第5回数学科リレー講座

# 微分方程式

## ～小さじ一杯から大鍋の味を知る～

3日目（平成26年8月27日）前半

川崎真澄

# 3日目前半のContents

§0.　前回までの復習

§1.　微分方程式とは？

§2. 2つの記号

# §0. 前回までの復習

# 微分の計算

(Q) $(3x^2+x-1)' = ?$

(A)

$6x+1$

微分の計算によって何が分かるか？

# 接線の方程式

が分かる

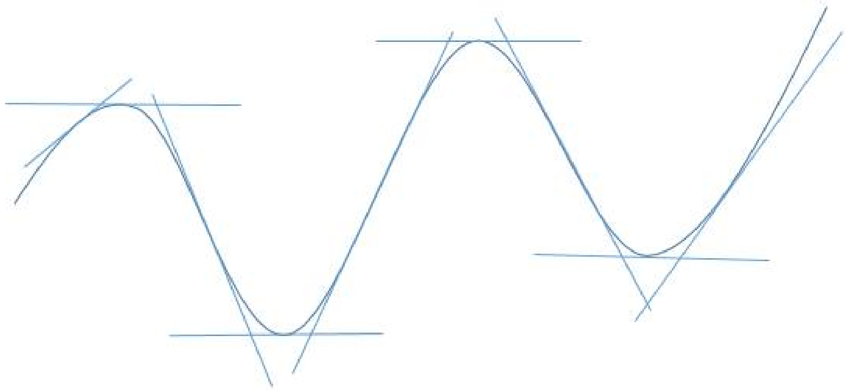
⇒　　ということは？

曲線の

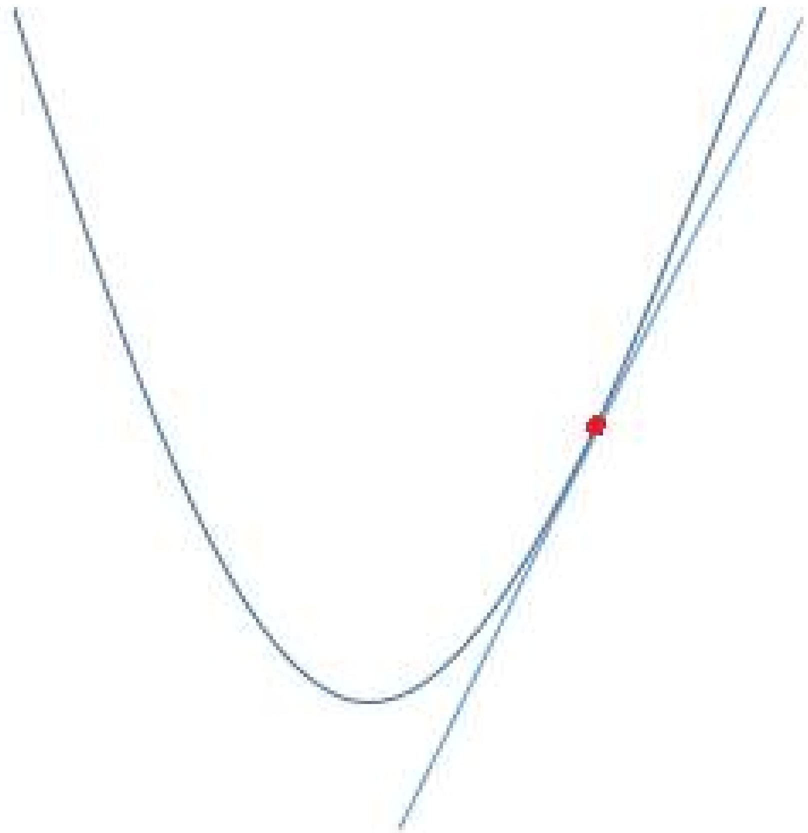
グラフのおおよその形

が分かる.

