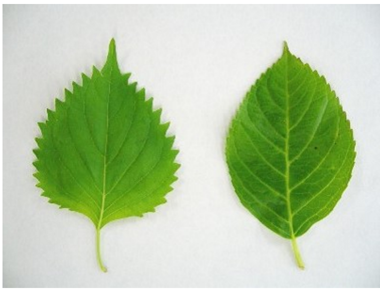
平成 25 年度 数学科リレー講座　6 日目

エルランゲン・プログラム

春木　淳・小澤嘉康

0　はじめに

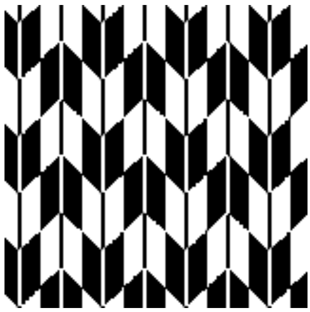
我々の身のまわりには対称なものが多く存在します。木の葉，昆虫，動物は左右対称です。また雪の結晶は正六角形の対称性をもっていますし，鉱物の結晶でいろいろな対称性をもつものが存在します。美術作品の中でも構図や模様としてさまざまな対称な図形が登場します。なぜ人間は対称な図形を美しいと感じるのでしょう。



木の葉

雪の結晶

ミラノ大聖堂



矢がすりの模様

数学において対称性は，最初図形の移動として認識されていました。線対称や点対称は図形の折り返しや回転移動として意味づけられます。19 世紀になって，ガロアが方程式の解を研究する中で見つけた**群**という考え方が，この対称性を記述するのにふさわしい言語であることが分かってきました。

> 対称性とは何かを分析し，抽象し，一般化していくと，そこに‘群’の概念が現れてくる．プラトン的なイデヤの世界に立っていうならば，対称性とは群そのものである．　(志賀浩二「群論への 30 講」)

1　エルランゲン・プログラム

近世にいたるまで，幾何といえば，ユークリッド幾何しか考えられませんでした。その中で，平行線の公理を他の公理から導こうという試みが多くの人によってなされました。それらの試みはすべて失敗に終わったのですが，その中から平行線の公理の成り立たない，いわゆる双曲幾何学と呼ばれる非ユークリッド幾何学が 1829 年に，ロバチェフスキー，その数年後にボヤイによって生みだされました。また，1867 年にリーマンは楕円幾何学と呼ばれるものが，ロバチェフスキー，ボヤイの双曲幾何学とまったく対等に存在することを述べ，両者の中間にユークリッド幾何学があることを指摘しました。

一方，デザルグによって始められた射影幾何学は，弟子のパスカルに受け継がれ，1820 年代から，ポンスレー，ケーリーなどによって発展し，絶頂期にありました。

そういった中，**クライン** (1849 – 1925) はリー群で有名なリーと出会い，ともに幾何学に初心があったこともあり，意気投合しました。2 人はガロア理論を解読し終えたばかりのジョルダンの影響を受け，ガロアが思いもよらなかったであろう幾何学の分野へ群論を拡張させました。

1872 年，クラインは 23 歳でエルランゲン大学の教授に招聘され，その就任講演で，

幾何学的性質とは変換群 G の作用で不変に保たれる性質

という考え方を示しました。

これは後にエルランゲン・プログラムと呼ばれ,「幾何学とは何か」というある種哲学的な問いに対する一つの答えを与えたものです。このように，群とその群が作用する空間を組にして幾何学的対象として特徴づけたものを**クライン幾何学**といいます。

このエルランゲン・プログラムにより，その当時存在したいろいろな幾何学のほとんどは，射影幾何学に対してある種の制限をかけたものとしてとらえることができます。そういった意味で，射影幾何学は当時では万能の幾何学でした。

```
              ┌─ アフィン幾何学 ── ユークリッド幾何学
射影幾何学 ─┤
              └─ 非ユークリッド幾何学
```

2　図形の移動（変換）と不変量

2.1　ユークリッド幾何学（合同変換・相似変換）

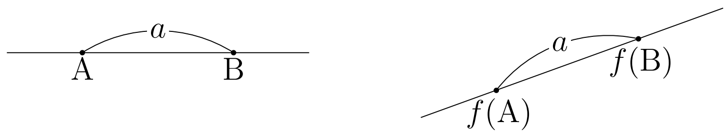
$\mathbb{R}^2$ 上の合同変換（等長変換） f とは

合同変換

(1)　線分 AB は f によって $f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ を結ぶ線分に移される。

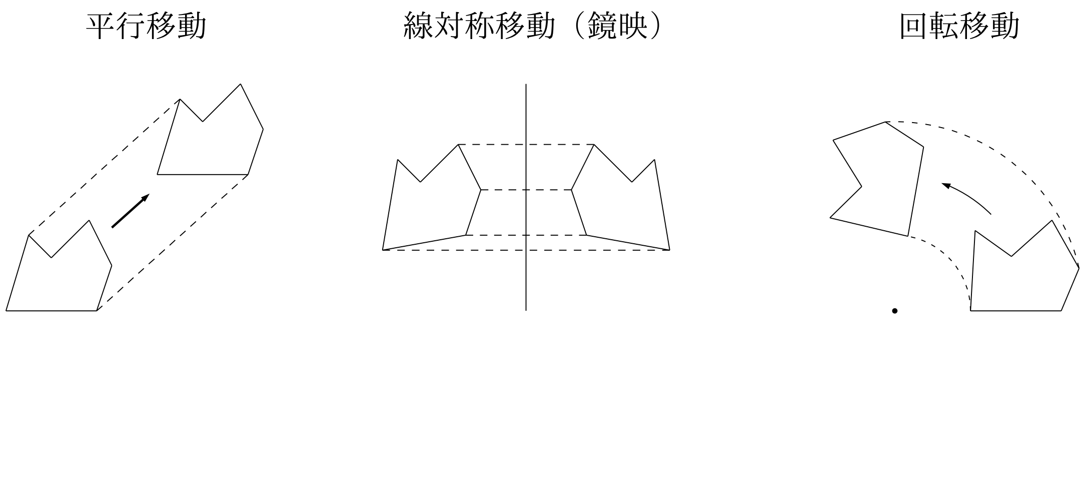
(2)　f によって長さが不変 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$

が成り立つものとします。



合同変換全体を G_E で表します。
合同変換 f_1 と合同変換 f_2 の合成はまた合同変換となります。$f_1 \circ f_2 \in G_E$
また，合同変換 f の逆変換 f^{-1} もまた合同変換となります。$f^{-1} \in G_E$
これらの条件を満たすとき，集合 G_E は群であるといいます。G_E を合同変換群ということにします。

