 円の 2 つの弦 AB,CD, またはそれらの延長が点 P で交わるとき, 次の式が成り立ちます。

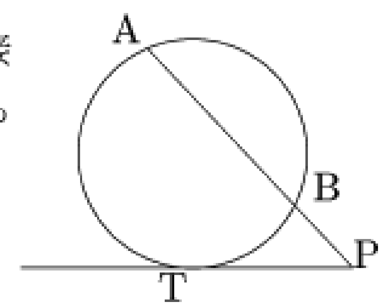
$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$$





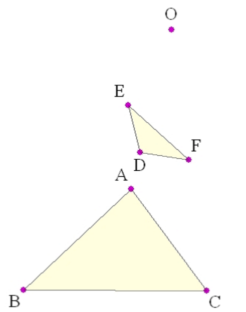
定理 3.4 (方べきの定理 (2)) 円外の点 P から円に接線をひき, 接点を T とする。点 P を通る直線と円との交点を A,B とするならば, 次の式が成り立ちます。

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$$

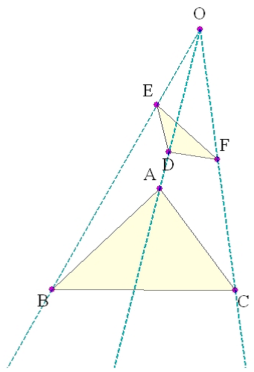


グレープスを用いた定理の紹介

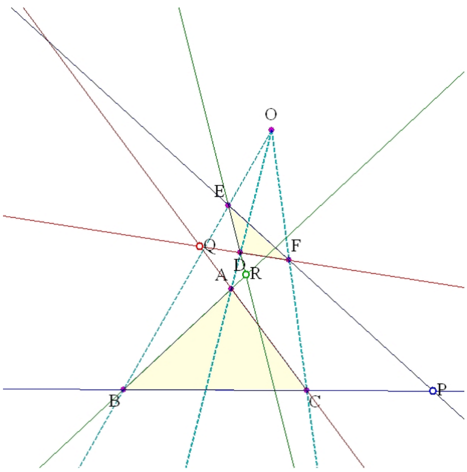
1　デザルグの定理



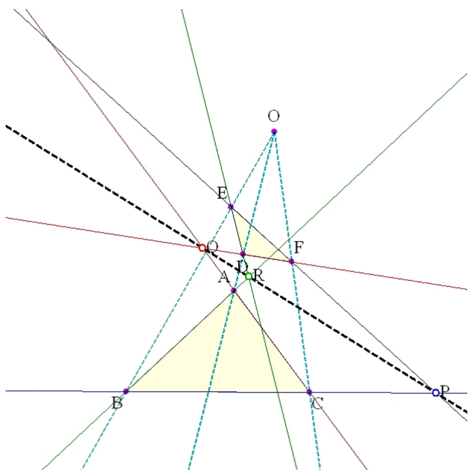
