平成 26 年度　数学科夏期リレー講座「小さじ一杯から大鍋の味を知る」

2日目「加速度と初期条件から位置を知る」

天野利一・柴山太郎

目次

もとのレジュメに手書きで答えや補足を書き加えました。読みづらい部分があるかもしれませんがご了承下さい。

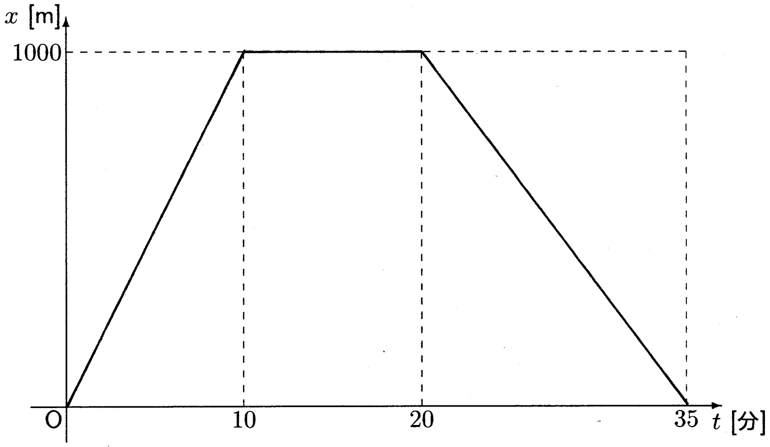
§ 1　微分と積分

1.1　関数

変数 x を与えると変数 y がただ 1 つに決まるとき，**y は x の関数であるといい，** $y = f(x)$ などと書きます．

$\boxed{\text{問 1}}$ A 君は，家と家から 1000 m 離れた公園の間を往復しました．A 君は 9:00 に家を出発し，9:10 に公園に着きました．公園で 10 分休んだあと，15 分かけて家まで帰りました．

x を家からの距離，t を家を出発してからかかった時間として，x と t の関係を次のグラフに表してみましょう．

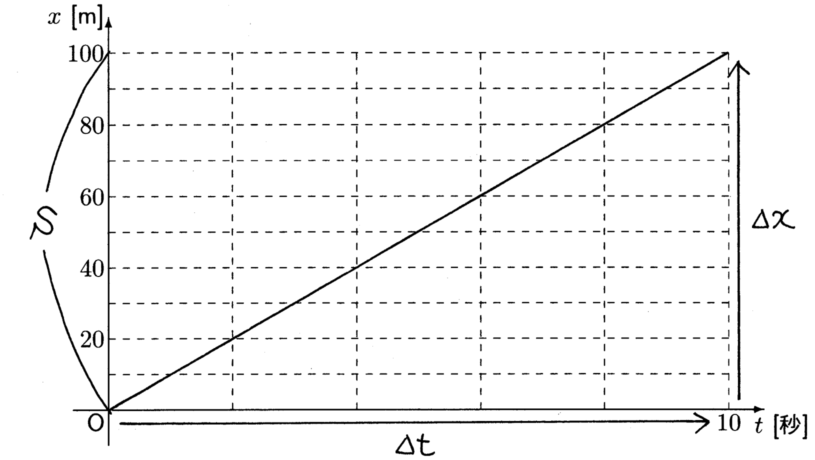


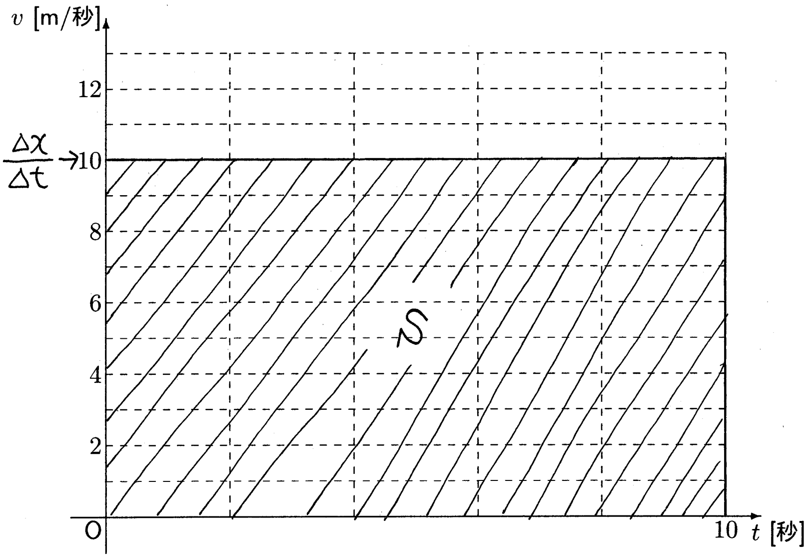
小学校のときにやったダイヤグラムです．$\boxed{\text{問 1}}$で，x は t の関数になっています．