中 1 で習った，平行移動，線対称移動（鏡映），回転移動はすべて合同変換の一種です。逆に，すべての合同変換はこれらの組み合わせで表されます。



$\mathbb{R}^2$ 上の**相似変換** f とは

相似変換

(1)　線分 AB は f によって $f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ を結ぶ線分に移される。

(2)　$\overline{\mathrm{AB}} = k\overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$　(k は正の定数)

が成り立つものとして定義されます。
(2) は次のように言い換えることもできます。

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の任意の 3 点 A，B，C に対して

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}}{\overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})}}$$

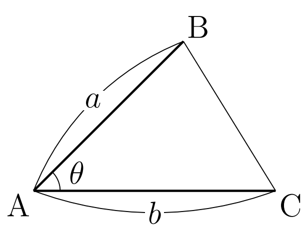
相似変換全体を G_S で表すとこれも群となります。すなわち
f_1，$f_2 \in G_S$ ならば $f_1 \circ f_2 \in G_S$
$f \in G_S$ ならば $f^{-1} \in G_S$
よって G_S を**相似変換群**と呼ぶことにします。
合同変換は相似変換の特別な場合 $(k = 1)$ です。

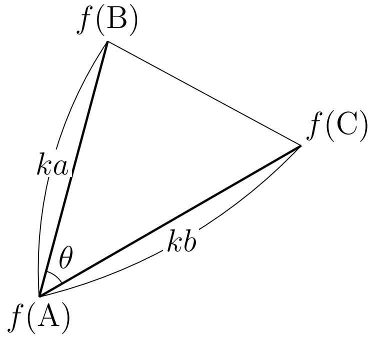
$$f \text{ が合同変換} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ が相似変換}$$

これは

$$G_E \subset G_S$$

ということでもあります。
（集合として含まれるというだけでなく，群として部分群になっています。）
線分の長さ（2 点間の距離）は合同変換では不変であるが，相似変換では変化します。
2 つの線分のなす角は相似変換によって不変です。円は相似変換によって円（半径は異なる）に移されます。





ある空間において，変換群 G の任意の変換 f によって不変である性質を幾何学的性質ということにします。この幾何学的性質を調べることが，それぞれの幾何学を特徴付ける，とクラインは定めました。変換群 G を決めることによって幾何が決まるということです。
合同変換群 G_E によって決まる幾何を**合同幾何**（ユークリッド幾何），相似変換群 G_S によって決まる幾何を**相似幾何**ということにします。
よって，線分の長さは合同幾何的性質，角の大きさ，円は相似幾何的性質です。

2.2　アフィン変換

$\mathbb{R}^2$ 上のアフィン変換 f とは

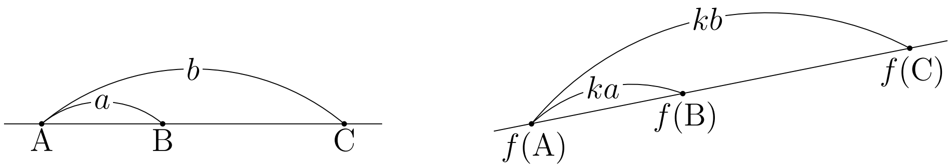
アフィン変換

(1)　線分 AB は f によって $f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ を結ぶ線分に移される。

(2)　同一直線上の 3 点 A，B，C に対して

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}}{\overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})}}$$

が成り立つものとして定義されます。



(2) の条件は相似変換のものより弱い条件です。相似変換の場合には任意の 3 点に対して成り立つのに対し，アフィン変換では同一直線上の 3 点のみに対して成り立つことを条件としています。よって

$$f \text{ が相似変換} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ がアフィン変換}$$

が成り立ちます。
アフィン変換全体を G_A と表します。これもまた群となるので G_A を**アフィン変換群**といいます。また，アフィン変換群 G_A によって決まる幾何を**アフィン幾何**といいます。アフィン幾何的な性質，すなわちアフィン変換によって不変な性質とは何でしょう。
(1) より，アフィン変換 f によって直線は直線にうつされることがわかります。2 直線 l_1，l_2 が点 P で交われば，2 直線 $f(l_1)$，$f(l_2)$ は $f(P)$ で交わります。したがって，2 直線 l_1，l_2 が平行ならば，2 直線 $f(l_1)$，$f(l_2)$ も平行です。すなわち，アフィン変換によって平行性は不変になります。

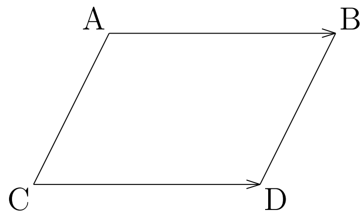
ベクトル速習講座

空間内の 2 点 A，B に対し，A から B へ向かう有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表し，**(変位) ベクトル** AB といいます。A と B の距離を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさといい，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ と表します。ベクトルを 1 つの文字で $\vec{a}$，大きさは $\left|\vec{a}\right|$ と表すこともあります。

ベクトルは“どの方向に”，“どれだけ進んだか”という 2 つの要素で決まる量です。よって，向きと大きさが同じベクトルは**等しい**ベクトルであると考えるのが自然です。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は平行移動して重なるとき

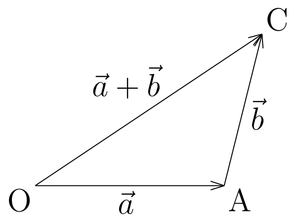
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

で，等しいといえます。



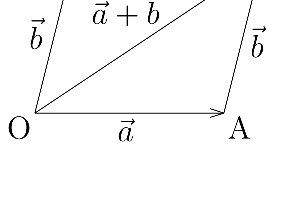
2 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\vec{a}+\vec{b}$ と表します。

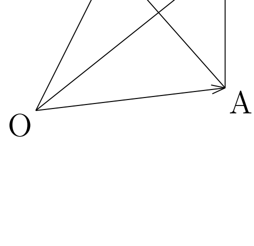
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



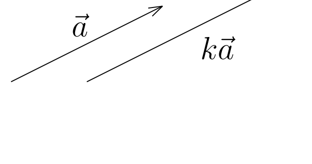
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対して

(1) （交換法則）$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$　　(2) （結合法則）$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$





ベクトルの実数倍 $k\vec{a}$ とは，
$k > 0$ のときは同じ向きで大きさが k 倍になったもの，
$k < 0$ のときは反対向きで大きさが $|k|$ 倍になったもの
とします。



始点と終点が同じベクトルを**零ベクトル**といい $\vec{0}$ で表します。ベクトル $\vec{a}$ と大きさが同じで向きが反対であるベクトルを**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ で表します。

