リレー講座（３・４日目）

指数関数・対数関数

平山　裕之
小澤　嘉康

1. 指数関数の定義

指数関数を定義する

これから多項式でない新しい関数として，

指数関数を定義していきます．

指数関数とは，正の数 a に対して，

$$x = a^t$$

の形をした関数です．

指数関数を定義する

これから多項式でない新しい関数として,

指数関数を定義していきます.

指数関数とは，正の数 a に対して,

$$x = a^t$$

の形をした関数です.

… と言われても困ると思うので，これから順序建てて説明していきます.

指数関数を定義する　その１（自然数）

$a > 0$ に対して，t を自然数とします．

このとき，a^t とは，

$$a^t = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{t\text{個}}$$

のことです．

t は，単にかけ合わせている個数なので，

次の**指数法則**が成り立ちます．

指数関数を定義する　その１（自然数）

指数法則

$$\begin{aligned} a^{t+s} &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{t+s} \\ &= \overbrace{a \times \cdots \times a}^{t} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{s} = a^t \times a^s \end{aligned}$$

$$(a^t)^s = \overbrace{a^t \times \cdots \times a^t}^{s} = a^{ts}$$

指数関数を定義する　その２（整数）

次に，$a > 0$ に対して，t を整数とします．

最も大事なポイントは，指数法則を保つことです．

ですので，a^0 は，自然数 t に対して，$t = 0 + t$ ですので，

$$a^t = a^{0+t} = a^0 \times a^t$$

が成り立つようにしたいので，両辺を $a^t \neq 0$ で割って，

$$a^0 = 1$$

と定義します．

指数関数を定義する　その２（整数）

そして負の数ですが,

自然数 t に対して，$0 = t + (-t)$ ですので,

$$1 = a^0 = a^{t+(-t)} = a^t \times a^{-t}$$

が成り立つようにしたいので，両辺を $a^t \neq 0$ で割って,

$$a^{-t} = \frac{1}{a^t}$$

と定義します.

ここまでの例

例えば，$a = 3$ のとき，

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

です．また，

$$3^0 = 1$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

となります．

指数関数を定義する　その３（有理数）

$$t = \frac{m}{n}$$（m は整数，n は自然数）のとき，

$$m = \frac{m}{n} \times n$$ ですので，

$$a^m = a^{\frac{m}{n} \times n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

が成り立つようにしたいので，両辺の n 乗根を計算して，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

と定義します．

ここまでの例

例えば，$a = 3$ のとき，

$3^{\frac{1}{2}}$ は 2 乗すると 3 になる数なので，

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

です．また，

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

$$3^{\frac{8}{5}} = 3^{1+\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{3^3} = 3\sqrt[5]{27}$$

となります．

指数関数を定義する　その４（実数）

さて，いよいよ，t を実数まで定義しましょう.

その前に，例えば，$a = 3$ のとき，t が

(1) 自然数

(2) 整数

(3) 有理数

のそれぞれの範囲でグラフにしてみましょう.

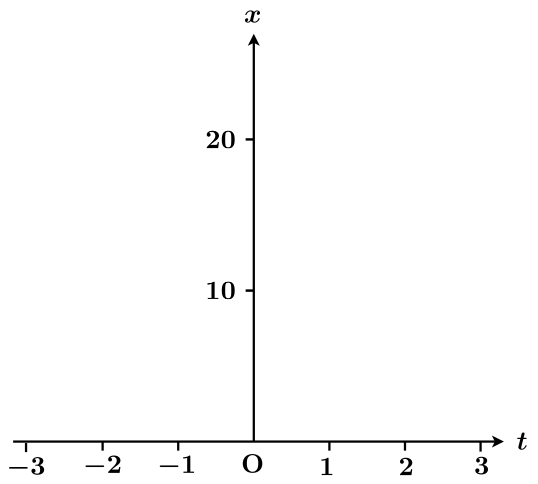
指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その１（自然数）