1.2　位置と速度の関係

$\boxed{\text{問 2}}$　ある陸上選手 B が 100 m を走ったところ，10.00 秒で走ることができました．

x をスタート地点からの距離，v を速度，t をスタートしてからかかった時間として，x と t，v と t の関係をそれぞれ次のグラフに表してみましょう．





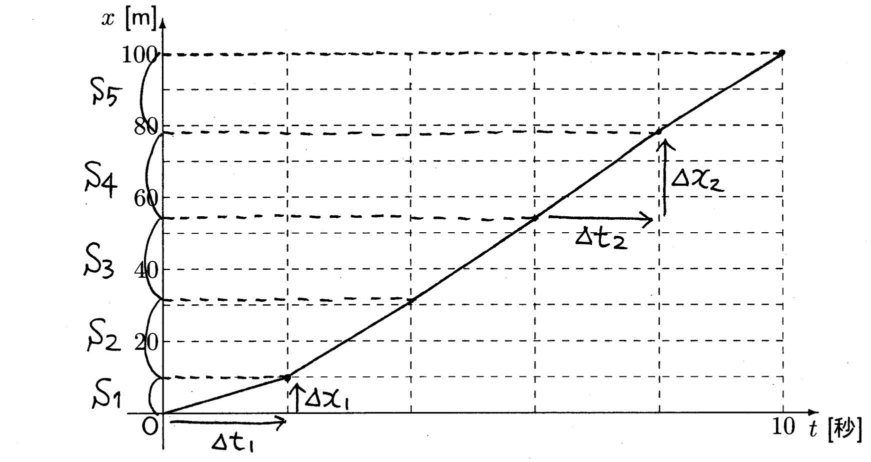
実際にこの選手は同じ速さで走り続けているのでしょうか・・・

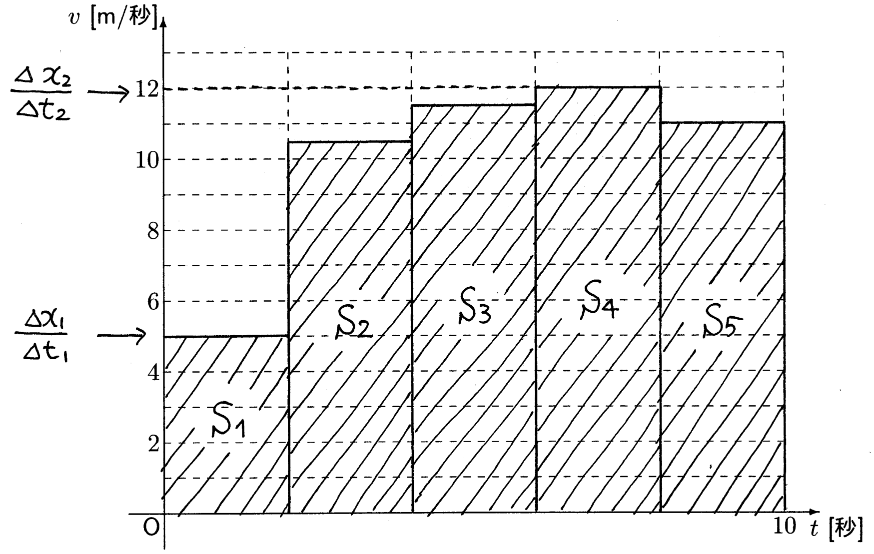
問3 ある陸上選手Bが 100 m を走ったところ，10.00 秒で走ることができました．実はこの選手のラップタイムは次の表のようになっていました．

t（かかった時間）	x（走った距離）	
0.00 秒	0 m	
2.00 秒	10 m	①
4.00 秒	31 m	②
6.00 秒	54 m	③
8.00 秒	78 m	④
10.00 秒	100 m	⑤

xをスタート地点からの距離，vを速度，tをスタートしてからかかった時間として，xとt，vとtの関係をそれぞれ次のページのグラフに表してみましょう．

	距離	時間	速度
①	10m	2s	5 m/s
②	21 m	2s	10.5 m/s
③	23 m	2s	11.5 m/s
④	24 m	2s	12 m/s
⑤	22 m	2s	11 m/s
	Δx	Δt	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$