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

速習講座おわり

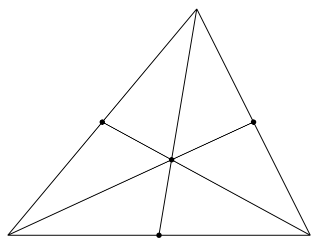
アフィン変換 f によって，平行直線は平行直線にうつるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}=\overrightarrow{f(\mathrm{C})f(\mathrm{D})}$$

よって，アフィン変換 f によって，ベクトルはベクトルにうつります。
アフィン変換の定義 (2) を，ベクトルを用いて次のように言い換えておきます。

(2)$'$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ならば $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}=k\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})}$

ベクトルの和はベクトルの和に，ベクトルの実数倍はベクトルの同じ実数倍にうつります。これより，ベクトル，ベクトルの和，ベクトルの実数倍の概念はアフィン幾何の性質であることがわかります。
これらのベクトルの概念を用いて,「三角形の 3 中線は 1 点（重心）で交わる」を証明でき，これはアフィン変換で不変なので，アフィン幾何的性質といえます。



一方,「三角形の内心は角の二等分線の交点である」は合同変換では不変ですが，アフィン変換においては不変ではありません。よって合同幾何的性質であるといえます。
合同変換は相似変換の特別な場合であり，相似変換はアフィン変換の特別な場合なので，合同変換群は相似変換群の部分群であり，相似変換群はアフィン変換群の部分群となっています。

$$G_E \subset G_S \subset G_A$$

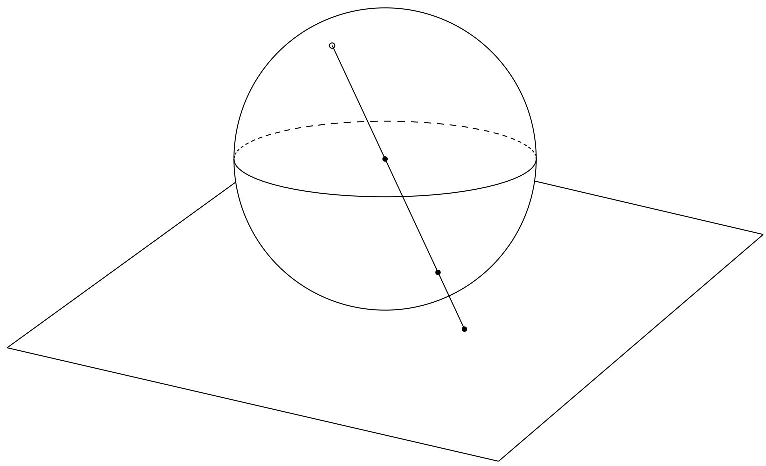
変換群が大きくなればなるほど，不変となる性質は少なくなってきます。アフィン幾何において，線分の長さや角度の大きさは無関係であり，2 直線が交わるか交わらないか（平行性）や線分の比だけが不変な性質（量）として残ってきます。アフィン幾何を含む，さらに大きな幾何，射影幾何ではさらに 2 直線が平行か交わるかも無関係になってしまいます。

2.3 射影変換

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を除いた集合を ${}^*\mathbb{R}^3$ とします。${}^*\mathbb{R}^3$ において，

$$(x,\ y,\ z) \sim (kx,\ ky,\ kz) \quad (k \in \mathbb{R})$$

という同値関係によって同値類を考えると，これは原点を通る直線となります。これらの直線の集合を**射影平面** $P^2(\mathbb{R})$ とします。$P^2(\mathbb{R})$ の要素を $[x : y : z]$ と表し，$P^2(\mathbb{R})$ の点といいます。射影平面は球面 S^2 の対蹠点を同一視したものと考えられます。



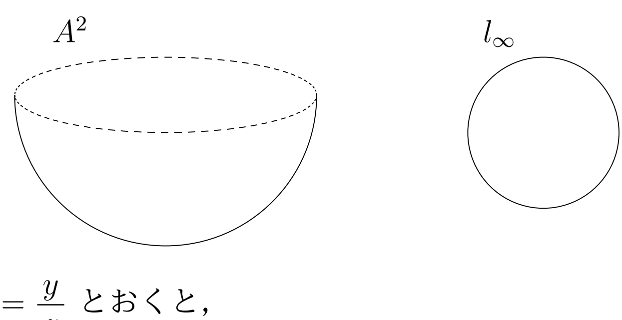
$P^2(\mathbb{R})$ において

$$A^2 = \{\,[x : y : z] \mid z \neq 0\}$$
$$l_\infty = \{\,[x : y : 0] \mid (x,\ y) \neq (0,\ 0)\}$$

とおくと，

$$P^2(\mathbb{R}) = A^2 \cup l_\infty$$

と表されます。



A^2 は $X = \dfrac{x}{z},\ Y = \dfrac{y}{z}$ とおくと，

$$[x : y : z] = \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right] \longleftrightarrow (X,\ Y)$$

と対応させることによって，$\mathbb{R}^2$ と考えられます。$\mathbb{R}^2$ 上の直線 $aX + bY + c = 0$ は，この対応により

$$ax + by + cz = 0$$

にうつります。これを $P^2(\mathbb{R})$ 上の**射影直線**といいます。
l_∞ $(z = 0)$ も射影直線の一種ですが，特に**無限遠直線**とよばれます。以上をまとめて，射影平面 $P^2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ に無限遠直線 l_∞ を加えたものと考えられます。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つとき，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = k$ と表すことにします。（高校では使わない表記法なので注意！）射影直線上の異なる 4 点 A，B，C，D (無限遠点 P_∞ とも異なる) に対し，**複比**とは，

$$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$$

であると定義します。また，A を無限遠点 P_∞ とすると，

$$(\mathrm{P}_\infty,\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$$

とします。
射影変換 f とは

射影変換

(1) 射影平面 $P^2(\mathbb{R})$ 上の射影直線を射影直線にうつす。

(2) 射影直線上の 4 点 A，B，C，D に対し，複比が不変

$$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = (f(\mathrm{A}),\ f(\mathrm{B});\ f(\mathrm{C}),\ f(\mathrm{D}))$$

が成り立つものとします。
射影平面上で無限遠直線は他の射影直線と射影変換でうつりあいます。
　また，無限遠直線を自分自身にうつす射影変換 f によって，無限遠点 P_∞ が無限遠点 $f(\mathrm{P}_\infty)$ にうつされます。このとき，A を無限遠点 P_∞ とすると，(2) の複比が不変であるという条件は

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = \frac{\overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{D})}}{\overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{C})}}$$

となります。よって射影変換を $\mathbb{R}^2$ に制限したものはアフィン変換となっています。

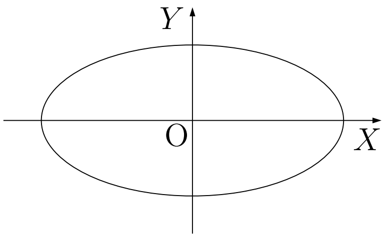
2 次曲線を $\mathbb{R}^2$ から射影平面に拡張して考えてみます。
楕円の方程式は