（右図参照）



（例） $y=x^2$ の点（2, 4）における
接線の方程式を求めよ。



$$(x^2)' = ? \quad \rightarrow \quad ? = 2x$$

なので，x=2を代入することにより，接線の傾きは4と分かる．よって，求める接線は，

傾きが4で，(2,4)を通るから，

$$y=4x-4$$

である．

今の例では，

曲線y=f(x)とその上にのっている点の座標が与えられ，yをxで微分したy'により，その点でのy=f(x)の接線の方程式を求めました．

では，逆に，

y´を与えて，特定の点を通る曲線y=f(x)を決定することはできるでしょうかか？

次章で考えましょう.

# §１．微分方程式とは？

（例）

（Q）

$y' = 2x$ となる $y$ は何か？

(A)

$$y=x^2$$

でよさそうだけれど・・・. これだと完全な正解ではありません.

なぜか？

それは,

$(x^2+1)'=2x$であり, $(x^2-1)'=2x$でもある. はたまた、$(x^2+100)'=2x$でもあるからである.

つまり,

$$(x^2+C)' = 2x$$

(Cは任意の定数)

が成り立っている. 従って, 正解は

$y=x^2+C$(Cは任意の定数)

これに対し,

（例）$y' = 2x$で,

$x=1$のとき$y=3$となる$y$は何か？

であれば,

$y'=2x$より,

$$y=x^2+C$$

となり,

$x=1$のとき$y=3$なので,

$$C=2$$

$$\therefore\ y=x^2+2$$ となる.

このように，接線（という曲線の一部分のおおよそ）のデータである

y´=~~　・・・（※）

から，特定の点を通る・・・（☆）ことを加味することによって曲線（全体）の方程式y=~~~を求めることを，

**微分方程式（※）を初期条件（☆）の下で解く**といいます．復唱すると，

・y´＝（xまたはyの入った式）

～微分方程式～

・x=○のとき，y=□

～初期条件～

です．

本講座のサブタイトルが

“小さじ一杯から大鍋の味を知る”

であることを味わってください．

# ここまでの復習をしよう

では，次の問題でここまでの復習をしましょう:

(Q)

微分方程式$y'=4x$を初期条件$x=1$のとき$y=-2$の下で解け.

(A)$y'=4x$より，

$$y=2x^2+C \quad (C\text{は任意の定数})$$

ここで，初期条件$x=1$のとき$y=-2$より，

$$-2=2+C$$

$$\therefore \quad C=-4$$

よって，

$$y=2x^2-4$$

# §２．２つの記号

# 1．記号 ∫ の導入

y ‘=2xとなるyを求めるとy=$x^2$+C (Cは任意の定数)でした.
同様に，y'=5となるyを求めるとどうなるでしょうか？
それは，y=5x+C(Cは任意の定数)です.
これらは，新しい記号 “ ∫ ” (インテグラルという）の導入によって，それぞれ次のように表されます：

『y´=2xとなるyを求めると

y=$x^2$+C(Cは任意の定数）になる』は,

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

『y´=5となるyを求めると

y=5x+C(Cは任意の定数)になる』は,

$$\int 5\,dx=5x+C$$

ではここで問題です：

(Q)

$(x+C)' = 1$ なので, $\int 1dx = x+C$

$\{(1/2)x^2+C\}' = x$ なので, $\int x\, dx = (1/2)x^2+C$

です(Cは任意の定数).

では, $\int x^2\, dx$ を計算するとどうなるでしょうか？

(A) $(1/3)x^3+C$

以上を観察して，次を予想してみましょう:

$$\int x^m \, dx = ?$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x\, dx = (1/2)\, x^2 + C$$

$$\int x^2\, dx = (1/3)\, x^3 + C$$

・・・ とくれば,

$\int x^m \, dx$

$$= 1/(m+1)\, x^{m+1} + C$$

$$(m \neq -1)$$

と予想するのが自然でしょう.