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

ですので,



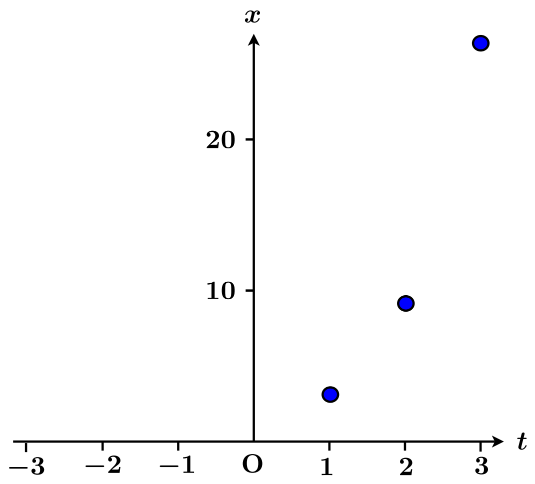
指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その１（自然数）

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

ですので,

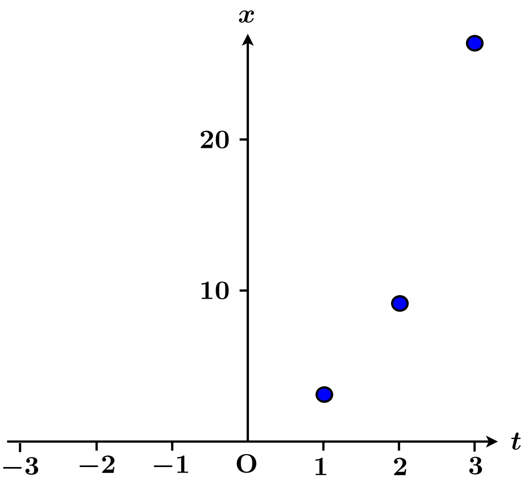


指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その２（整数）

さらに，

$$3^0 = 1$$
$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$
$$3^{-3} = \frac{1}{27}$$

ですので，



指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その２（整数）

さらに,

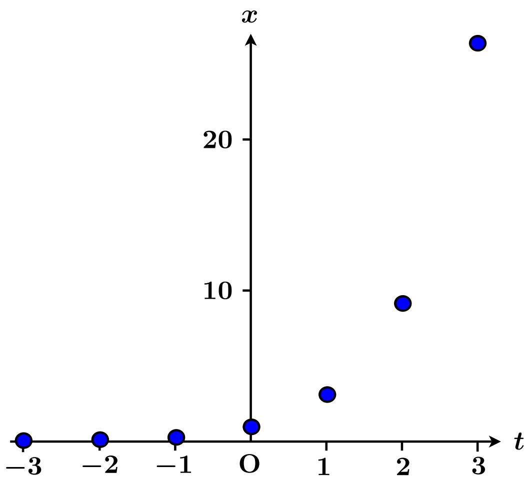
$$3^0 = 1$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{27}$$

ですので,



指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その３（有理数）

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

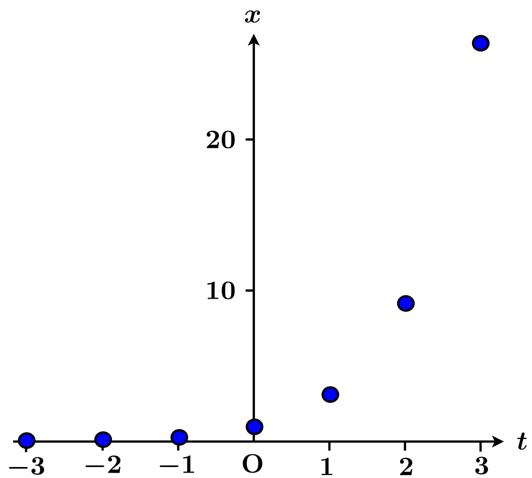
$$\fallingdotseq 1.73\cdots$$

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$\fallingdotseq 1.32\cdots$$