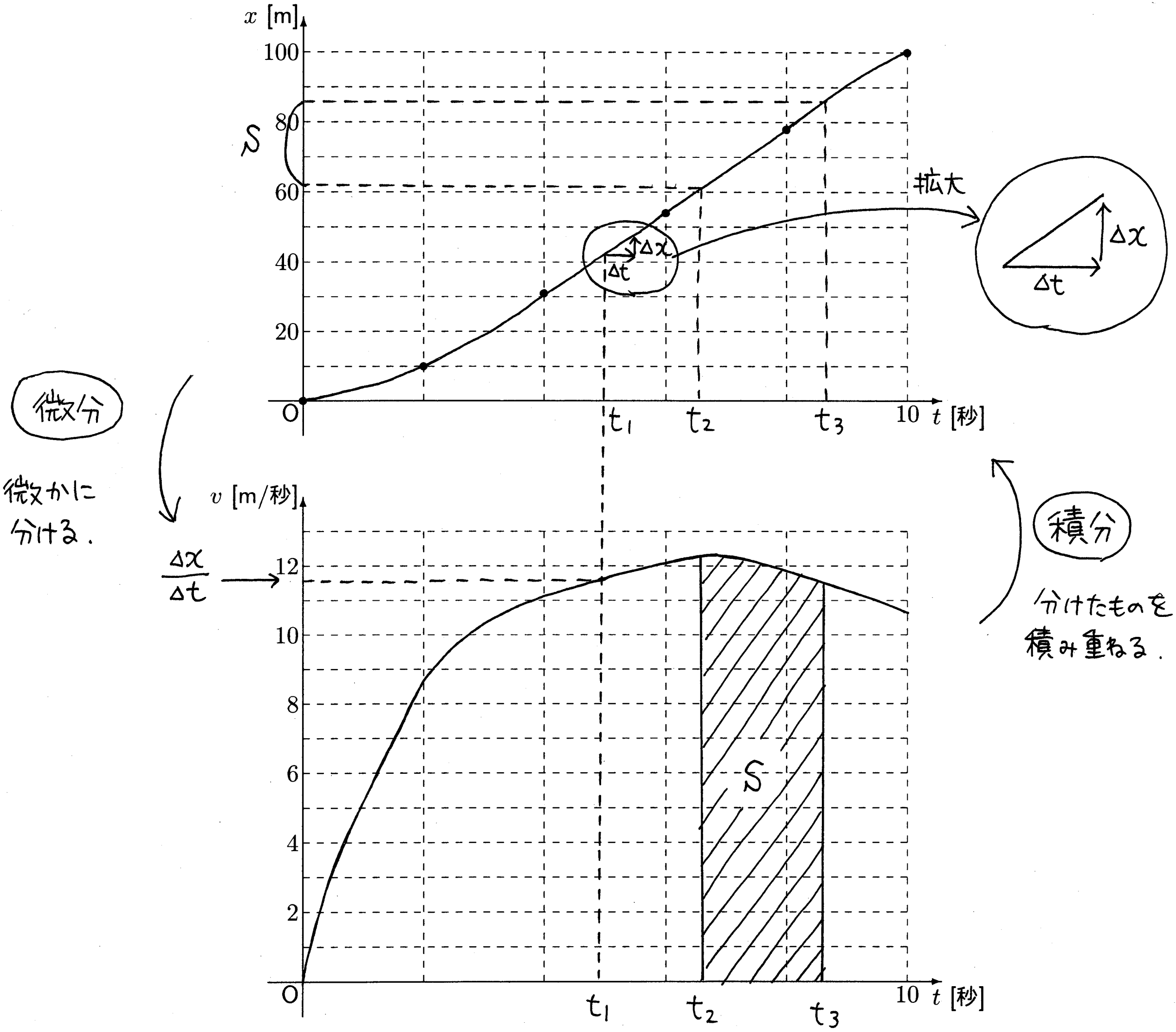




$\boxed{問2}$よりも少しだけ正確なグラフになりましたね．もっとこまぎれにするともっと正確なグラフになりそうです．

$\boxed{\text{問 4}}$ ある陸上選手 B が 100 m を走ったところ，10.00 秒で走ることができました．

x をスタート地点からの距離，v を速度，t をスタートしてからかかった時間として，x と t，v と t の関係をそれぞれグラフに正確に表すとどのようになりそうですか．前の問を踏まえて予想し，フリーハンドでかいてみましょう．



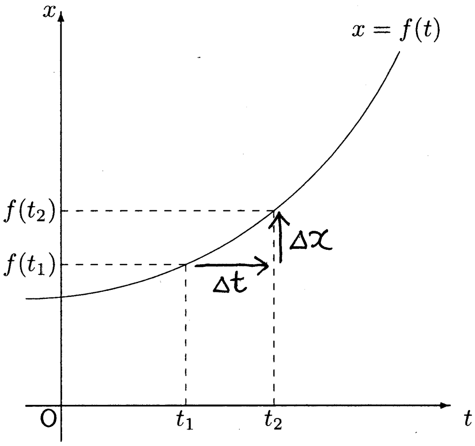
t_1, t_2, t_3 をどこにとっても上のような関係になっている．

このグラフに関しても $\boxed{\text{問 2}}$，$\boxed{\text{問 3}}$ で考察したことは成り立っているのです！

1.3　微分とは

$\boxed{\text{定義}}$（微分する）

前の例のように瞬間的な速度を求めることを考えてみます．



t が t_1 から t_2 まで変化したときの x の変化量を Δx，t の変化量を Δt とすると，

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であったのだから，①の式において，t_2 を限りなく t_1 に近づけたものが $t = t_1$ での瞬間速度であると考えられます．これを，$t = t_1$ における $f(t)$ の**微分係数**といいます．これは，$t = t_1$ における $x = f(t)$ の接線の傾きと一致します．

$x = f(t)$ の各点に対し，微分係数はただ 1 つに決まるので，「$f(t)$ の微分係数」は t の関数になっています．この関数を x の**導関数**といい，$\dfrac{dx}{dt}$ と表します．導関数を求めることを**微分する**といいます．

$\boxed{\text{問 5}}$ 次の関数を t で微分しなさい．

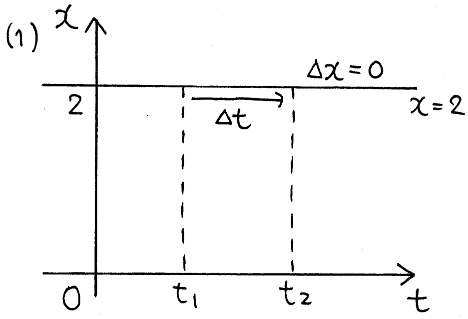
(1) $x = 2$

(2) $x = 3t$

(3) $x = t^2$

$\boxed{\text{ヒント}}$ $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

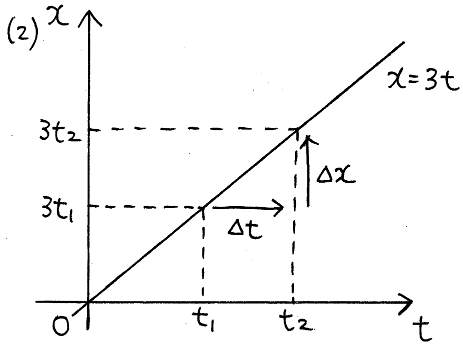
(1)



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2-2}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 0 \quad /\!/$$

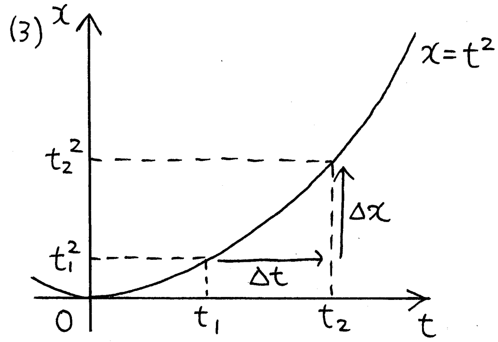
(2)



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3t_2 - 3t_1}{t_2 - t_1} = \frac{3\cancel{(t_2 - t_1)}}{\cancel{t_2 - t_1}} = 3$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 3 \quad /\!/$$

(3)



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{(t_2 + t_1)\cancel{(t_2 - t_1)}}{\cancel{t_2 - t_1}}$$

$$= t_2 + t_1$$

t_2 を t_1 に近づけると，これは $t_1 + t_1$

つまり，$2t_1$ になる．

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2t \quad /\!/$$

★同じように計算すれば，次の公式が導かれます．

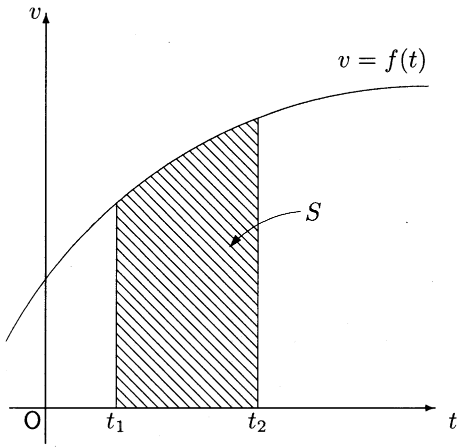
2 次式の微分の公式

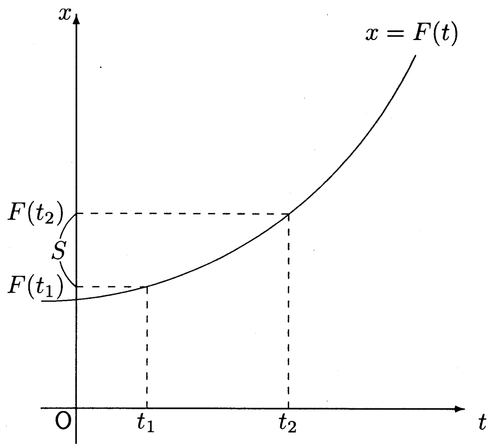
$x = at^2 + bt + c$（a, b, c は定数）のとき，$\dfrac{dx}{dt} = 2at + b$