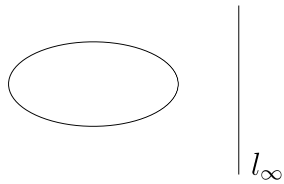
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

です。$X=\dfrac{x}{z}$, $Y=\dfrac{y}{z}$ とおくと，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

ここで $z=0$ とすると，$x=y=0$ となり，（当たり前ですが）無限遠直線 l_∞ との交点はありません。





無限遠直線と交わらない

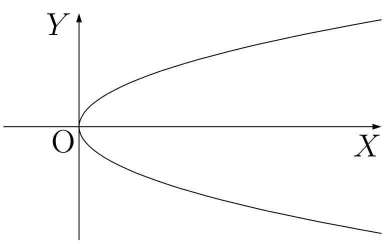
次に放物線の方程式は

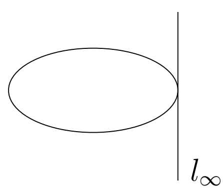
$$Y^2=aX$$

です。$X=\dfrac{x}{z}$, $Y=\dfrac{y}{z}$ とおくと，

$$y^2=axz$$

です。$z=0$ とすると，$y^2=0$ となり，無限遠直線との交点は $[1:0:0]$ 1 つで，重解であることから接していることがわかります。





無限遠直線と接する

最後に双曲線の方程式は

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

です。$X = \dfrac{x}{z}$, $Y = \dfrac{y}{z}$ とおくと，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

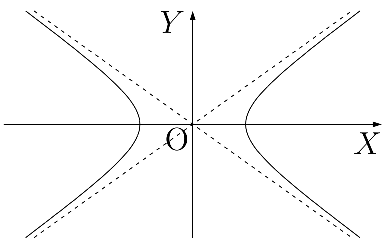
ここで $z = 0$ とすると，

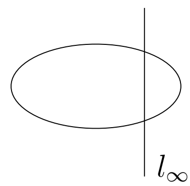
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

よって，

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

です。これは漸近線ですね。そして射影平面ではこれは無限遠点 $[a : -b : 0]$, $[a : b : 0]$ にあたります。これら 2 点で無限遠直線と交わり，つながって円周のようになっていることがわかります。





無限遠直線と 2 点で交わる

デザルグは射影平面において楕円，放物線，双曲線といった 2 次曲線は，射影変換でうつりあうことを発見しました。これらの 2 次曲線は無限遠直線との交点が，それぞれ 0, 1, 2 個という違いが存在するだけで，本質的には同じものなのです。パスカルの定理は円周上の 6 点に対する定理ですが，同一直線上にあることは射影変換によって不変であるので，どの 2 次曲線に対しても成り立つことがいえます。

射影変換で，無限遠直線を無限遠直線にうつすものは，その補集合である $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ にうつします。よってこれがアフィン変換であり，アフィン幾何学を定義します。また，球面を不変にするものは球面（楕円）幾何学を，双曲面を不変にするものは双曲幾何学を定義するのです。

3　変換群の作用

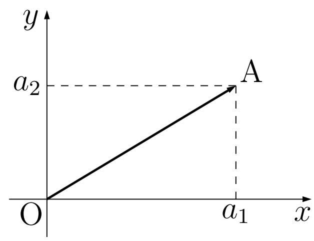
3.1　合同変換群・相似変換群

まずベクトルの内積を定義します。

ベクトル速習講座 2

原点 O と座標平面上の点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



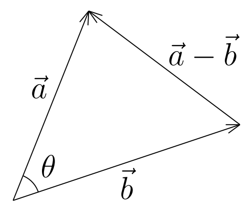
と表し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の**成分表示**といいます。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である他の $\vec{a}$ も同じ成分表示とします。

(1)　$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$

(2)　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

θ は 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角とすると，余弦定理から

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$$



この両辺の値を，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**とし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と表します。ベクトルを成分表示して

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

これを上の式の右辺に代入すると，

$$\frac{1}{2}[({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - \{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\}] = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

よって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

が成り立ちます。

内積に関して，次の性質が成り立ちます。

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

速習講座終わり

命題 1 原点を動かさない合同変換 f は，ベクトルの内積を不変にする。

$$f(\vec{p})\cdot f(\vec{q})=\vec{p}\cdot\vec{q}$$

証明

f によって，2 点間の距離は変わらないので，$|f(\vec{p})|=|\vec{p}|$, $|f(\vec{q})|=|\vec{q}|$。これらを

$$|f(\vec{p})-f(\vec{q})|^2=|\vec{p}-\vec{q}|^2$$

に代入すればよい。　□

命題 2 原点を動かさない合同変換 f は，線型変換である。

すなわち，任意のベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ と任意の実数 k に対し

$$f(\vec{p}+\vec{q})=f(\vec{p})+f(\vec{q}),\quad f(k\vec{p})=kf(\vec{p})$$

証明

命題 1 を用いて，

$$\begin{aligned}
&|f(\vec{p}+\vec{q})-(f(\vec{p})+f(\vec{q}))|^2\\
&=|f(\vec{p}+\vec{q})|^2-2f(\vec{p}+\vec{q})\cdot(f(\vec{p})+f(\vec{q}))+|f(\vec{p})+f(\vec{q})|^2\\
&=|\vec{p}+\vec{q}|^2-2\{f(\vec{p}+\vec{q})\cdot f(\vec{p})+f(\vec{p}+\vec{q})\cdot f(\vec{q})\}+|\vec{p}+\vec{q}|^2\\
&=2|\vec{p}+\vec{q}|^2-2\{(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{p}+(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{q}\}\\
&=2|\vec{p}+\vec{q}|^2-2|\vec{p}+\vec{q}|^2\\
&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f(k\vec{p})-kf(\vec{p})|^2&=|f(k\vec{p})|^2-2f(k\vec{p})\cdot(kf(\vec{p}))+|k|^2|f(\vec{p})|^2\\
&=|k\vec{p}|^2-2k\vec{p}\cdot(k\vec{p})+|k|^2|\vec{p}|^2\\
&=0
\end{aligned}$$

□

ここで

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

とします。任意のベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を f でうつすと，線型性により

$$\begin{aligned}f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=xf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$$f:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

は

$$\begin{cases}X=ax+by\\Y\ =cx+dy\end{cases}$$

と表せます。この係数 $a,\ b,\ c,\ d$ だけを正方形に並べて

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と表します。この $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を**行列**といい，一文字 A で表します。

2 つの行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ の積は

$$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br&aq+bs\\cp+dr&cq+ds\end{pmatrix}$$