その他

たくさん計算して,



指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その３（有理数）

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

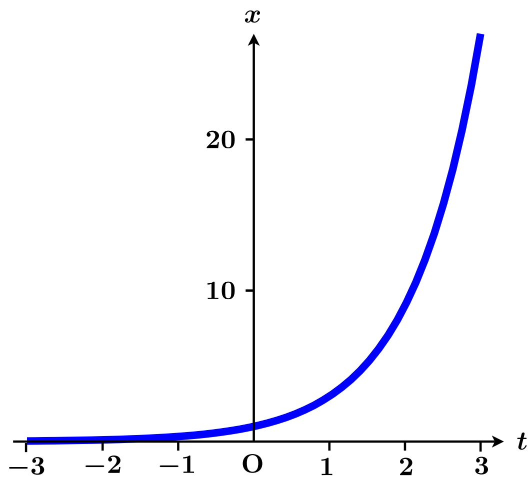
$$\doteqdot 1.73\cdots$$

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$\doteqdot 1.32\cdots$$

その他

たくさん計算して,



指数関数 $x = 3^t$ のグラフ　その４（実数）

有理数のグラフで,

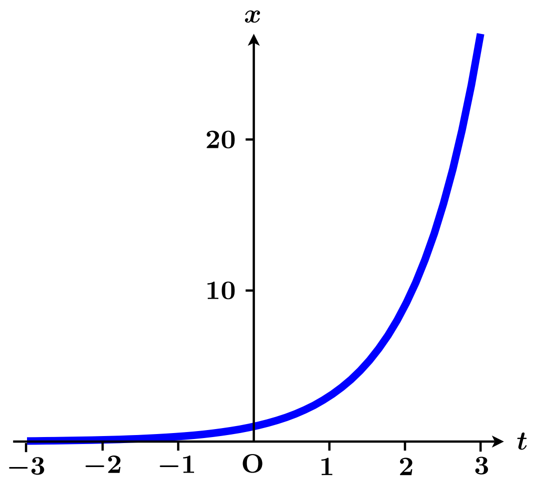
一本の曲線につながって

みえるので,

t が実数のときは

このグラフから値を

定義します.



指数関数の定義

以上のようにして，指数関数

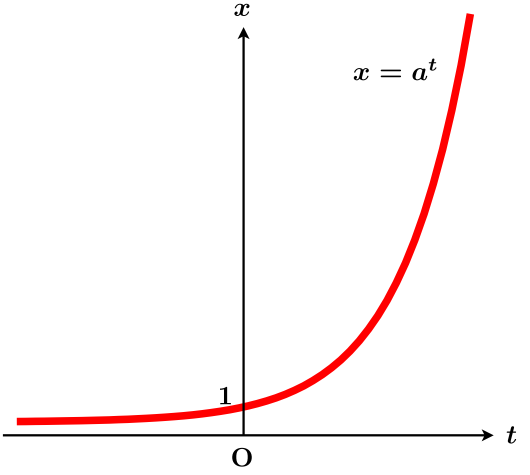
$$x = a^t$$

が定義できました.

指数関数の大事な性質は,

指数法則 $\begin{cases} a^{t+s} = a^t \times a^s \\ (a^t)^s = a^{ts} \end{cases}$

です.



2. 指数関数の微分

指数関数を微分する

指数関数が定義できましたので,

指数関数を微分することを考えてみましょう.

t の関数 x を微分するには,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

を計算するのでしたね.

指数関数を微分する

$x = f(t)$ のとき，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ でした．

ここで，$\begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t + h \end{cases}$ とすると，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

となります．

指数関数を微分する

したがって，$x = f(t) = a^t$ のとき，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \frac{a^{t+h} - a^t}{h} = \frac{a^t \times a^h - a^t}{h}$$

$$= \frac{a^t(a^h - 1)}{h} = a^t \times \frac{a^h - 1}{h}$$

となります．

指数関数を微分する

$$\text{さて，}\ a^t \times \frac{a^h - 1}{h}\ \text{の}\ \frac{a^h - 1}{h}\ \text{ですが，}$$

昨日の話を思い出してみると，

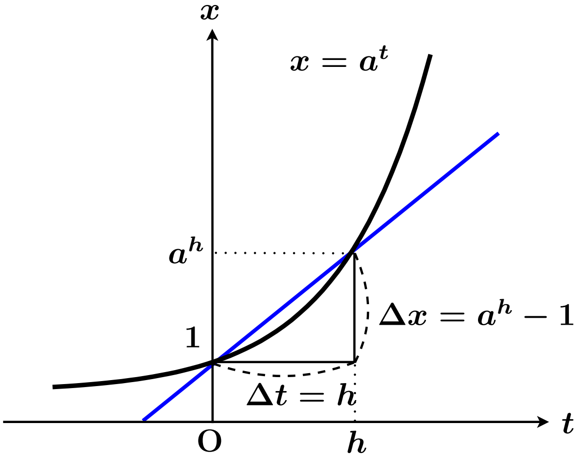
この式は，$h \longrightarrow 0$ のとき，

$x = a^t$ のグラフの

$t = 0$ での接線の傾きを

表していることが

わかります．



指数関数を微分する

$$\text{さて，}\ a^t \times \frac{a^h - 1}{h}\ \text{の}\ \frac{a^h - 1}{h}\ \text{ですが，}$$