1.4　積分とは

$\boxed{\text{定義}}$（積分する）

任意に t_1, t_2 をとってきたときに（ただし $t_1 < t_2$ とする），下図の斜線部分の面積を S として，$F(t_2) - F(t_1) = S$ となるような関数 $F(t)$ を $f(t)$ の**原始関数**という．



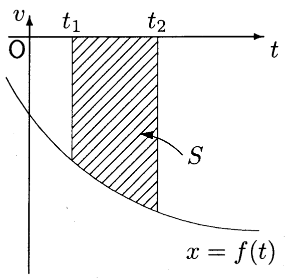


原始関数を求めることを**積分する**といいます．

※ 原始関数は1つに定まるとは限りません

一般に面積は陸上選手 B の例のようにこまぎれにして長方形の面積をたしあわせることで求めますが，今日は小学生でも面積を求められる簡単なもの（三角形と四角形）しか扱いません．

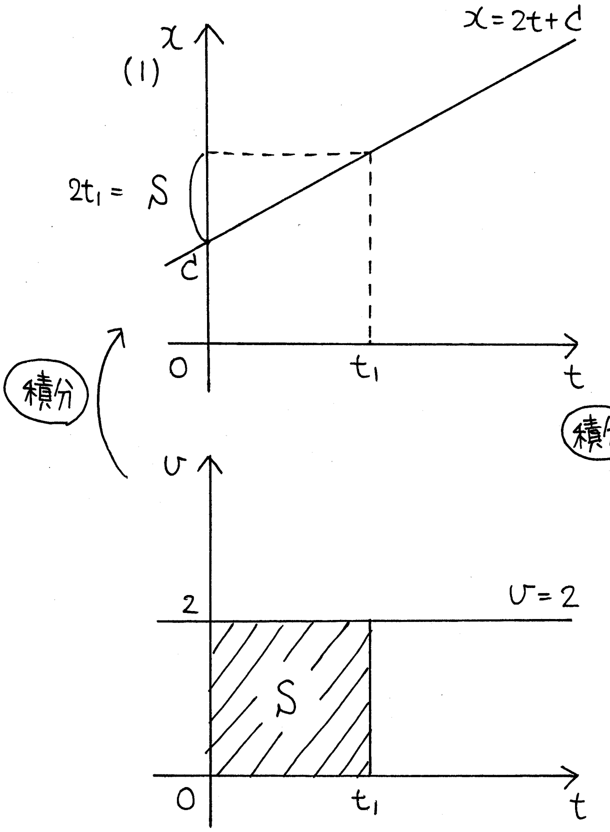
また上の定義で，下図のような t 軸よりも下にある面積はマイナスとしています．

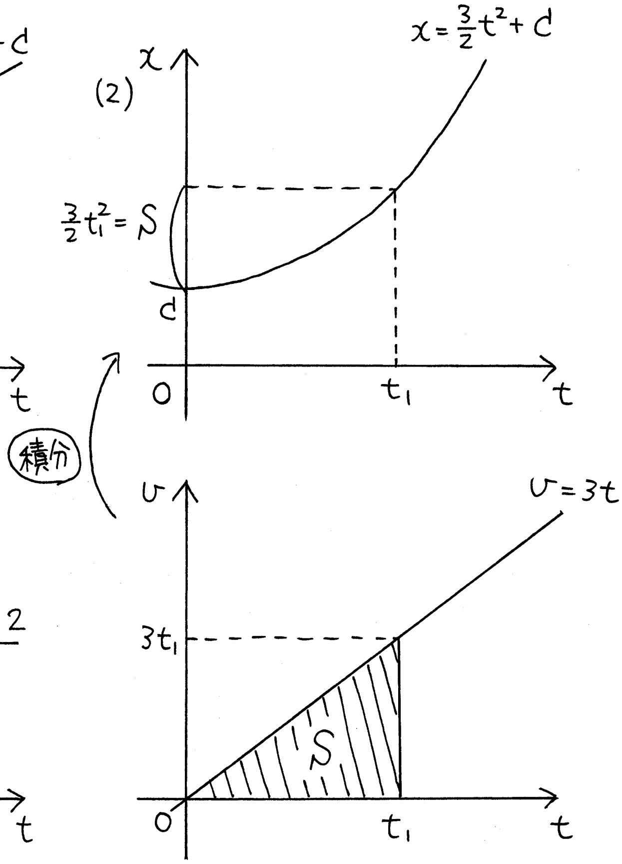


$\boxed{\text{問 6}}$　次の関数を t で積分しなさい．

(1)　$v = 2$

(2)　$v = 3t$





$S = (\text{タテ}) \times (\text{ヨコ})$
$\quad = 2 \times t_1$
$\quad = 2t_1$

つまり，原始関数は，

$\underline{2t + C \quad (C\text{は積分定数})}$ //

$S = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{2}$
$\quad = t_1 \times 3t_1 \times \frac{1}{2}$
$\quad = \frac{3}{2}t_1^2$

