平成 25 年度　数学科リレー講座
ミンコフスキー幾何
～非ユークリッド幾何としての特殊相対性理論～

上野・網谷・古田

2013 年 8 月 23 日

はじめに

「相対性理論って物理の話じゃないの？幾何学と何の関係があるの？」

幾何学とは

長さと角度が定まっている空間を調べる理論

- 平面幾何の基本的な作業は，長さと角度を測ること

ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何

ユークリッド幾何

私たちが普段使っている長さと角度が定まった空間を調べる理論

非ユークリッド幾何

私たちが普段使っているものとは異なる長さと角度が定まった空間を調べる理論

- 考える空間が異なれば，長さと角度は異なる

幾何学と相対性理論

- 相対性理論とは
  時間，空間，物質を統一した理論
- 相対性理論の舞台
  ミンコフスキー空間
  ←特殊な長さと角度が定まっている

ミンコフスキー空間を介して，
相対性理論と幾何学が繋がる

- ミンコフスキー幾何（ミンコフスキー空間の幾何）は，非ユークリッド幾何

本講義の流れ

1. 特殊相対性理論
2. 古田先生のお話（原子核反応）
3. 特殊相対性理論の数学的枠組み
4. ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の関係

特殊相対性理論

電車危機一髪

「秒速 24 万 km で進む電車が，全長 40 万 km のトンネルに入る．この電車には電車内の時計で計って 1 秒後に爆発する爆弾が仕掛けられているが，その爆弾は電車がトンネルを抜けた瞬間に解除されるようになっている．電車は果たして無事にトンネルを抜けられるか？」

やること

1. 特殊相対性理論とは
2. 特殊相対性理論の 2 つの原理
3. 光速度不変の原理からの帰結

特殊相対性理論とは

- 特殊相対性理論の「特殊」とは

一定の速度で運動するような
「特別な」観測者しか考えない

- 時間と空間を統一した理論

「相対」と「絶対」

- 相対とは

  何を基準にしたかで変わること

- 絶対とは

  何を基準にしようが変わらないこと

- 等速運動は相対的
- 私たちの日常感覚では，時間や空間の概念は絶対的

特殊相対性理論の 2 つの原理

- 特殊相対性原理
- 光速度不変の原理

特殊相対性原理

特殊相対性原理

観測者のいる場所が静止していても，動いていても，それが等速でさえあれば，すべての物理法則は同一である

光速度不変の原理

光速度不変の原理

一定の速度で動く観測者から見ると，光速は変化しない

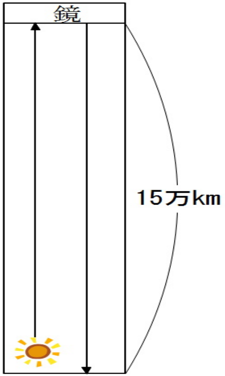
- CERN がパイ中間子を用いて実証

光速度不変の原理からの帰結

- 時間の遅れ
- 長さの縮み
- $E = mc^2$

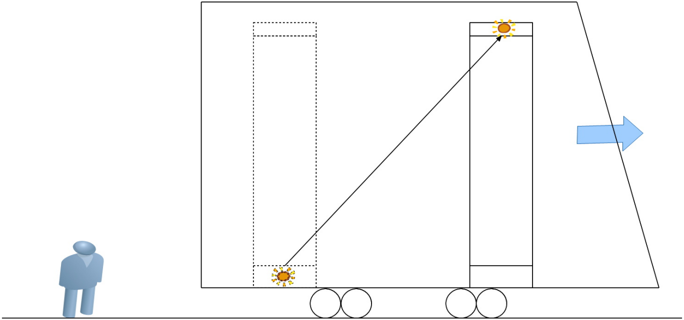
光時計

- 光時計
  光を放ってから反射して戻ってくるまでの時間を 1 秒とみなす時計



時間の遅れ

- 光時計を等速で動く電車に乗せる



- 地上の人から見て，地上の光時計が 1 秒を指すとき，電車内の光時計はまだ 1 秒を指していない！

時間が遅れている

ローレンツ因子

ローレンツ因子（時間の遅れ具合）

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

- 地上の人から見ると，地上の光時計が 1 秒を指すとき，電車内の光時計はまだ $\dfrac{1}{\gamma}\left(= \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\right)$ 秒しか指していない
- 例：電車の速さが光速の 0.8 倍のとき
地上で 1 秒経っていても，電車内ではまだ 0.6 秒しか経っていない

時間の遅れの注意 1

- 時間は互いに遅れる
  - 電車内の人から見たら，地上の人が動いて見える（等速運動の相対性）
  - さっきの議論をそのまま適用すれば，電車内の人から見ると，地上の人の時間が遅れている！