実際,

$m \neq -1$ のとき,

$$\left\{\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C\right\}' = x^m$$

が成り立つのでこの予想は正しいと言えます.
これは公式として覚えてください:

# ∫に関する重要公式

$$\int x^m \, dx = 1/(m+1)\ x^{m+1} + C$$

$$(m \neq -1)$$

# ２．記号dy/dxの復習

ところで，昨日の授業で習ったように，例えば，

y´=2xなら，これは，

$$dy/dx=2x$$

とも書かれ，

また，y´=5なら，これは，

$$dy/dx=5$$

とも書かれます．

つまり,

$$dy/dx$$

とは,

”yをxで微分する”

ということを意味する記号でした.

従って，例えば，

$y=x^2$のとき，$dy/dx$を計算するとどうなるでしょうか？

そう，これは$2x$になります．

（Q）？を計算してみましょう.

（１）$y=x$ のとき，$dy/dx$＝？

（２）$y=10x$ のとき，$dy/dx$＝？

（３）$y=3x^2$ のとき，$dy/dx$＝？

（４）$y=1$のとき，$dy/dx$＝？

（５）$x= t^2$ のとき，$dx/dt$＝？

（６）$y= -2t$ のとき，$dy/dt=$?

(A) 順に，1，10，6x，0，2t，－2

（再掲）

『(Q)

微分方程式$y'=2x$を初期条件$x=1$のとき$y=3$の下で解け．』

は,

『微分方程式$dy/dx=2x$を初期条件$x=1$のとき$y=3$の下で解け．』

と書かれることもあるわけです.

そして，次のようにして解いてもよいことが知られています：

dy/dx=2xより，

$$1dy=2xdx$$

(yだけの式)＝(xだけの式)

$$\therefore \int 1dy= \int 2xdx$$

$$\therefore y+C=x^2+D$$

(C,Dは任意の定数)

$\therefore y=x^2+k$ (ただし, k=D－C)

ここで, x=1のときy=3なので,

$3=1+k$

$\therefore k=2$

$\therefore y=x^2+2$・・・(答)

# （ひとこと）

この解法のポイントは，

$$1dy=2x\ dx$$

の部分，すなわち，

$$(y\text{だけの式})＝(x\text{だけの式})$$

と変形するところにあります．

# では練習してみましょう

（Q）

微分方程式$dy/dx=3x^2$を初期条件$x=1$のとき$y=2$の下で解け.

（A）

$$y= x^3 +2$$

# 次の問題はどうでしょうか？

(Q)

『微分方程式dy/dx=1/xを初期条件x=1のとき y=0の下で解け．』

とあればどうでしょうか？

(A)

dy/dx=1/xより,

$$1dy=(1/x)dx$$

yだけの式=xだけの式

$$\therefore \int 1dy=\int (1/x)\, dx$$

を計算すればよいことになりますが, これは

少々困ったことになりました.

というのは，1/xというのは$x^{-1}$のことですが，
先ほどの∫に関する結果である
（公式）

$$\int x^m\,dx = 1/(m+1)\,x^{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

は，$\int x^{-1}\,dx$についてなにも教えてくれないからです．

実は, $\int x^{-1}\ dx$, すなわち,

$y' = 1/x$ となる $y$

は

**“多項式以外の関数”**

であることが知られているのです.

今日の後半はこのことを学ぶための準備を
平山先生が，そしてそれを受けて明日は小澤
先生が説明されます。
では、お二人にバトンを渡すこととしましょう。
後半をお楽しみに♪

3日目前半終了

# おまけ（補足編）

(Q)
『微分方程式dy/dx=1/xを初期条件x=1のときy=0の下で解け．』の解は以下のようになる:

(A)
dy/dx=1/xより,

$$1dy=(1/x)dx$$

$$\therefore \int 1dy=\int (1/x)\, dx$$

$\therefore y+C=\log_e|x|+D$　(C,Dは任意の定数)

$\therefore y=\log_e|x| +k(k=D-C)$

ここで, x=1のときy=0ゆえ$0=\log_e 1+k$

$$\therefore k=0$$

$$\therefore y=\log_e|x|$$

対数関数を知っている君は練習として次を解いてみましょう:

(Q)