つまり，原始関数は

$\underline{\frac{3}{2}t^2 + C \quad (C\text{は積分定数})}$ //

★同じように計算すれば，次の公式が導かれます．

1 次式の積分の公式

$v = at + b$（a, b は定数）の原始関数は，$\dfrac{1}{2}at^2 + bt + C$（$C$ は積分定数）

1.5　微積分学の基本定理

微分法と積分法は歴史的には全く別のものとして発展していきましたが，あるとき次の定理が発見されました．

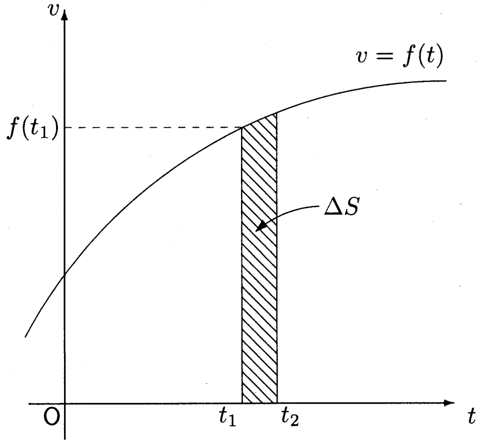
微積分学の基本定理

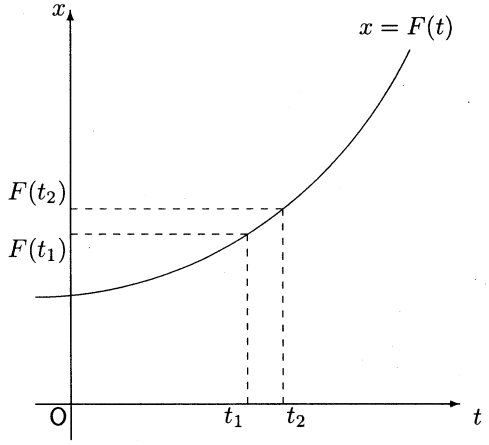
ある関数の原始関数を微分するともとの関数に戻る．

この定理の主張は，「微分と積分は互いに逆の演算である」ということです．

陸上選手 B の例を見てきたので具体例はわかったと思いますが，少しだけ一般的に考えてみましょう．

t が t_1 から t_2 まで変化したときの図の斜線部分の面積を ΔS，t の変化量を Δt とします．





もし Δt が微小のとき，図の斜線部分は長方形とみなすことができます．よって，

$$\Delta S = f(t_1) \times \Delta t \qquad \cdots\cdots ②$$

また，$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とし，$F(t)$ の導関数を $F'(t)$ とします．もし Δt が微小のとき，導関数の定義から

$$F'(t_1) = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \cdots\cdots ③$$

②,③より，任意の t_1 について

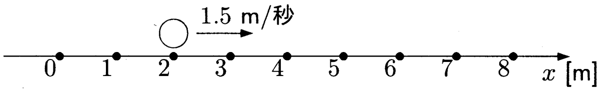
$$f(t_1) = F'(t_1)$$

が言えます．F' はまさに f の原始関数の導関数ですから，この定理の主張そのものの式です．

§ 2　位置・速度・加速度の関係

2.1　等速直線運動（小学校の復習）

$\boxed{\text{問 7}}$　下図のような平らなレールの $x = 2$ の位置から，球を初速度 1.5 m/秒でころがしたときの速度と時間の関係をグラフに表すと，右のようになりました．t 秒後の球の位置を x として，x を t の式で表しなさい．



$\boxed{\text{小学生の解き方}}$

$$x = \underbrace{1.5}_{\text{速度}} \times \underbrace{t}_{\text{時間}} + 2$$

$\therefore\ x = \dfrac{3}{2}t + 2$　…（答）

$\boxed{\text{微分方程式として}}$

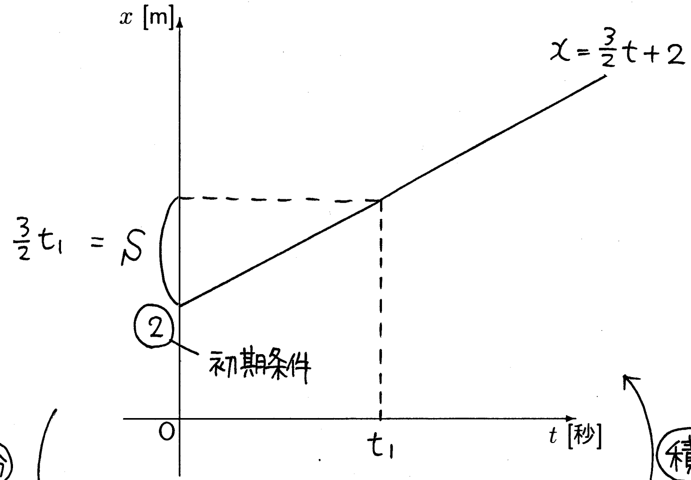
$v = \dfrac{dx}{dt}$ であるから，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{2}$ を t で積分して x を求める．

$\therefore\ x = \dfrac{3}{2}t + C$　（C は積分定数）

$t = 0$ のとき $x = 2$ であるから，$C = 2$

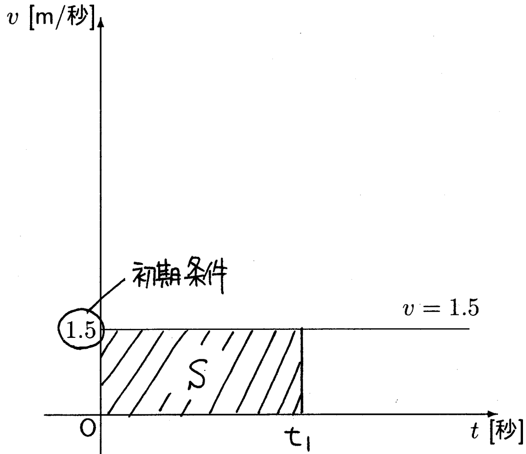
$\therefore\ x = \dfrac{3}{2}t + 2$　…（答）