昨日の話を思い出してみると，

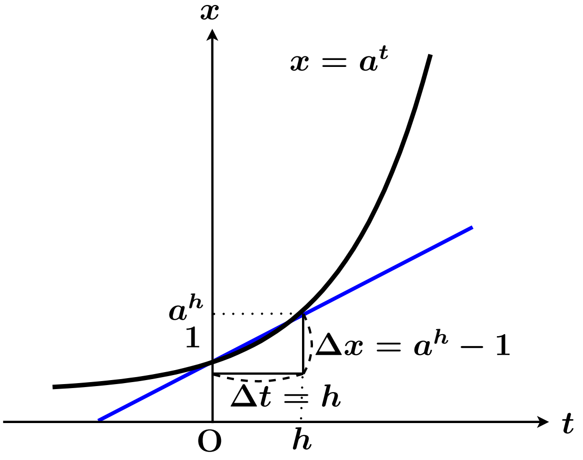
この式は，$h \longrightarrow 0$ のとき，

$x = a^t$ のグラフの

$t = 0$ での接線の傾きを

表していることが

わかります.



指数関数を微分する

さて，$a^t \times \dfrac{a^h - 1}{h}$ の $\dfrac{a^h - 1}{h}$ ですが，

昨日の話を思い出してみると，

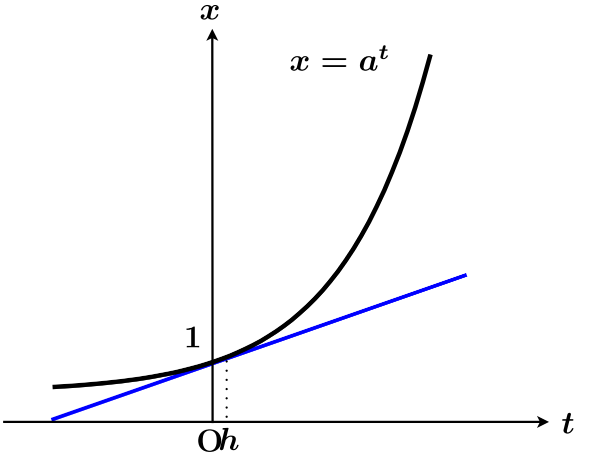
この式は，$h \longrightarrow 0$ のとき，

$x = a^t$ のグラフの

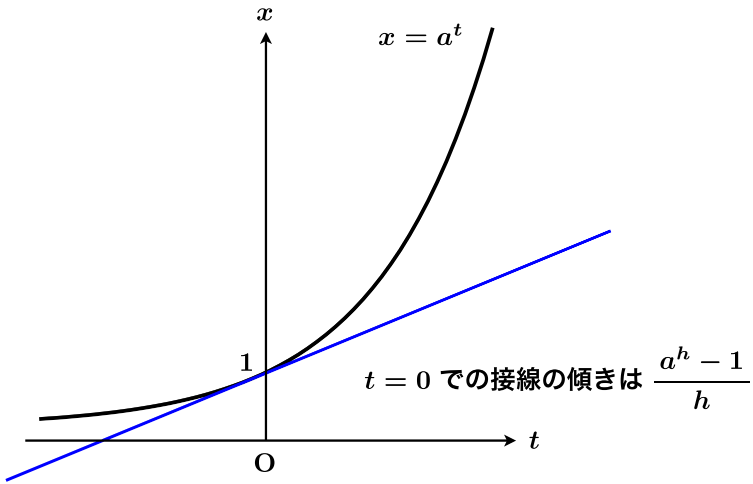
$t = 0$ での接線の傾きを

表していることが

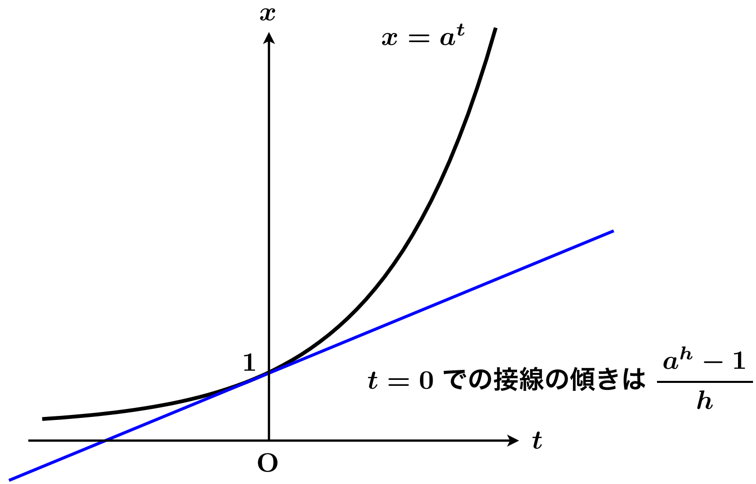
わかります．



指数関数を微分する

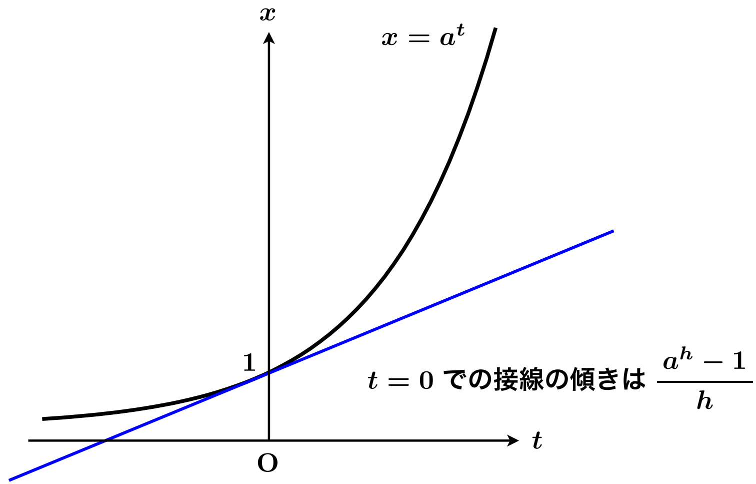


指数関数を微分する