で定義します。これは行列 A,B の表す 2 つの変換 $f,\ g$ の合成変換 $f\circ g$ の形から導かれます。

$$\begin{aligned}f\circ g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}px+qy\\rx+sy\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a(px+qy)+b(rx+sy)\\c(px+qy)+d(rx+sy)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(ap+br)x+(aq+bs)y\\(cp+dr)x+(cq+ds)y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この形から，$f\circ g$ と $g\circ f$ は一般的に異なる変換であり，同様に AB と BA は一般的に異なる行列となります。

合同変換を表す行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を特徴づけてみましょう。

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であり，f は内積を不変にすることから，

$$a^2+c^2=1, \quad b^2+d^2=1, \quad ab+cd=0 \quad \cdots ①$$

よって，

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで ${}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$${}^tAA=E$$

と表せます。このような行列 A を**直交行列**といいます。内積を不変にするということは，直交軸が直交軸にうつるということです。直交行列全体を $O(2)$ と表します。

$$O(2)=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, {}^tAA=E \right\}$$

これは群となっているので，$O(2)$ は直交群と呼ばれています。
①を満たす $a,\ b,\ c,\ d$ を具体的求めると，

$$a=\cos\theta,\ c=\sin\theta,\ b=\mp\sin\theta,\ d=\pm\cos\theta \quad (\text{複号同順})$$

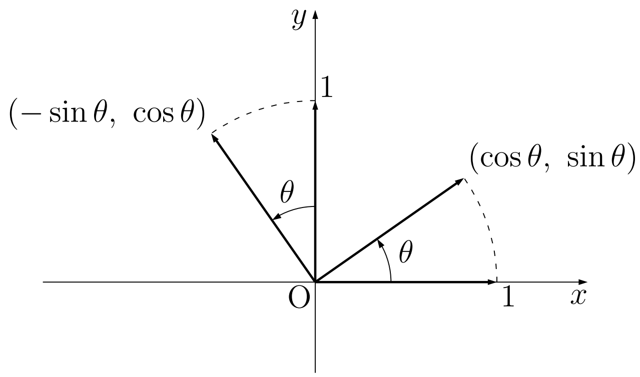
と表すことができるので，

$$\begin{aligned} O(2)&=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\right\} \\ &=\{\,\text{原点の周りの回転}\,\}\cup\{\,\text{原点を通る直線に関する対称移動}\,\} \end{aligned}$$

となります。
実際，一つ目の集合に含まれる変換でうつすと

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta \end{pmatrix}$$

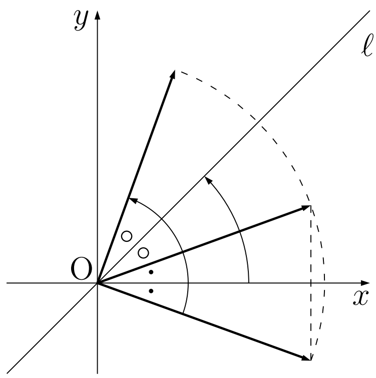
となりますが，これは $(1,\ 0)$ を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に，$(0,\ 1)$ を $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ にうつすので，原点のまわりの θ だけ**回転移動**を表します。



また，二つ目の集合に含まれる変換でうつすと

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

となります。これは x 軸対称移動と θ 回転移動の合成なので，直線 $\ell:\ y=\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動になります。対称移動を**鏡映**ともいいます。



合同変換はこれに平行移動を加えて $A\vec{x}+\vec{b}$ と表されるので，合同変換群 G_E は，

$$G_E=O(2)\ltimes\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}A & \vec{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ A\in O(2),\ \vec{b}\in\mathbb{R}^2\right\}$$

と表されます。この作用は

$$\begin{pmatrix}A & \vec{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\vec{x}+\vec{b}\\ 1\end{pmatrix}$$

と表されるので，群の演算は

$$\begin{pmatrix}A_2 & \vec{b_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \vec{b_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2 & \vec{b_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\vec{x}+\vec{b_1}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2A_1\vec{x}+A_2\vec{b_1}+\vec{b_2}\\ 1\end{pmatrix}$$

となります。よって，一般に

$$\begin{pmatrix}A_2 & \vec{b_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \vec{b_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}A_1 & \vec{b_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & \vec{b_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

なので，非可換であり半直積群で表されます。これで，

合同変換は，回転，鏡映，平行移動の合成で表される

ことが示せました。

相似変換は 合同変換 ＋ 拡大・縮小 です。

$$CO(2) = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t\!AA = cE \quad (c \in \mathbb{R},\ c \neq 0) \right\}$$

とすると，相似変換群 G_S は

$$G_S = CO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in CO(2),\ \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

と表されます。

3.2 アフィン変換群

アフィン変換 f によって，ベクトルはベクトルにうつされます。この写像を

$$\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$$

とおきます。

命題 3 φ は線型変換である。

$\boxed{\text{証明}}$
$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とすると，

$$\vec{p} + \vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって

$$\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{q}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} + \overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{C})} = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})} = \varphi(\vec{p} + \vec{q})$$

また，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ k\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると，アフィン変換の定義 $(2)'$ より

$$\varphi(k\vec{p}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})} = k\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = k\varphi(\vec{p})$$

$\square$

逆に線形変換 φ は $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}, \quad \varphi(k\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = k\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ となるので，原点を動かさないアフィン変換となっています。一般のアフィン変換は平行移動を加えて

$$f(A) = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + f(O)$$

となります。逆変換をもつ線型変換 φ は行列で

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ ad - bc \neq 0 \right\}$$

と表せるので，アフィン変換群 G_A は

$$G_A = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ A \in GL_2(\mathbb{R}),\ \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

と表せます。群の演算は合同変換群のときと同様であり，非可換です。

3.3 射影変換群

空間 $\mathbb{R}^3$ において，平面 $z=1$ を H_3 とすると，

$$H_3 = \{(u,\ v,\ 1) \mid u,\ v \in \mathbb{R}\}$$

任意の平面 H をとり，原点に点光源を置いたときの H から H_3 への点射影 π_H を考えます。
H 上の直交座標 $(X,\ Y)$ を

$$X\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \in H$$

と定めます。H_3 との交点は

$$\left(\frac{a_1X + a_2Y + a_3}{c_1X + c_2Y + c_3},\ \frac{b_1X + b_2Y + b_3}{c_1X + c_2Y + c_3},\ 1\right)$$

よって，$X = \dfrac{x}{z},\ Y = \dfrac{y}{z}$ として斉次座標で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