(1)△ABC と △DEF において



(2) 直線 AD,BE,CF が 1 点 O で交わっているとき。

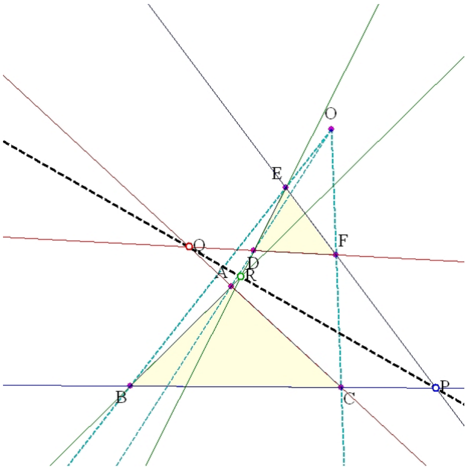


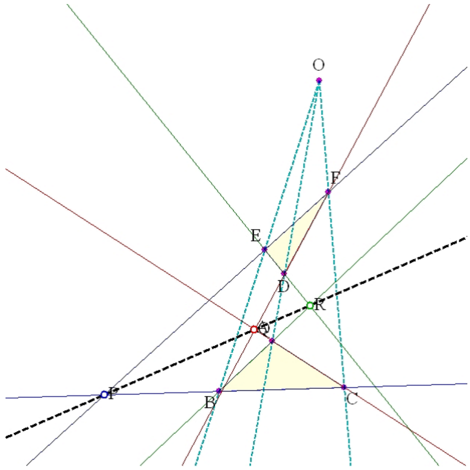
(3) 直線 BC と EF，直線 CA と FD，直線 AB と DE の交点をそれぞれ P，Q，R とおく。

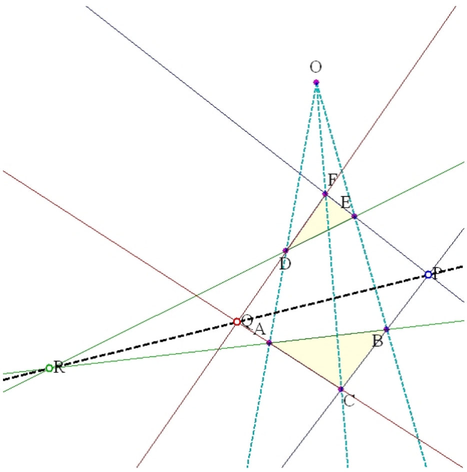


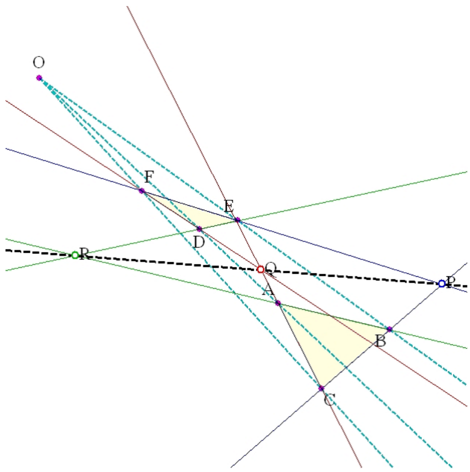
(4)3 点 P，Q，R は一直線上にある。

点の取り方を変えても条件を満たしていればデザルグの定理が成り立つことを確認できます。

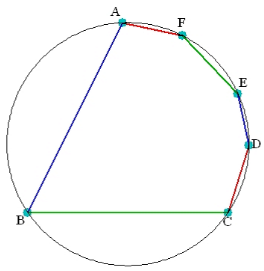




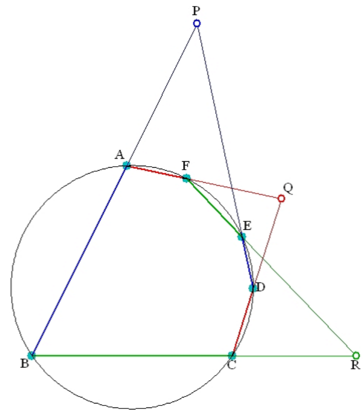




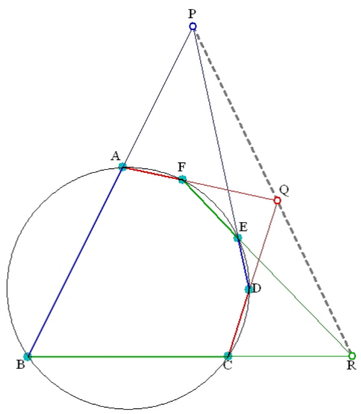
2　パスカルの定理 (1)



