

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

2014 年度 数学科リレー講座  
「小さじ一杯から大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速直線運動

上野・上原・古田

2014 年 8 月 25 日

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

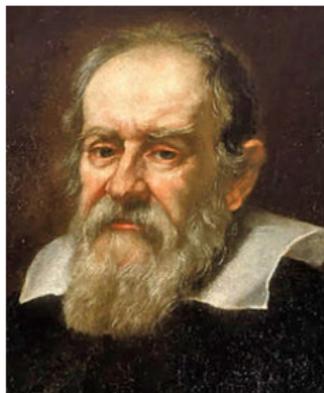
はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

# 宇宙は数学という 言語で書かれている



# 本日の流れ

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- はじめに
- 微積分入門
- 等速直線運動と微積分

# はじめに

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

## はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

## 微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

# ■ 微分方程式とは

# ■ 6 日間のダイジェスト

# 数理モデル

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## ■ 微分方程式は数理モデルの一種

### 数理モデル

現実世界の事象を，数式を用いてモデル化したもの

## ■ 数理モデルの目的

現象を理解（予測）すること！

# 数理モデルの例

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 例 買い物モデル

たかし君の家に 9 人客がくる。たかし君はお母さんから 3000 円渡され、「すべて使い切るように」という注意の下、ケーキ屋におつかいを頼まれた。そのケーキ屋には 1 個 300 円のショートケーキと 1 個 400 円のモンブランがあった。さて、たかし君はショートケーキとモンブランを何個ずつ買ってゆけばいいだろうか？

**代数方程式では応用範囲が狭い！**

# より多くの現象を理解するためには

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 時間や空間をモデル化の際に組み込めば、時間を早送り・巻き戻ししたり、空間を飛び回るといったことが自由自在にできる。

時間や空間を組み込んだ数理モデル

||

微分方程式！

# 現象理解の枠組み

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 現象の理解のためには，変化の様子を調べる必要がある

## 現象理解の枠組み 1

とりあえず部分を調べて，各部分がつかめてきたら，それらを積み重ねて全体の変化の様子を調べる．

# 局所と大局

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 局所と大局（キーワード）

局所：短い時間の変化（捉えやすい）

大局：長い時間の変化（捉えにくい）

## 現象理解の枠組み 2

現象の捉えやすい「局所」をまず調べ、それらを積み重ねて「大局」を調べる。

# 微分方程式とは

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

## 微分方程式

局所に関する法則性が見つかったとき、それを数式で表現したもの

- 物理法則の多くが局所的な法則で書かれる  
例 水や空気の運動を記述するナビエ-ストークス方程式
- どのような効果を取り入れるかは自由  
例 表面張力

# 微分方程式を解くとは

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

微分方程式を解くとは、

局所に関する法則性を基に  
大局に関する法則性を知ること

「小さじ一杯から大鍋の味を知る」

- 局所がわかったとしても、そこからいつも大局が理解できるとは限らない！

例 地面は平ら，地球は球体

# 初日・2日目

2014年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- **微分**とは？**積分**とは？
- **等速**で動く物体の運動を微積分を用いて解析
- **加速度（例えば重力）**が働く場合の物体の運動を微積分を用いて解析
- 簡単な関数を微分・積分してみる

# 3・4日目

2014年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 落下運動をより現実的にするとどうなるか？
- 空気抵抗
- 新しい関数を導入する必要がある
- 簡単な微分方程式を解いてみる

# 5 日目

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 物理モデル以外にも微分方程式を応用
- **人口モデル**
- マルサスのモデル：人口爆発!?
- ヴェアフルストのモデル：人口飽和

# 6 日目

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- タコマ橋の崩壊の数学解析
- 振動モデル  $\iff$  三角関数
- **共鳴**を数学的に解析する
- 2 階の微分方程式を解く