H 上で直交座標を考えたので，$a_1,\ a_2,\ \cdots$ は任意ではないが，このような点射影を繰り返すことによって，任意の線型変換を生成できます。これを**射影変換**といいます。
射影平面の点は $[x:y:z] \sim [kx:ky:kz]$ だから，$a_1,\ a_2,\ \cdots$ がすべて定数倍となったものは同じ変換を表します。よって，逆行列をもつ 3 次正方行列の集合を $GL_3(\mathbb{R})$ とおくと，射影変換群は

$$PGL_3(\mathbb{R}) = GL_3(\mathbb{R})/Z^3, \quad Z^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a \neq 0 \right\}$$

で表されます。
この射影変換によって，射影直線は射影直線にうつります。また，線形変換なので複比を不変にすることもいえます。

次の定理の証明は発展的内容です。

定理 4　すべての（非退化）2 次曲線は射影変換でうつりあう。

$\boxed{\text{証明}}$

$\mathbb{R}^2$ の 2 次曲線は一般に

$$aX^2 + 2bXY + CY^2 + 2dX + 2eY + f = 0$$

という形で表されます。$X = \dfrac{x}{z},\ Y = \dfrac{y}{z}$ とおくと

$$ax^2 + 2bxy + Cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$$

であり，これを行列を用いて表示すると

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

となります。対称行列 $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ が逆行列をもつとき，非退化であるといいます。

非退化対称行列は，直交行列 $T \in O(3)$ によって

$${}^tT \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma : \text{実数の固有値})$$

と対角化されることが知られています。（行列の標準化の定理）

よって，$P = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \end{pmatrix}$ によって，

$${}^tP \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

と変形できます。

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，

$${}^t\left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} {}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}$$

だから，

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t P^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

$$\pm(x')^2 \pm (y')^2 \pm (z')^2 = 0$$

これは，分けて書くと

$$
\begin{aligned}
(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0 \quad &\cdots \text{①} \\
(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 = 0 \quad &\cdots \text{②} \\
(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0 \quad &\cdots \text{③} \\
(x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 0 \quad &\cdots \text{④}
\end{aligned}
$$

の4種類ですが，①は $x = y = z = 0$ で1点のみしか表しません。②，③，④は変数を入れかえることにより，すべて $(x')^2+(y')^2 = (z')^2$ になります。$\dfrac{x'}{z'} = X'$, $\dfrac{y'}{z'} = Y'$ とすると，$(X')^2 + (Y')^2 = 1$ となり，これは単位円となります。すなわち，すべての（非退化）2次曲線は射影変換で単位円にうつすことができることがわかります。よって，（非退化）2次曲線は射影変換でうつりあいます。 $\square$

4　射影変換群の制限

合同変換群，相似変換群，アフィン変換群と球面幾何学や双曲幾何学を定義する群が $PGL_3(\mathbb{R})$ の部分群として表されることを示します。

4.1　合同幾何学・相似幾何学

$GL_3(\mathbb{R})$ の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \mp b_1 & a_3 \\ b_1 & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \middle| \, {a_1}^2 + {b_1}^2 > 0,\ c_3 \neq 0 \right\}$$

は虚円点 $[i : 1 : 0],\ [-i : 1 : 0] \in P^2(\mathbb{C})$ を不変にします。いきなり複素数が出てきて困ってしまいますが，無限遠直線の拡張部分にあると考えましょう。$\mathbb{R}^2$ 上の円

$$(X-p)^2 + (Y-q)^2 = r^2$$

を $X = \dfrac{x}{z},\ Y = \dfrac{y}{z}$ とすると

$$(x-pz)^2 + (y-qz)^2 = r^2z^2$$

ここで $z = 0$ とすると，$x^2 + y^2 = 0$ なので，虚円点を必ず通ることが分かります。逆に，虚円点を通る 2 次曲線は円のみなので，この部分群で円は円にうつることがいえます。

部分群の表示において，$\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} = d$ とおくと，$\dfrac{a_1}{d} = \cos\theta,\ \dfrac{b_1}{d} = \sin\theta$ と表せるので，

$$\left\{ \begin{pmatrix} d\cos\theta & \mp d\sin\theta & a_3 \\ d\sin\theta & \pm d\cos\theta & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \middle| \, d > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi,\ c_3 \neq 0 \right\}$$

とも表せます。

4.2　アフィン幾何学

$GL_3(\mathbb{R})$ の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \middle| \, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),\ c_3 \neq 0 \right\}$$

は無限遠直線 $l_\infty = \{[x : y : 0]\}$ を不変にします。すなわち，その補集合である A^2 を A^2 にうつすことがわかります。

4.3　球面幾何学（楕円幾何学）

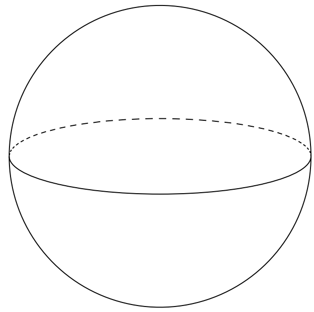
$GL_3(\mathbb{R})$ の部分群である直交群

$$O(3) = \left\{ A \in GL_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tAA = E \right\}$$

を考えます。これは球面

$$S^2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

を不変にします。



実際，$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} {}^tA$ だから，

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} {}^tAA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

球面において直線に相当するものは**大円**（中心 O を通る平面 OAB による切り口）であり，球面上の 2 点 A，B の最短線は，大円の（短い方の）弧です。角に相当するものは，大円のなす角になります。直線の長さは有限で，ある直線外にある点を通り，その直線に交わらない直線の数は 0 本（存在しない）です。これらは $f \in O(3)$ による変換に対して不変な性質となっています。

球面の対蹠点を同一視したもの（射影平面 $P^2(\mathbb{R})$ と同位相）を考えることもあり，この場合，2 直線は必ず 1 点で交わります。これを**楕円的非ユークリッド幾何**とよびます。

4.4　双曲幾何学

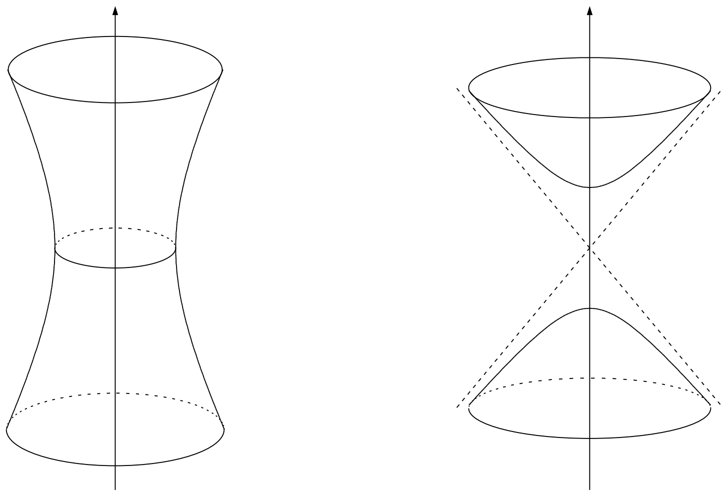
$I_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とします。$GL_3(\mathbb{R})$ の部分群

$$O(2,1) = \left\{ A \in GL_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tAI_{2,1}A = I_{2,1} \right\}$$