(1) 円に内接する六角形 ABCDEF において。

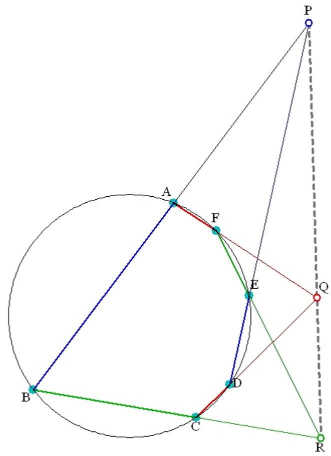


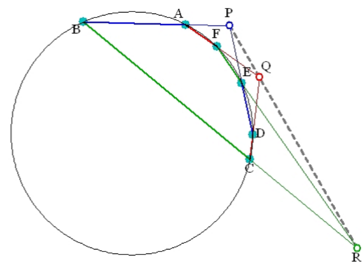
(2) 直線 AB と DE, 直線 CD と FA, 直線 EF と BC の交点をそれぞれ P，Q，R とおく。

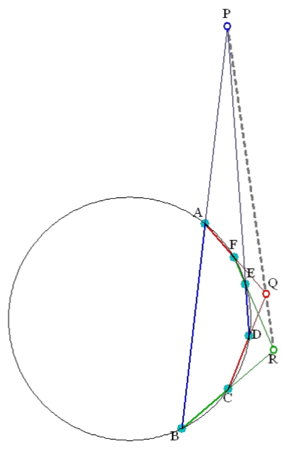


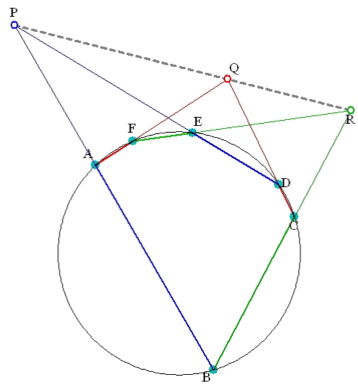
(3)3 点 P，Q，R は一直線上にある。

点の取り方を変えても条件を満たしていればパスカルの定理が成り立つことを確認できます。

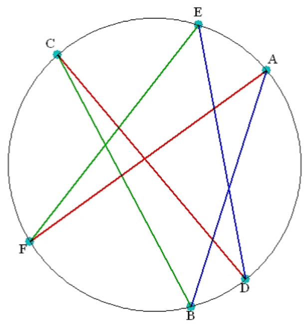




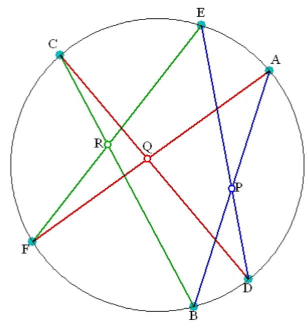




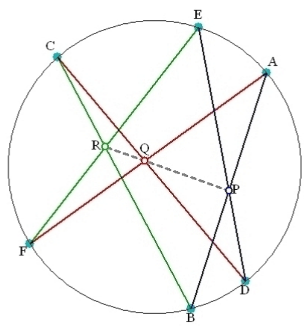
3　パスカルの定理(2)



(1) 円に内接する六辺形 ABCDEF において。

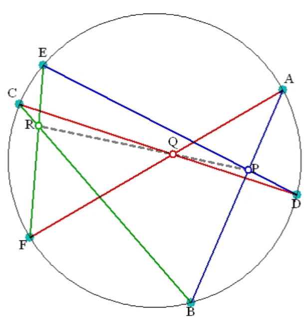


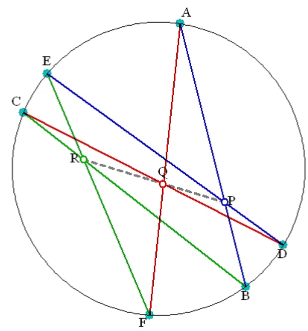
(2) 直線 AB と DE, 直線 CD と FA, 直線 EF と BC の交点をそれぞれ P，Q，R とおく。