時間は相対的

時間の遅れの注意 2

- 光時計の時間と実際の時間
  - 光速は電磁気学の法則から定まる
  - 世の中の時計も電磁気の法則にしたがって動く
  - 光時計だけ遅れることは考えられない！
- ミューオンの寿命を観測することにより実証されている

長さの縮み

- 動いているものの長さは，動いている方向に対して，$\frac{1}{\gamma}\left(=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ 倍に縮む

- 空間も相対的

- 例
  光速の 0.8 倍で動くものの長さは，0.6 倍になる

電車危機一髪

- 冒頭の問い
「秒速 24 万 km（光速の 0.8 倍の速度）で進む電車が，全長 40 万 km のトンネルに入る．この電車には電車内の時計で計って 1 秒後に爆発する爆弾が仕掛けられているが，その爆弾は電車がトンネルを抜けた瞬間に解除されるようになっている．電車は果たして無事にトンネルを抜けられるか？」
- 解答
  - 電車内から見ると，トンネルが動いて見える（運動の相対性！）
  - 40 万 km × 0.6=24 万 km　より，1 秒でトンネルを抜けられるから，無事！

$E = mc^2$

- 質量とエネルギーは等価
- 1 円玉のエネルギー

90 兆ジュール

  - 東京都立川市の世帯数の月間平均電力消費量
  - 東京ドーム大のお風呂が沸かせる

相対性理論の功罪

- 原子爆弾の開発

（http://heiwakoen.1-shop-net.com　より引用）

まとめ

- 特殊相対性理論：観測者は等速運動
- 等速運動は相対的
- 光速は不変
- 動いている時計は遅れる
- 動いているものの長さは縮む
- エネルギーと質量は等価

特殊相対性理論の数学的枠組み

浦島効果

「双子の兄弟である地上君とロケット君．2 人の 20 歳の誕生日にロケット君は，地上から見て光速に近い速度のロケットで，地上を旅立った．ロケット君は，ロケット君の時計で考えて 7 年間飛び，地点 A に到着後，向きを変えて同じ速度で地上に帰った．ロケット君が地上に到着したとき，ロケット君は $20 + 7 \times 2 = 34$ 歳だが，地上君は 70 歳になっていた！」

やること

1. ミンコフスキー空間
2. ローレンツ変換
3. ミンコフスキー幾何の新たな特徴づけ

ミンコフスキー空間

特殊相対性理論とマッチする 4 次元空間を定義したい

- 空間にとって，「長さ」は本質的
- 光速度不変の原理から，動いているものの「長さ」が変わってしまう

「長さ」をうまく定義してやらないと，特殊相対性理論とマッチする空間は見つけられない！

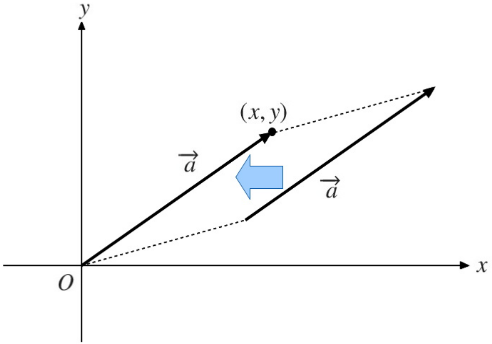
光と物体の長さの関係

- 動いているものの長さは $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍に縮む
- 光がトンネルを抜けるとき，光にとってトンネルの長さは０！

光にとって，どんなものの長さも０である！

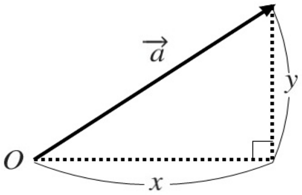
ユークリッド空間における長さ

- ベクトル（矢印）$\vec{a}$
  大きさと向きを持つ量（平行移動しても変わらない！）



- $\vec{a} = (x, y)$ と表す

ユークリッドの長さ



- ベクトルの長さは $\sqrt{x^2+y^2}$

ユークリッドの長さ

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

時空における長さ

- 光にとって以下の式が成立

$$t = \frac{x}{c}$$

- これを使って，$\overrightarrow{a} = (x, t)$ の長さを測ると，

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + t^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{c^2}}$$

$|\overrightarrow{a}| = 0$ になるのは，$x = 0$ のときだけ！

ミンコフスキーの長さ

ミンコフスキーの長さ

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|x^2 - (ct^2)|}$$

$t = \dfrac{x}{c}$ を代入すると

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\left|x^2 - (c \cdot \frac{x}{c})^2\right|} = \sqrt{|x^2 - x^2|} = 0$$