を考えます。これは双曲面（円錐面）

$$x^2 + y^2 - z^2 = k$$

を不変にします。



$k > 0$ のとき，一葉双曲面　　　$k < 0$ のとき，二葉双曲面

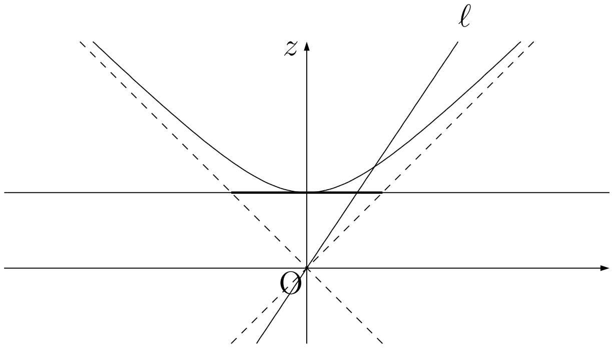
実際，球面幾何学のときと同様に $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} I_{2,1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} {}^tAI_{2,1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} I_{2,1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

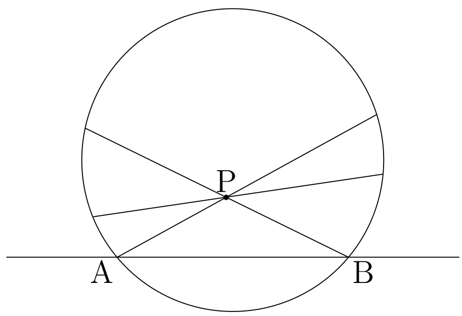
よって

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = x^2 + y^2 - z^2 = k$$

$k=-1$ のとき，二葉双曲面の $z \geqq 1$ の部分と原点を通る直線 ℓ との交点を平面 $z=1$ に射影すると，曲面全体は単位円盤にうつります。射影直線と双曲面との交線をこの円盤にうつすと直線にうつります。この円盤における幾何学を，クラインの**円盤モデル**といいい，双曲幾何学のモデルの一つです。



双曲幾何学では直線外の１点を通り，その直線と交わらない直線は無限にあります。その中で平行と非交を区別します。直線 ℓ 外の１点 P を通る直線 m は，m が ℓ と交わらないが，それよりも内側の直線がすべて ℓ と交わるとき，**平行**であるといいます。P を通って ℓ と平行な直線 m は２本あり，その間の直線が**非交**であるといいます。



２点 P，Q を通る射影直線が円盤と M，N で交わるとき，２点 P，Q 間の距離を，複比を用いて

$$\frac{1}{2}|\log(\mathrm{M},\ \mathrm{N};\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q})|$$

と定義します。
平行２直線間の距離は，一方側では 0 に近づき，他方側ではいくらでも大きくなります。非交２直線は，唯一の共通垂線をもち，それが両者の最短距離です。直線から等距離の点の軌跡は直線ではなく，**等距離線**と呼ばれる特別な曲線です。
双曲幾何学では，三角形の内心，重心は存在するが，外心，傍心，垂心は必ずしも存在しません。共線でない３点は必ずしも同一円周上にないが，円，等距離線，界線（同一方向に平行な直線族の直交截線）を総称した広義の円の上にのることが知られています。

5　最後に

すべての幾何がクラインの幾何の考え方によって統一されたかのように思われました。　しかし，リーマンが 1854 年に提唱した**多様体上の幾何学**（リーマン幾何学，微分幾何学）において，一般に n 次元リーマン多様体上に作用し，かつ計量を不変に保つような変換群は存在しません。よって，クライン幾何の枠の中には入らないものでした。カルタンはクライン幾何を発展させて**接続**の理論を考えだし，その思想を多様体上の幾何学の中に取り込みました。
そして，この多様体上の幾何学はその後発展をし，アインシュタインの一般相対性理論に大きな影響を及ぼしています。

一方，20 世紀初頭以来急速に発展してきた**位相幾何（トポロジー）**は，位相変換群が作用する空間と，その不変量を求めるという点で，クラインの幾何に分類されます。

射影幾何学の研究はその後あまり盛んではなくなり，今日ではすでに古典的なものとなっています。しかし 19 世紀にクラインが考えた幾何と群の関係の思想は大きな影響力を与え続け，例えば 3 次元多様体のサーストン予想などにも及んでいます。

6　まとめ

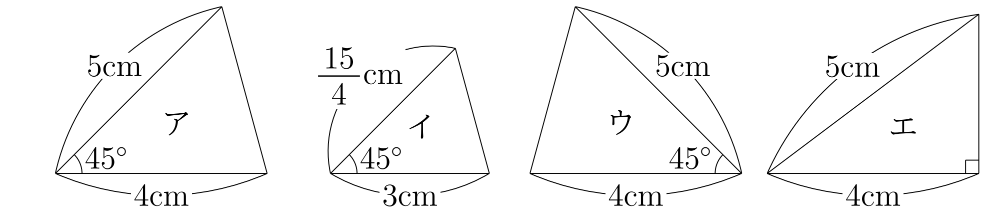
1. ユークリッド幾何学と異なるいろいろな幾何学が存在する。曲面上で幾何学を考えたり，無限遠点を加えて幾何学を考えたりする。