# まとめ

2014年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 1 微分方程式は現象を理解するための道具
- 2 現象を理解するための第一歩は，とりあえず部分を調べてみることに
- 3 局所（短い時間の変化）と大局（長い時間の変化）
- 4 微分方程式とは，局所に関する法則性が見つかったときそれを数式で表現したもの
- 5 微分方程式を解くとは，局所に関する法則性を基に大局に関する法則性を知ること

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

# 微積分入門

# クイズ

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- Q. プロ野球選手の投球を研究したい。あなたならどうする？
- A. ビデオ撮影して、**スローモーション**で確認する。

# 微分のイメージ

2014年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

## ■ 微分

「微」かに「分」ける

イメージ：スローモーション，拡大

複雑なものも理解できる！

## ■ 例 曲線

# 積分のイメージ

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- スローモーションにしたり拡大したら細部はわかるけれど、全容はわからなくなるのでは？
- 積分  
「分」けたものを「積」み重ねる

# やること

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

■ 正比例関数

■ 微分

■ 積分

# 関数とは

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

## 関数

数学的：変数同士の関係

物理的：物理量同士を結びつける法則

- 特に、変数  $x$  を与えると変数  $y$  がただ 1 つに決まるとき、

$$y = f(x)$$

と書く。

- 横軸が  $x$  の値，縦軸が  $y$  の値となっている方眼紙 ( $xy$  平面) に点を取ってゆけば，図形が出来上がる。これをグラフという。

# 関数の例 1

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 1 個 100 円のリンゴを  $x$  個買ったときの値段  $y$  は,

$$y = 100x$$

- この場合の  $f$  は,

$x$  に 100 を掛ければ  $y$  になるという  
 $x$  と  $y$  の関係

## 関数の例 2

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 時速 40km の車が  $t$  時間で進む距離  $d$ km は,

$$d = 40t$$

- この場合の  $f$  は,

- 1  $t$  に 40 を掛ければ  $d$  になるという  $t$  と  $d$  の関係
- 2 速度が与えられているときの  
時間と距離を結びつける法則

# 正比例関数とは

2014年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」

初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 正比例関数

数  $k$  が与えられたとき、「 $x$  に  $k$  を掛けると  $y$  になるという、 $x$  と  $y$  の関係」を正比例関数といい、 $k$  を比例定数という。

- 正比例関数を式で書けば、

$$y = kx$$

- 前述の関数の例はどちらとも正比例関数

# 正比例関数と直線

2014年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 正比例関数は図形的には直線で表現できる
- 座標平面で考えれば、原点を通る直線
- これを考慮して、比例定数  $k$  は「傾き」ともいう
- 正比例関数は変化の割合が一定

非常に単純でわかりやすい関数

# 微分

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 微分の目的  
関数の局所（短い時間の変化）を知ること

局所だけでも  
いろいろなことがわかるから嬉しい！

- 例 関数の増減，凹凸

# 近似とは

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

## 近似

細部を無視して，単純なものに置き換えること

- 例 1  
税抜き 4.980 円のゲームは，税込でいくらになるか？
- 例 2  
平地に家を建てる時，平らであるとみなしても構わない

# 微分するとは①

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 微分する①

与えられた関数の局所を正比例関数で近似すること

- 「与えられた関数の短い時間の変化を直線とみなしてしまうこと」

正比例関数の変化は単純であったから  
近似が可能であれば未知の関数であっても  
その変化の解析はとても見通しよくなる！

# 究極の局所

2014年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 時間の範囲が短ければ短いほど変化がわかりやすい
- 究極の局所は、瞬間
- 図形的には、接線