どんな x に対しても 0 になる！

ミンコフスキー空間

- ミンコフスキーの長さを 4 次元に拡張

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - (ct^2)|}$$

ミンコフスキー空間

ミンコフスキーの長さが定まった 4 次元空間

虚数時刻

- $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$　と　$\|\vec{a}\| = \sqrt{|x^2 - (ct)^2|}$
- 虚数時刻 ict
  ただし，
  $$i^2 = -1$$
- $y \to ct$，$t \to ict$ とすれば
  $$|\vec{a}| \to \sqrt{x^2 + (ct)^2}, \qquad \|\vec{a}\| \to \sqrt{x^2 + (ct)^2}$$

$|\vec{a}|$ と $\|\vec{a}\|$ が一致！

ローレンツ変換

- 観測者を A 君から B 君に変えること
- ミンコフスキー空間における座標変換
- 浦島効果の説明

ローレンツ変換の定義

ローレンツ変換

(x, t)：静止している A さんの長さと時間の尺度
(x', t')：A さんから見て速度 v で動いている B さんの長さと時間の尺度

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}x - \dfrac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}t \\
t' = -\dfrac{\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}t
\end{cases}
$$

ローレンツ因子を用いた書き換え

- ローレンツ因子

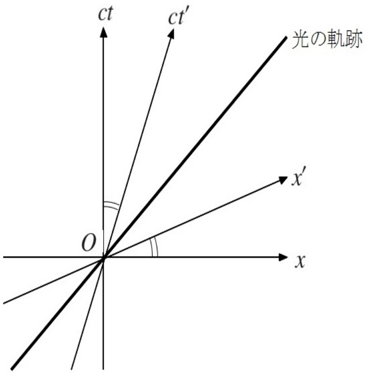
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ローレンツ変換

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \\ t' = -\gamma \frac{v}{c^2} x + \gamma t \end{cases}$$

ローレンツ変換は座標変換

- 光の軌跡：$ct = x$



ローレンツ変換はミンコフスキー空間における座標変換

浦島効果

「双子の兄弟である地上君とロケット君．2 人の 20 歳の誕生日にロケット君は，地上から見て速度 $\frac{24}{25}c$ のロケットで，地上を旅立った．ロケット君は，ロケット君の時計で考えて 7 年間飛び，地点 A に到着後，向きを変えて同じ速度で地上に帰った．ロケット君が地上に到着したとき，ロケット君は $20 + 7 \times 2 = 34$ 歳だが，地上君は何歳か」

計算

- ロケット君の時計で 7 年間飛んだので，

$$(x', t') = (0, 7)$$

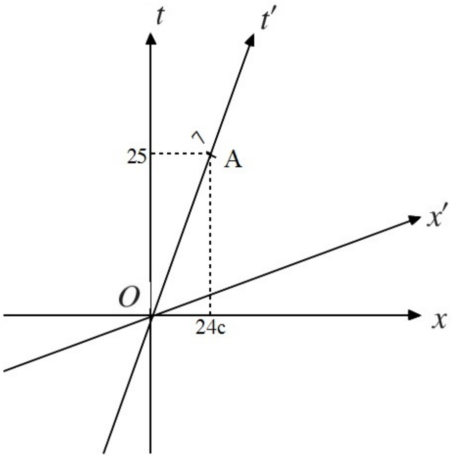
- これと，$v = \frac{24}{25}c$ をローレンツ変換の式に代入すれば，

$$t = 25$$

- 地上君の年齢は，$20 + 25 \times 2 = 70$

34 歳になったロケット君が地上に帰ったとき，双子であるはずの地上君は **70** 歳になっている

図説



双子のパラドックス

「ロケット君からみたら，地上君が恐ろしい速度で遠ざかっていくように見える（これが運動の相対性だ）．だから，同じ論法で，ロケット君の方が年上になっていることも証明できるんじゃないか？」

- 引き返す際に，減速と加速が必要なので，運動の相対性が崩れる
- 一般相対性理論を使えば，矛盾は生じない

ミンコフスキー幾何の新たな特徴づけ

- ミンコフスキー幾何
  ミンコフスキーの長さが定まった空間を調べる理論

- ミンコフスキーの長さは，ローレンツ変換で不変

ミンコフスキー幾何

ローレンツ変換による不変理論

まとめ

- ユークリッドの長さ：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ミンコフスキーの長さ：$\|\vec{a}\| = \sqrt{|x^2 - (ct)^2|}$
- 虚数時刻：ict
- ローレンツ変換：ミンコフスキー空間における座標変換
- ミンコフスキー幾何：ローレンツ変換による不変理論