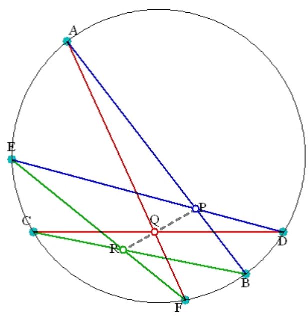


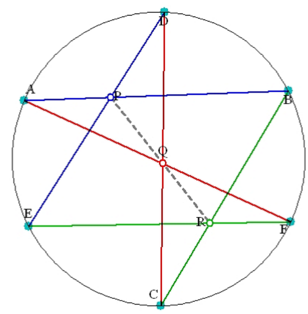
(3)3 点 P，Q，R は一直線上にある。

点の取り方を変えても条件を満たしていればパスカルの定理が成り立つことを確認できます。

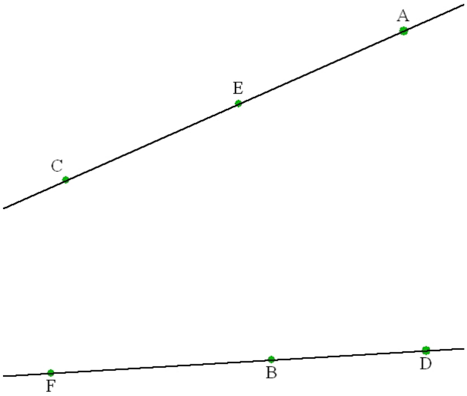


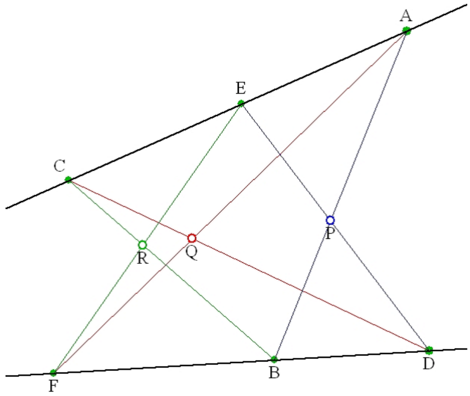






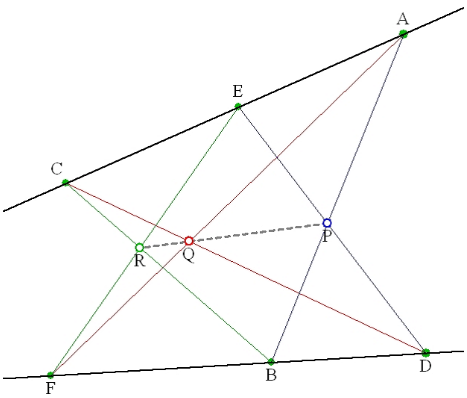
4　パップスの定理





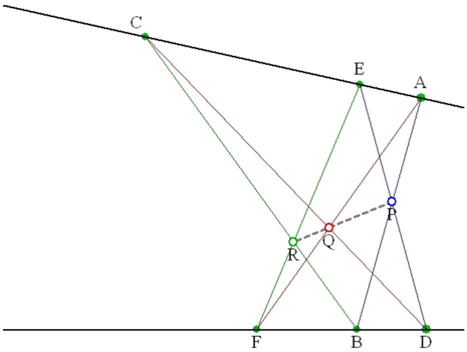
(1) 直線 k 上に 3 点 A,E,C, 直線 ℓ 上に 3 点 D,B,F が与えられているとき。

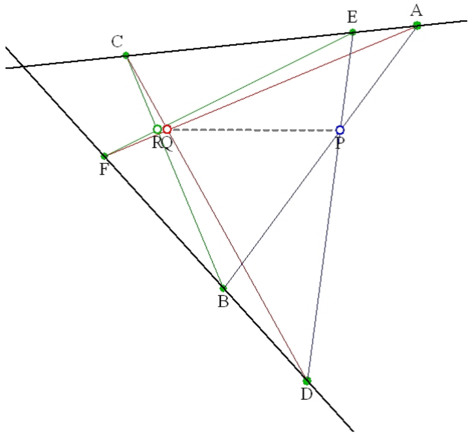
(2) 直線 AB と DE, 直線 CD と FA, 直線 EF と BC の交点をそれぞれ P，Q，R とおく。