# 接線

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

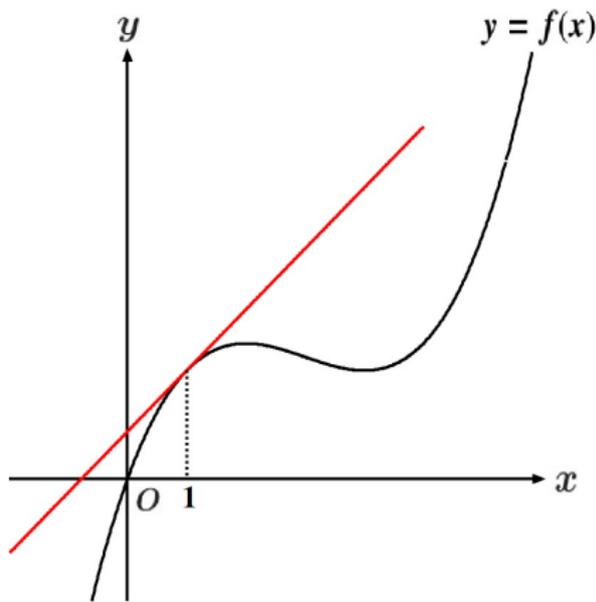
微積分入門

正比例関数

微分

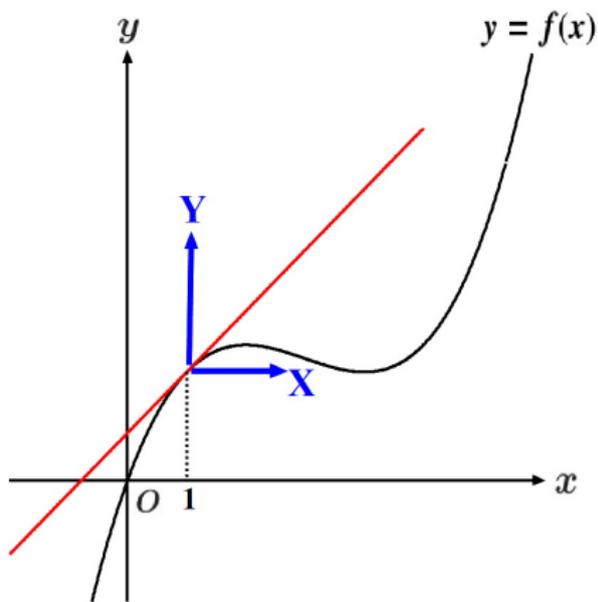
積分

参考文献



- **赤い直線** :  $x = 1$  における  $y = f(x)$  の**接線**  
正比例関数ではない...

# 正比例関数の決め方



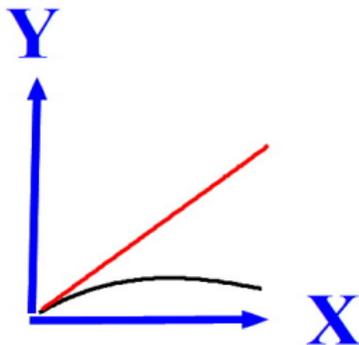
- 接点を原点にして新しい座標軸を考える

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

# 正比例関数の決め方

## ■ 接線の傾きを $k$ とすると...



## ■ 接線 : $Y = kX$

ある点での接線の傾きがわかれば  
その点を原点にした座標を考慮することで  
正比例関数が決まる！

2014年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6日間のダイジェスト  
微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

# 微分するとは②

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 微分する②

$y = f(x)$  の各点での接線の傾きを求めること

### ■ 微分係数

特に、 $x = a$  での接線の傾きを、 $x = a$  における  $f(x)$  の微分係数という

# 接線を集める

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 導関数

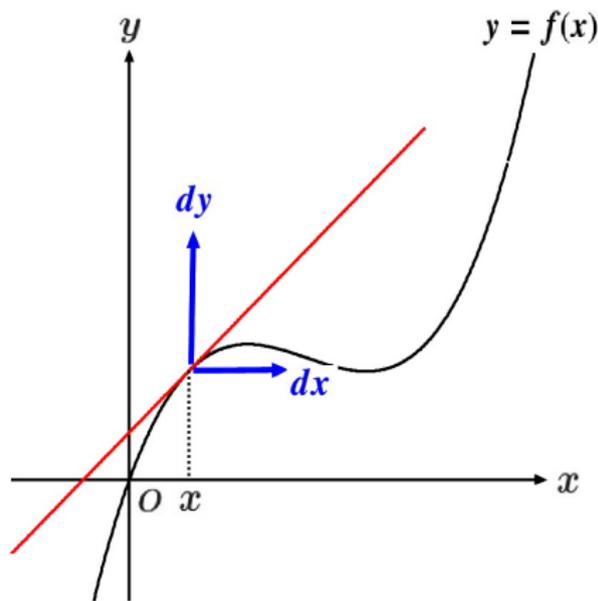
$x$  が決まると、 $f(x)$  の微分係数がただ 1 つに決まる。この  $x$  と「 $f(x)$  の微分係数」の関係を  $f(x)$  の導関数という。