$\dfrac{a^h - 1}{h}$ は計算からでは求まりそうもないので,

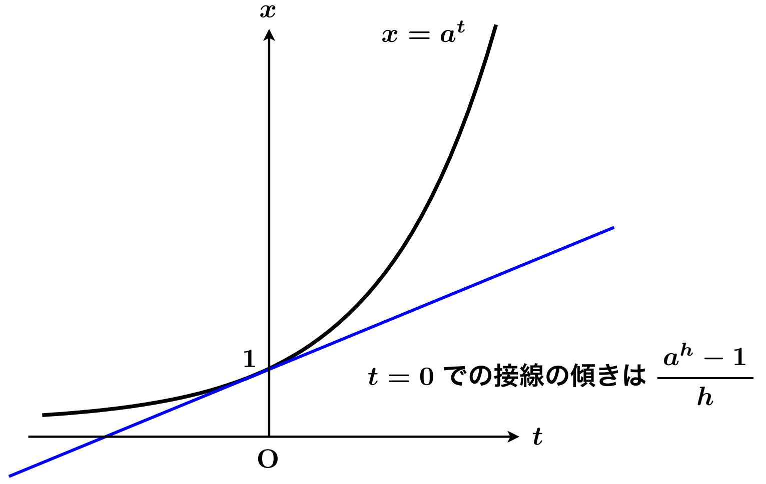
指数関数を微分する



$\dfrac{a^h - 1}{h}$ は計算からでは求まりそうもないので,

グラフから読み取ろうと思いますが ···

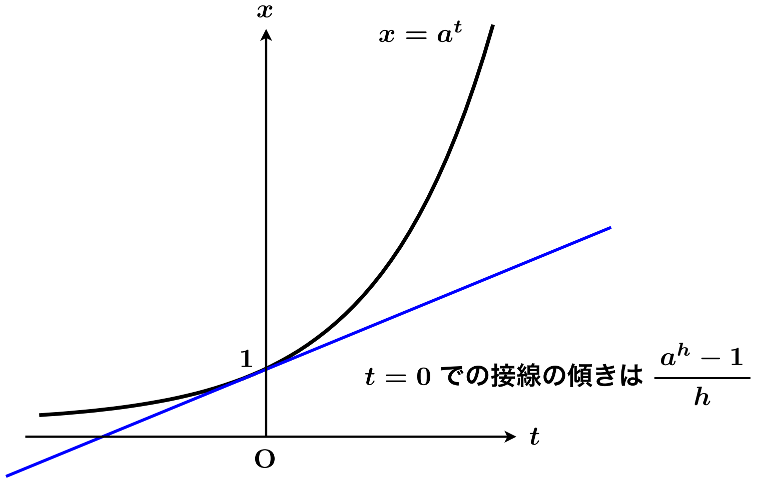
指数関数を微分する



グラフを見ても $t = 0$ での接線の傾きは

求まりそうもありません！

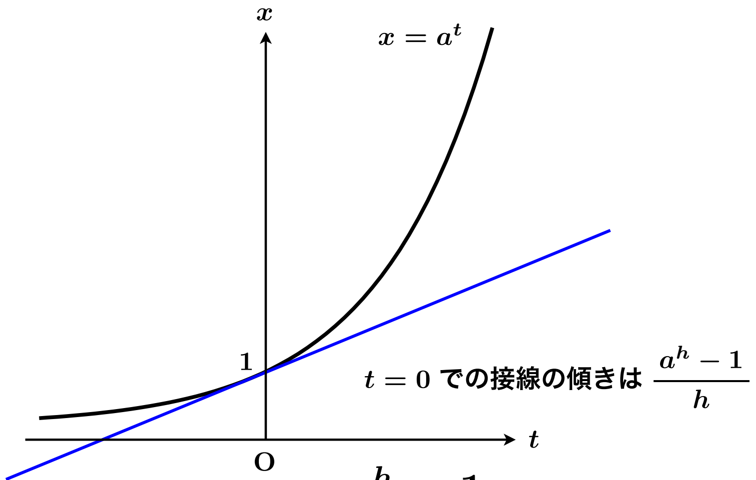
指数関数を微分する



でも，$x = a^t$ の

$t = 0$ での傾きが 1 になる a があるはずです！

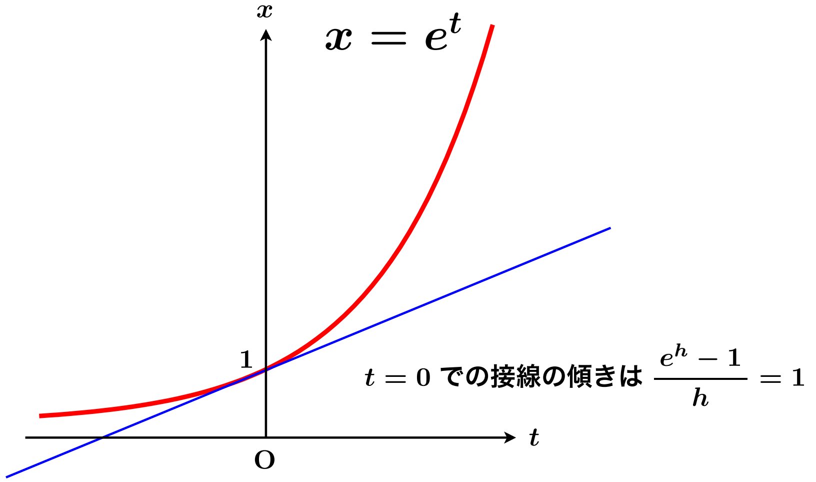
指数関数を微分する



$t = 0$ での接線の傾き $\dfrac{a^h - 1}{h}$ が 1 となる

a を e で表すことにします.

指数関数を微分する



$x = e^t$ は，$t = 0$ での接線の傾きが 1 の指数関数です．

なお，e を**自然対数の底**または**ネイピア数**といいます．

指数関数 $x = e^t$ を微分する

指数関数 $x = e^t$ を微分してみましょう.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{e^{t+h} - e^t}{h} = \frac{e^t(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^t \times \frac{e^h - 1}{h} \approx e^t \times 1$$

$$= e^t$$

指数関数 $x = e^t$ を微分する

指数関数 $x = e^t$ を微分してみましょう.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{e^{t+h} - e^t}{h} = \frac{e^t(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^t \times \frac{e^h - 1}{h} \approx e^t \times 1$$