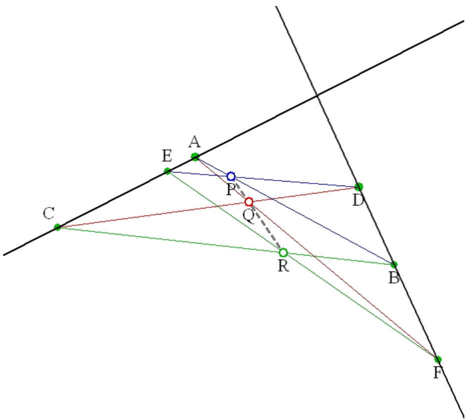


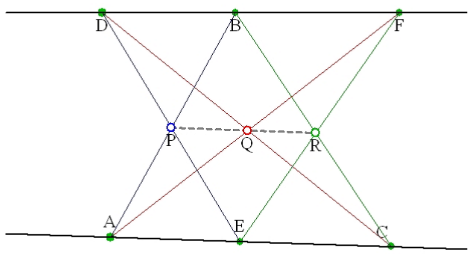
(3)3 点 P，Q，R は一直線上にある。

点の取り方を変えても条件を満たしていればパップスの定理が成り立つことを確認できます。

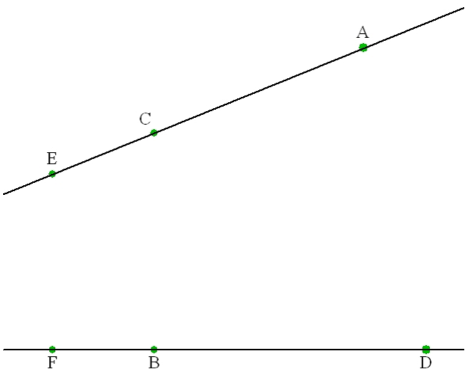




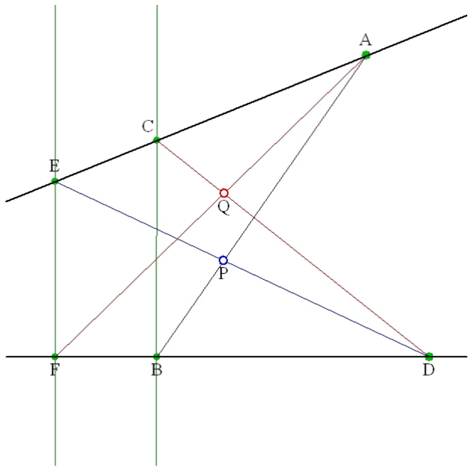




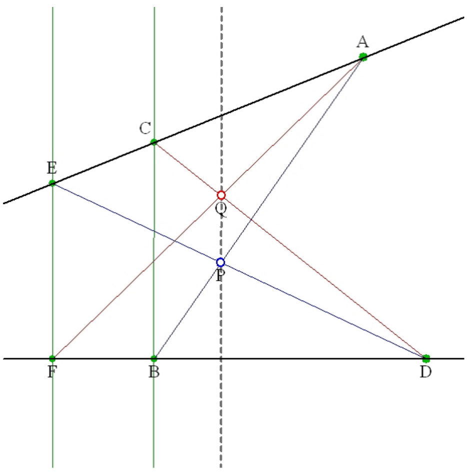
5　パップスの定理 (系)



(1) 直線 k 上に 3 点 A,E,C, 直線 ℓ 上に 3 点 D,B,F が与えられているとき。



(2) 直線 AB と DE, 直線 CD と FA, 直線 EF と BC の交点をそれぞれ P,Q, 無限遠点 R_∞ とおく。



(3)3 点 P，Q，R_∞ は一直線上にある。

点の取り方を変えても条件を満たしていればパップスの定理が成り立つことを確認できます。