『微分方程式dy/dx=yを初期条件x=0のときy=1の下で解け. 』

(A)

dy/dxyより,

$$dy/y=1dx$$

yだけの式　=　xだけの式

$\therefore\ \int dy/y=\int 1dx$

$\therefore\ \log_e|y|+C=x+D$ (C,Dは任意の定数)

$\therefore\ \log_e|y|=x+k$ (k=D－C)

$\therefore\ |y|=e^{x+k}$

$\therefore\ y=\pm e^{x+k}$

$\therefore\ y=\pm e^{k}\times e^{x}$

$\therefore\ y=p\,e^{x}\ (p=\pm e^{k})$

ここで，$x=0$のとき$y=1$なので，

$$1=pe^{0}$$

$$\therefore\ p=1$$

$$\therefore\ y=e^{x}$$

一般に,

微分方程式

$$dy/dx=ky \quad (k\text{は定数})$$

の解は,

$$y=Ce^{kx} \quad (k\text{は定数})$$

となる. (これも重要公式)

☆y´のみならず, y´´などを含む微分方程式も
存在する. これは最終日に登場する予定です.

## 3 日目の授業に寄せて

毎年夏に行われる本校の“数学科リレー講座”はお陰様にて今回で五回目となりました。

俗に，“三号雑誌”なる言葉があり，曰く，雑誌というものは意欲的に創刊するも，四号を出すのは至難の業であり，いかに意欲的な試みを長続きさせることが難しいかを評したものですが，この数学科リレー講座もその懸念は多分にあって，本講座の発案者としては昨年，第四回を実施できた際，大きな手ごたえを得たところでした．このたび五回目を実施でき，これで漸く，名実ともに“毎年恒例の”といってよい催しになったことと自負をしております.

思えば，第一回目が数学史（副題はアーメスのパピルスとペレルマンまで)，第二回目が Galois 生誕 200 年記念，第三回が複素数の世界，そして第四回が現代幾何学のひろがりをテーマとしており，さて，この五回目はどういったテーマにすべきか？ということが昨秋あたりからそれとなく話題に出ておりました.

ある人は，高校数学の新課程に登場したことを記念して統計をテーマにしてはどうか，またある人は，今回はリレー講座ではあるものの毎回，担当者が現在興味を持っていることを読み切り型で 6 日間行ってはどうか，そのまたある人は，…という具合に実にバラエティに富んだアイデアが多く出され，この講座の前途の明るさを確信すると同時に，どれも試みてみたいテーマであり，一つに絞ることの難しさを，文字通り“うれしい悲鳴”をあげて実感したのでした.

なかで,「第二回は代数，第三回は代数・幾何・解析の交叉点，そして第四回は幾何がそれぞれ主たるテーマでしたから，そろそろ解析をテーマでいくのはどうでしょうか？」との意見があり，丁度，当学科の現有スタッフに解析に堪能な方々が揃っていること，およびほぼ月例のペースで教員有志による解析の勉強会が行われていることもあり,「それは名案ですね．ではそれで行きましょう」となったのでした.

果たして，解析のなかで何をテーマにしたらよいか？と考えた際，これは“微分方程式”で即決されました。即決されたものの，その推薦理由は各自異なっていたようです．私について言えば，微分方程式が，その重要性にも関わらず，新課程の高校数学において，完全に“復権”なった弧長などと異なり,“発展学習”として扱ってもよい，といういわば“玉虫色”の決着となったことに不憫さを覚えたからでした.

とはいうものの，リレー講座に参加する半数強は中学生であり，毎年の常とはいえ，さてどういったストーリーを編むべきか，と思案の日々が続きました.

今回， 3 日目の担当となった私は，前半と後半の中継ぎであることを重視し，かつまた微分方程式がとりわけ「計算ができてこそ理論が涵養される」トピックと考え，計算法に主眼を置くこととしました．いくつかの重要事項は「～であることが知られている」とせざるを得ませんでしたが，中 1 生が達者に微分方程式を解く様子を見ることができ，そしてまた受講者の声を聴くと，この授業が，後半の大きな目標であり，自身苦労した“対数関数の導入への橋頭堡”足り得たようで，安堵した次第です。　（川崎真澄）