### ■ 導関数のイメージ

各点の接線の傾きをすべて集めたもの

導関数を調べることで、すべての点における接線の傾きがわかるから、結果として関数全体の変化の様子がわかることになる！

# おまけ ( $dx, dy$ の意味)



■  $dy = f'(x)dx$

■ 動座標  $dx, dy$  を  $x, y$  の「微分」という.

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

# 積分

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 積分のイメージ  
小さいものを積み重ねる
- 「小さいもの」として小さい長方形を考えれば、面積がわかる！
- 歴史的にも、積分は面積からスタートした。

# 積分するとは

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」

初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

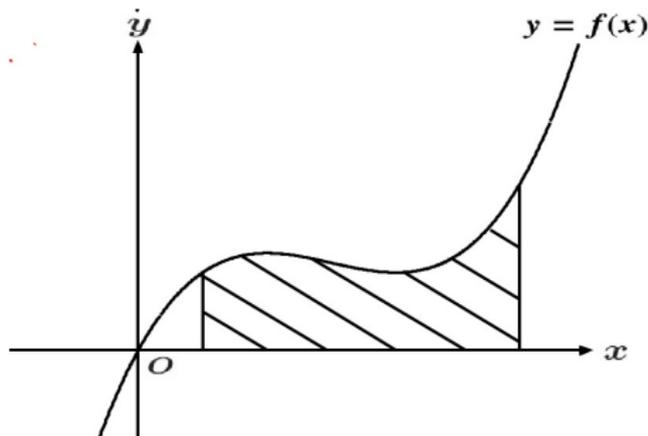
微分

積分

参考文献

## 積分する

ある区間で関数  $y = f(x)$  を積分するとは、「その区間， $y = f(x)$ ， $x$  軸で囲まれた領域」の面積を求めることである。



# 復習

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動  
上野・上原・古田

はじめに  
微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門  
正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

- 関数とは：物理量を結びつける法則
- 導関数とは：局所を集めた関数
- 微分方程式とは
  - 1 局所に関する法則性が見つかったとき、それを数式で表現したもの
  - 2 ある関数の導関数を数式で表現したもの
- 微分方程式を解くとは
  - 1 局所に関する法則性を基に、大局に関する法則性を知ること
  - 2 ある関数の導関数が与えられているとき、元の関数を知ること

# 微積分学の基本定理

2014年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

## 微積分学の基本定理

ある関数の導関数を積分すると、元の関数に戻る。ただし、定数差は除く。

積分を行うことで  
微分方程式が解ける！

- 常に積分ができるとは限らない

# まとめ

2014 年度 数学科  
リレー講座

「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」

初日

微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数

微分

積分

参考文献

- 微分するとは、与えられた関数の短い時間の変化を直線とみなしてしまうこと（イメージ：拡大）。具体的には、接線の傾きを求めればよい。
- 積分するとは、面積を求めること（イメージ：小さいものを積み重ねる）。
- 微分した関数を積分すると元に戻る。すなわち、微分方程式は積分することで解ける。

# 参考文献

2014 年度 数学科  
リレー講座  
「小さじ一杯から  
大鍋の味を知る」  
初日  
微分方程式と等速  
直線運動

上野・上原・古田

はじめに

微分方程式とは  
6 日間のダイジェスト

微積分入門

正比例関数  
微分  
積分  
参考文献

[1] 青木憲二, 経済と金融の数理, 朝倉書店, 2003.

[2] 森毅, 現代の古典解析, ちくま学芸文庫, 2006.