ユークリッド幾何と
ミンコフスキー幾何の関係

やること

1. ユークリッド幾何再考
2. 双曲線関数とローレンツ変換
3. 2 つの幾何の架け橋

ユークリッド幾何再考

- ローレンツ変換：ミンコフスキー空間における座標変換

- ユークリッド空間における座標変換は？

回転

円関数

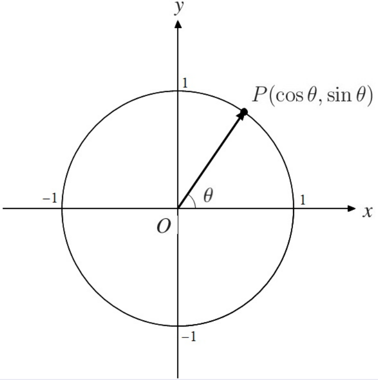
円関数

右図で，点 P の座標が (x, y) のとき，

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

また，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



回転の表示式

回転

ベクトル $\overrightarrow{a} = (x, y)$ を角 θ 回転させたベクトルを $\overrightarrow{a'} = (x', y')$ とすると，以下の関係が成り立つ：

$$\begin{cases} x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{cases}$$

ユークリッド幾何の新たな特徴づけ

- ユークリッドの長さは，回転で不変

ユークリッド幾何

回転による不変理論

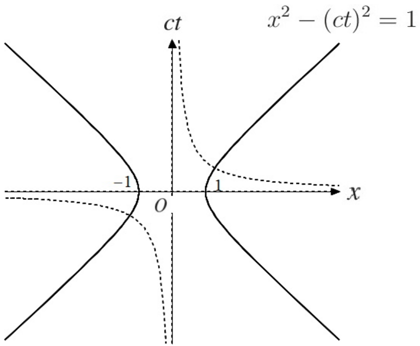
- 幾何の定理：図形の移動（座標変換）で不変

新たな期待

- 回転：円関数で表示
- 円：ユークリッド距離が一定の点の集合

「ミンコフスキー距離が一定の点の集合は？」

$$\sqrt{|x^2-(ct)^2|}=1 \iff x^2-(ct)^2=\pm 1$$



双曲線関数なるものがあれば，ローレンツ変換を表示できるのでは？

双曲線関数とローレンツ変換

1. 双曲線関数の導入
2. 双曲線関数を用いたローレンツ変換の表示

オイラーの公式

オイラーの公式

e：ネイピア数，i：虚数単位

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

計算

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos(i\theta) = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$
- $\sin(i\theta) = \dfrac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i} \Leftrightarrow -i\sin(i\theta) = \dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$
- $\{\cos(i\theta)\}^2 - \{-i\sin(i\theta)\}^2 = 1$
- $\cos(i\theta) = X$, $-i\sin(i\theta) = Y$ とおけば,

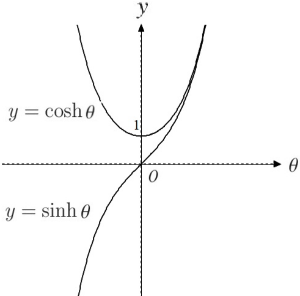
$$X^2 - Y^2 = 1$$

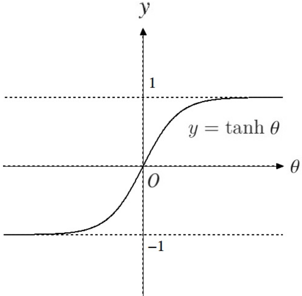
これは X–Y 平面における双曲線の式！

双曲線関数

双曲線関数

$$
\begin{cases}
\cosh\theta = \cos(i\theta) \\
\sinh\theta = -i\sin(i\theta) \\
\tanh\theta = -i\tan(i\theta)
\end{cases}
$$





ローレンツ変換の書き換え

- ローレンツ変換の物理的表記

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}x - \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}t \\ t' = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}t \end{cases}$$

- ローレンツ変換の幾何的表記（$v = -\tanh\theta$）

$$\begin{cases} x' = \cosh\theta \cdot x + \sinh\theta \cdot t \\ t' = \sinh\theta \cdot x + \cosh\theta \cdot t \end{cases}$$

双曲回転

2 つの幾何の架け橋

- 虚数時刻 it
- 虚数角 $i\theta$

回転の書き換え

- 回転

$$\begin{cases} x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot t \\ t' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot t \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad (t \to it, \quad \theta \to i\theta)$$

$$\begin{cases} x' = \cos(i\theta) \cdot x - i\sin(i\theta) \cdot t \\ it' = \sin(i\theta) \cdot x + i\cos(i\theta) \cdot t \end{cases}$$

- $\cosh\theta = \cos(i\theta)$
  $\sinh\theta = -i\sin(i\theta) \;\Leftrightarrow\; i\sinh\theta = \sin(i\theta)$

$$\begin{cases} x' = \cosh\theta \cdot x + \sinh\theta \cdot t \\ t' = \sinh\theta \cdot x + \cosh\theta \cdot t \end{cases}$$

虚数が回転とローレンツ変換を繋げた！

まとめ

- ユークリッド幾何：回転の不変理論
- ミンコフスキー幾何：ローレンツ変換の不変理論

ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何は,
虚数を介して繋がる

ユークリッド幾何とミンコフスキー幾何の架け橋は虚数