〔位置と時間の関係〕



微分　　積分

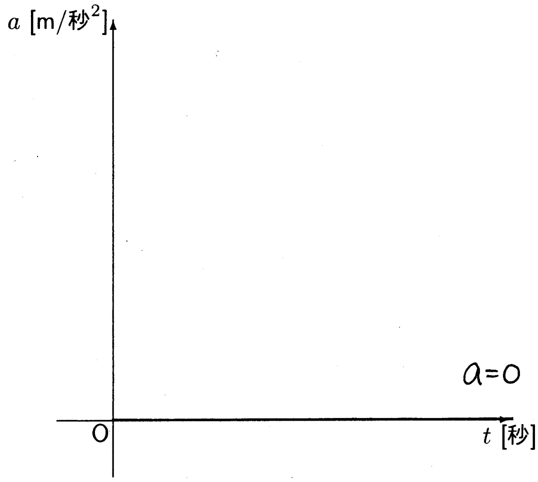
〔速度と時間の関係〕



$$S = (\text{タテ}) \times (\text{ヨコ})$$
$$= \frac{3}{2} \times t_1$$
$$= \frac{3}{2} t_1$$

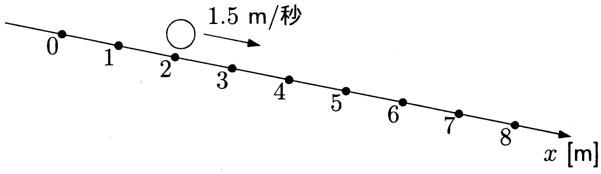
微分　　積分

〔加速度と時間の関係〕



2.2　等加速度直線運動

$\boxed{\text{問 8}}$　下図のような傾いたレールの $x=2$ の位置から，球を初速度 1.5 m/秒でころがしたときの速度と時間の関係をグラフに表すと，右のようになりました．t 秒後の球の位置を x として，x を t の式で表しなさい．



小学生にはできない...

$\boxed{\text{微分方程式として}}$

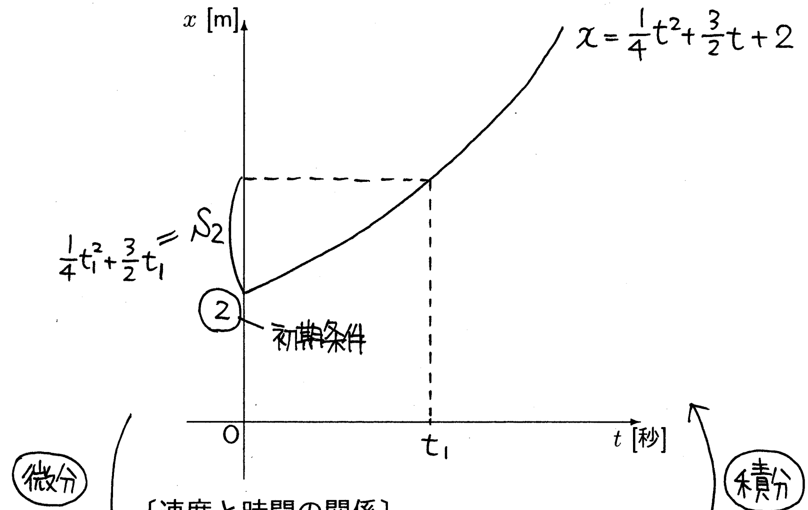
$v = \dfrac{dx}{dt}$ であるから，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{2}$ を t で積分して x を求める．

$\therefore\ x = \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{2}t + C$　（C は積分定数）

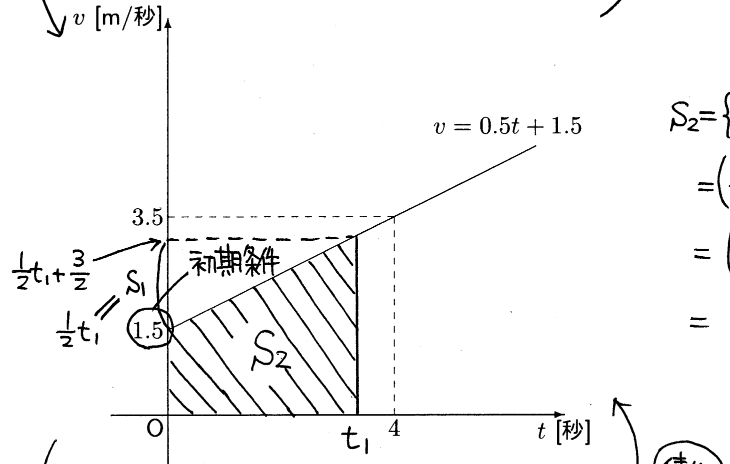
$t=0$ のとき $x=2$ であるから，$C=2$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{2}t + 2$ ...（答）

〔位置と時間の関係〕

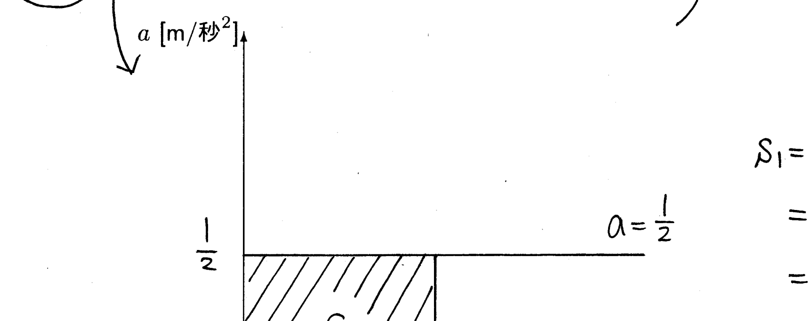


〔速度と時間の関係〕



$$S_2 = \{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$$
$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{3}{2}\right) \times t_1 \times \frac{1}{2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}t_1 + 3\right) \times t_1 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}t_1^2 + \frac{3}{2}t_1$$

〔加速度と時間の関係〕



$$S_1 = (\text{タテ}) \times (\text{ヨコ})$$
$$= \frac{1}{2} \times t_1$$
$$= \frac{1}{2}t_1$$