2. 幾何学を変換群を用いて分類することができる。変換群が大きいと不変量は少ない。変換群が小さいと不変量は増えてくる。（三角形，四角形，2 次曲線の分類など）

3. 射影幾何学はすべての幾何学を含む統一理論であった。合同幾何学（ユークリッド幾何学）から作った射影幾何学が，非ユークリッド幾何学を含むのは興味深い。

練習問題

1. 次の三角形について，下の問いに答えなさい。

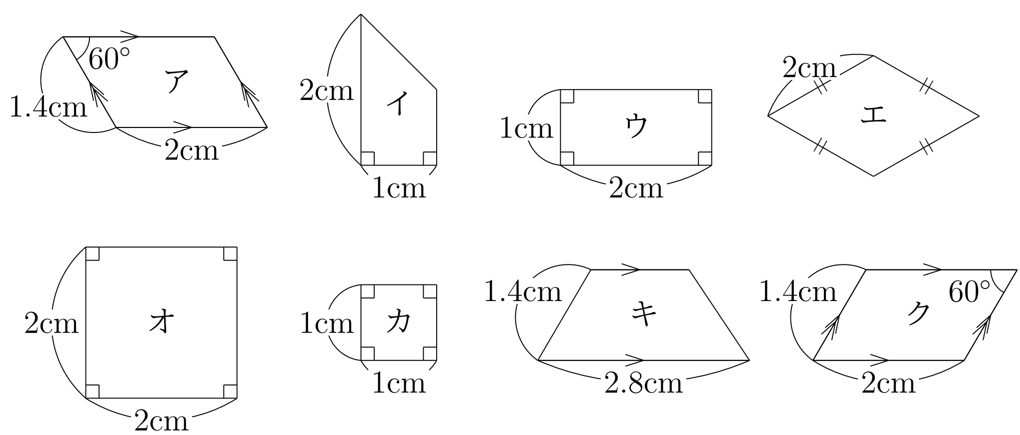


(1) 合同変換（等長変換）によってうつり合うのはどれとどれですか。

(2) 相似変換によってうつり合うのはどれとどれですか。

(3) アフィン変換によってうつり合うのはどれとどれですか。

2. 次の四角形について，下の問いに答えなさい。



(1) 合同変換（等長変換）によってうつり合うのはどれとどれですか。

(2) 相似変換によってうつり合うのはどれとどれですか。

(3) アフィン変換によってうつり合うのはどれとどれですか。

3. 複比

$$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$$

について，次の問いに答えなさい。

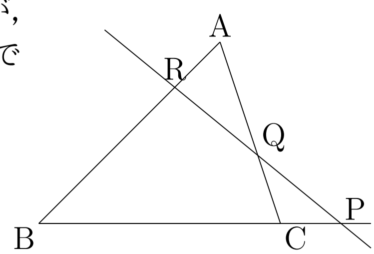
(1) A，B，C，D を並べかえて，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D})$ と値が同じになるものを 3 つあげなさい。

(2) A，B，C，D を並べかえると全部で $4! = 24$ 通りあります。(1) より 4 つずつが組になることがいえるので，並べかえによって変わる複比の値は 6 通りあることになります。$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = k$ とするとき，残りの 5 つを k を用いて表しなさい。

4. ベクトルを用いて，次の**メネラウスの定理**を証明しなさい。

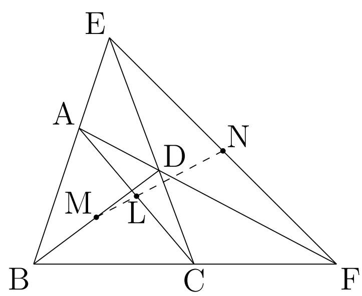
△ABC の 3 辺 BC，CA，AB，またはその延長が，頂点を通らない 1 つの直線とそれぞれ P，Q，R で交わるとき，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$



5. ベクトルを用いて，次の**ニュートンの定理**を証明しなさい。

対辺が平行でない四角形 ABCD の辺 AB，CD を延長した直線の交点を E，辺 BC，DA を延長した直線の交点を F とする。このとき，線分 AC，BD，EF の中点 L，M，N は同一直線上にある。



6. xyz 空間において $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ はどういった曲面を表しますか。

練習問題の解答

1\. (1) ア と ウ

(2) ア と イ と ウ

(3) ア と イ と ウ と エ （すべての三角形はアフィン変換でうつりあう）

2\. (1) ア と ク

(2) ア と ク，オ と カ

(3) ア と ウ と エ と オ と カ と ク，
イ と キ （アフィン変換は平行性のみ保存）

3\. (1) (B, A; D, C), (C, D; A, B), (D, C; B, A)
先頭が入れかわったものが 1 つずつ存在する。

(2) $\dfrac{1}{k},\ 1-k,\ 1-\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{1-k},\ \dfrac{k}{k-1}$

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{D},\ \mathrm{C}) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\overrightarrow{\mathrm{BD}}} = \dfrac{1}{k},$

複比は射影変換によって不変だから，$\mathrm{A} = \mathrm{P}_\infty$ とすると

$(\mathrm{A},\ \mathrm{C};\ \mathrm{B},\ \mathrm{D}) + (\mathrm{A},\ \mathrm{B};\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{\overrightarrow{\mathrm{CB}}} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = 1$

よって，$(\mathrm{A},\ \mathrm{C};\ \mathrm{B},\ \mathrm{D}) = 1-k$

残りはこれらの組み合わせによって出る。

$(\mathrm{A},\ \mathrm{C};\ \mathrm{D},\ \mathrm{B}) = \dfrac{1}{1-k},\ (\mathrm{A},\ \mathrm{D};\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}) = \dfrac{k}{k-1}$

$(\mathrm{A},\ \mathrm{D};\ \mathrm{C},\ \mathrm{B}) = 1 - \dfrac{1}{k}$

4\. $\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = s : 1$，$\mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = t : 1$，
$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = u : 1$ とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \dfrac{s}{s-1}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BR}} = \dfrac{1}{u+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}},$
$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \dfrac{1}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \dfrac{t}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\frac{1}{t+1} - \frac{s}{s-1}\right)\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{t}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = -\frac{s}{s-1}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{u+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

P，Q，R は一直線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が
成り立ち，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は一次独立だから，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{s}{s-1} = -k \cdot \dfrac{s}{s-1} \\ \dfrac{t}{t+1} = k \cdot \dfrac{1}{u+1} \end{cases}$$

2 式より k を消去して

$$\frac{1}{t+1} - \frac{s}{s-1} = -\frac{s}{s-1}\frac{t}{t+1}(u+1)$$
$$s-1-st-s = -stu-st$$
$$stu = 1$$

□

5. $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = s\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{BF}} = t\vec{b}$ と表せる。D は EC と AF の交点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = ks\vec{a} + (1-k)\vec{b} = \ell\vec{a} + (1-\ell)t\vec{b}$$

と表せる。$\vec{a},\ \vec{b}$ は一次独立だから，これを解いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{s-st}{1-st}\vec{a} + \frac{t-st}{1-st}\vec{b}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{BL}} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}), \quad \overrightarrow{\mathrm{BN}} = \frac{1}{2}(s\vec{a}+t\vec{b})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{s-st}{2(1-st)}\vec{a} + \frac{t-st}{2(1-st)}\vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \frac{1-s}{2(1-st)}\vec{a} + \frac{1-t}{2(1-st)}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \frac{s-1}{2}\vec{a} + \frac{t-1}{2}\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \dfrac{1}{st-1}\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ となり，L，M，N は一直線上にある。 □

6. 平面 $z=k$ で切ると $x^2+y^2=k^2$ より
半径 k の円
平面 $x=0$ で切ると $(y+z)(y-z)=0$ より，
2 直線 $z=\pm y$
平面 $y=0$ で切ると $(x+z)(x-z)=0$ より，
2 直線 $z=\pm x$
これらより右図のような**円錐面**であることが
分かる。