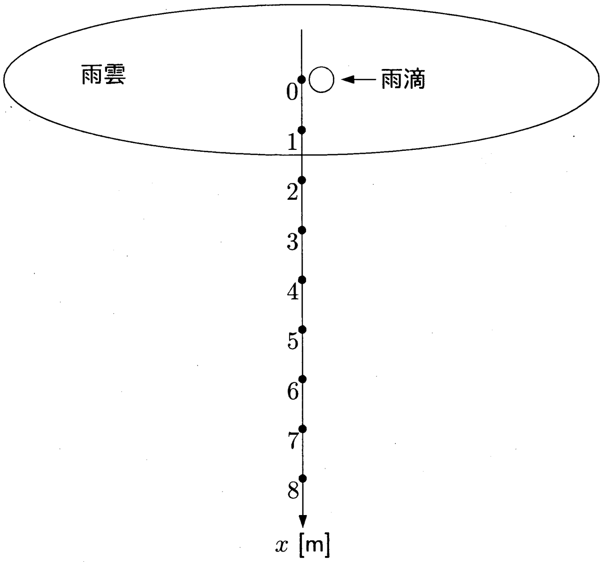
$\boxed{\text{問7}}$，$\boxed{\text{問8}}$ では速度と初期条件から位置を求めたが，加速度と初期条件からも求められるはずである．→ $\boxed{\text{問9}}$

§ 3　問題演習

物体が落下するときの加速度は**重力加速度**と呼ばれます．重力加速度は，重力を意味する英語「gravity」の頭文字をとって g で表されます．この値は一定で約 9.8 m/秒^2 です．

$\boxed{\text{問 9}}$　（自由落下）

ここは雨雲の中です．



(1)　上図の $x=0$ の位置から，雨滴を落としたときの t 秒後の球の位置を x として，x を t の式で表しなさい．ただし，加速度は一定で 9.8 m/秒^2 とします．

(2)　1000 m 下の地上に達する直前の速度を求めなさい．

(1)　$\dfrac{dv}{dt} = 9.8$　より，　$v = 9.8t + c_1$　（c_1 は積分定数）

$t=0$ のとき，$v=0$ であるから，　$c_1 = 0$　　$\therefore\ v = 9.8t$

$\dfrac{dx}{dt} = 9.8t$　より，　$x = 4.9t^2 + c_2$　（c_2 は積分定数）

$t=0$ のとき，$x=0$ であるから　$c_2 = 0$　　$\therefore\ \underline{x = 4.9t^2}$　…（答）

(2)　$1000 = 4.9t^2$

$\therefore\ t^2 = \left(\dfrac{100}{7}\right)^2$

$\therefore\ t = \dfrac{100}{7}$　$(\because t>0)$

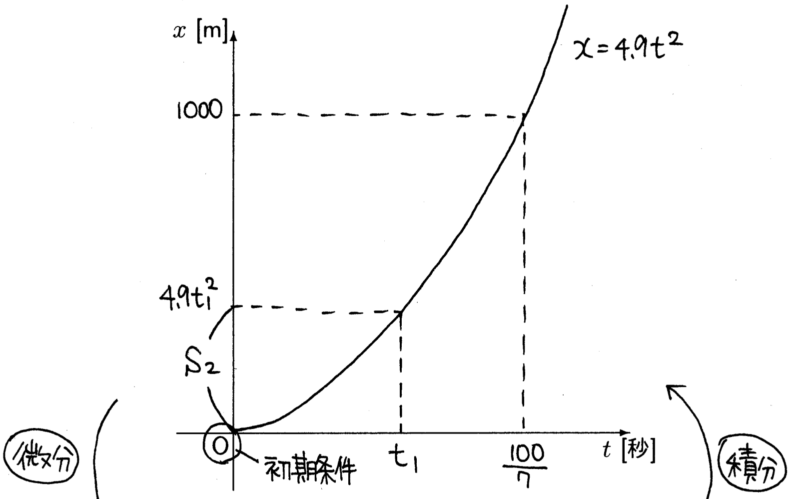
よって　$v = 9.8 \times \dfrac{100}{7}$

$\therefore\ v = 140$

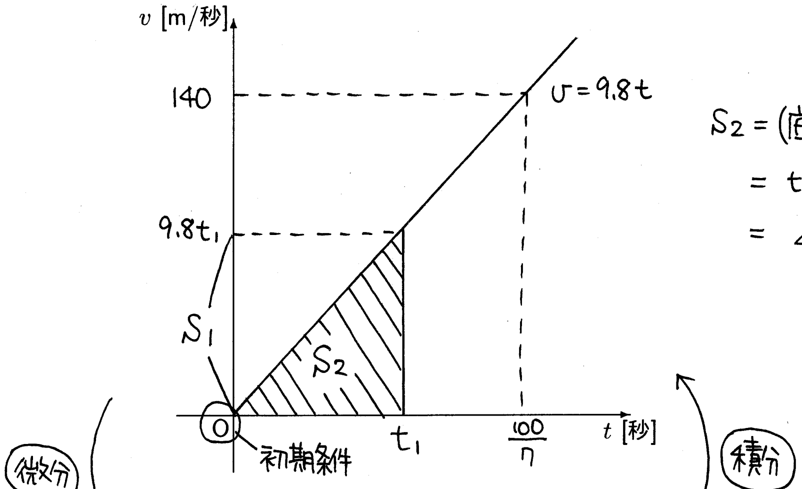
$\underline{140\ \text{m/s}}$　…（答）

答えが出たらどれぐらい速いのか想像してみましょう．

〔位置と時間の関係〕



〔速度と時間の関係〕

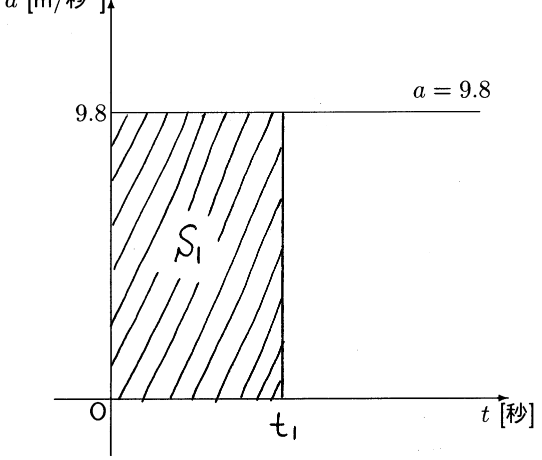


$S_2 = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{2}$

$= t_1 \times 9.8t_1 \times \frac{1}{2}$

$= 4.9t_1^2$

〔加速度と時間の関係〕



$S_1 = (\text{タテ}) \times (\text{ヨコ})$

$= 9.8 \times t_1$

$= 9.8t_1$

140m/s の雨が降ってきたら非常に危険です。実際は空気抵抗があるので、もっと遅いのです。
そういう場合の解析を3日目以降学んでいきます。

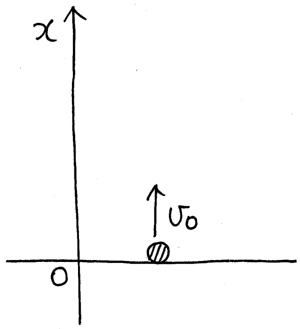
これ以降の問題は，万が一時間があればやりたいと思います．

物理の問題集にあるような問題を，公式に頼らず積分だけで解いてみましょう．積分の威力を思い知ってください．

$\boxed{\text{問 10}}$ （鉛直投げ上げ）

地面から，速さ v_0 m/秒で鉛直上向きに球を投げ上げました．球が再び地面に落ちてくるまでの時間と，そのときの速度を求めなさい．ただし，重力加速度は g m/秒^2 とします．

これ以降，加速度を x''，速度を x'，位置を x と書くことにします．



$$\begin{cases} x'' = -g & \cdots ① \\ x' = -gt + v_0 & \cdots ② \\ x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t & \cdots ③ \end{cases}$$

積分

積分

③より，$x=0$ となる時間を求める．

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$0 = -t\left(\frac{1}{2}gt - v_0\right)$$

$$\therefore \quad t = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}gt - v_0 = 0$$

$$\therefore \quad t = 0 \quad \text{or} \quad t = \frac{2v_0}{g}$$

球が再び地面に落ちてくる時間は，0でないので，$\underline{\dfrac{2v_0}{g}}$ //　…（答）

②より，このときの速度を求める．

$$x' = -g \cdot \frac{2v_0}{g} + v_0$$

$$= -2v_0 + v_0$$

$$= -v_0$$

よって求めるものは $\underline{-v_0}$ //　…（答）

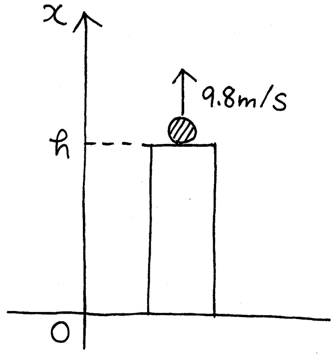
これは同じ速さで下向きに落ちてくることを意味しています．

問 11 ある高さのビルの屋上から，上向きに速さ 9.8 m/秒で球を投げ上げたところ，3 秒後に地面に達しました．重力加速度の大きさを 9.8 m/秒^2 として次の問いに答えなさい．

(1) 球を投げ上げてから最高点に達するまでの時間と，屋上から最高点までの高さを求めなさい．

(2) 球が地面に達する直前の速さを求めなさい．

(3) 地面からビルの高さを求めなさい．



ビルの高さを h m とし，左のように座標をとる．

$$\begin{cases} x'' = -9.8 & \cdots ① \\ x' = -9.8t + 9.8 & \cdots ② \\ x = -4.9t^2 + 9.8t + h & \cdots ③ \end{cases}$$

積分

積分

(1) ②より，$x' = 0$ となる時間を求める．

$0 = -9.8t + 9.8$

$\therefore\ t = 1$

③より，このときの球の位置を求める．

$x = -4.9 \cdot 1^2 + 9.8 \cdot 1 + h$

$\quad = 4.9 + h$

1秒，4.9m … (答)

(2) ②より，$t=3$ のときの速度を求める．

$x' = -9.8 \cdot 3 + 9.8$

$\quad = -19.6$

よって速さは 19.6 m/s … (答)

(3) ③より，$t=3$ のとき $x=0$ なので，

$0 = -4.9 \cdot 3^2 + 9.8 \cdot 3 + h$

$\therefore\ h = 14.7$

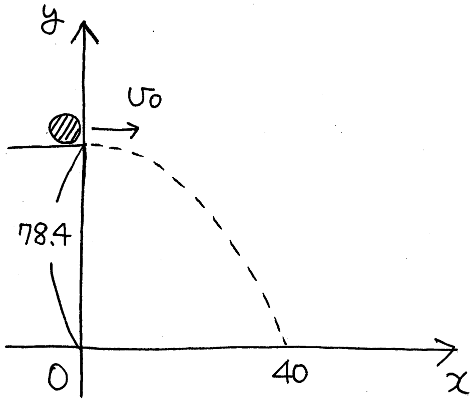
14.7m … (答)

問 12　（水平投射）

高さ 78.4 m のがけから水平方向に投げ出された球が，投げ出された地点の真下から前方 40 m の海面に落ちました．重力加速度を 9.8 m/秒^2 として次の問いに答えなさい．

(1) 海面に達するまでの時間を求めなさい．

(2) 初速度を求めなさい．



初速度を v_0 とし，左のように座標をとる．

$$\begin{cases} x'' = 0 & \cdots ① \\ x' = v_0 & \cdots ② \\ x = v_0 t & \cdots ③ \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = -9.8 & \cdots ④ \\ y' = -9.8t & \cdots ⑤ \\ y = -4.9t^2 + 78.4 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

↳ x 軸方向と y 軸方向の加速度をそれぞれ積分していきます．

(1) ⑥より，$y = 0$ となる時間を求める．

$0 = -4.9t^2 + 78.4$

$t^2 = 16$

$\therefore t = \pm 4$

海面に達するまでの時間は正なので，4秒 $\cdots$（答）

(2) ③より，$t = 4$ のとき $x = 40$ なので，

$40 = v_0 \cdot 4$

$\therefore v_0 = 10$

よって初速度は，10m/秒 $\cdots$（答）