$$= e^t = x$$

指数関数 $x = e^t$ を微分する

したがって，指数関数 $x = e^t$ を微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x$$

となります．

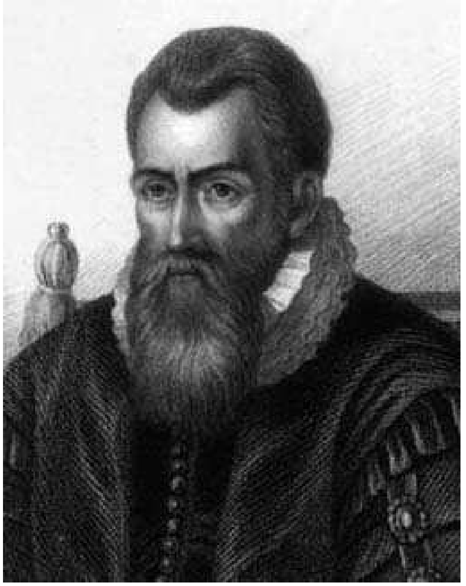
ネイピアさんについて

ちなみに，ネイピアさんは,

John Napier

スコットランドのエディンバラ

1550年〜1617年4月



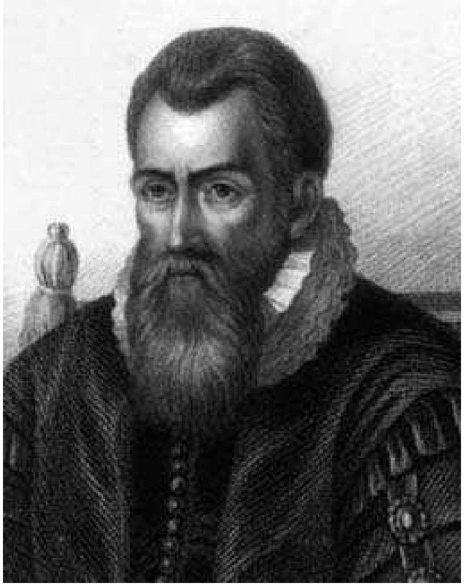
ネイピアさんについて

ちなみに，ネイピアさんは，

John Napier

スコットランドのエディンバラ

1550年〜1617年4月



さらにちなみに，

$e = 2.718281828\cdots$ です．

↑でも実は，e はオイラー (**Euler**) さんの **e**

3. 指数関数の積分

指数関数 $x = e^t$ を積分する

次に指数関数 $x = e^t$ を積分してみましょう.

積分することは，微分することの逆の計算でした.

ただし，$+C$（任意定数）だけ異なります.

指数関数 $x = e^t$ を積分する

$$e^t \xrightarrow{\text{微分}} e^t$$

でしたので,

指数関数 $x = e^t$ を積分する

$$e^t \xrightarrow{\text{微分}} e^t$$

でしたので,

$$e^t + C \xleftarrow{\text{積分}} e^t$$

となります.

指数関数 $x = e^t$ の微分と積分の公式

よって，$x = e^t$ の微分と積分の公式は次のようになります．

e^t を **微分** すると e^t

e^t を **積分** すると $e^t + C$

指数関数の計算練習　のその前に

例えば,

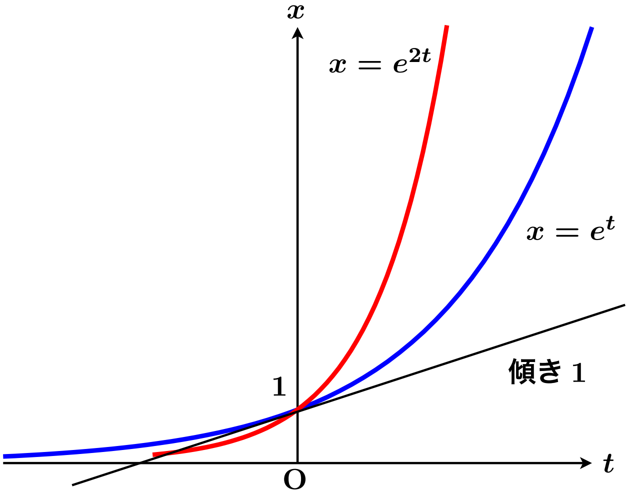
$x = e^t$ と $x = e^{2t}$ の

グラフを比べると

$x = e^{2t}$ の $t = 0$ での

接線の傾きは 1 でない

ことがわかります.



指数関数の計算練習　のその前に

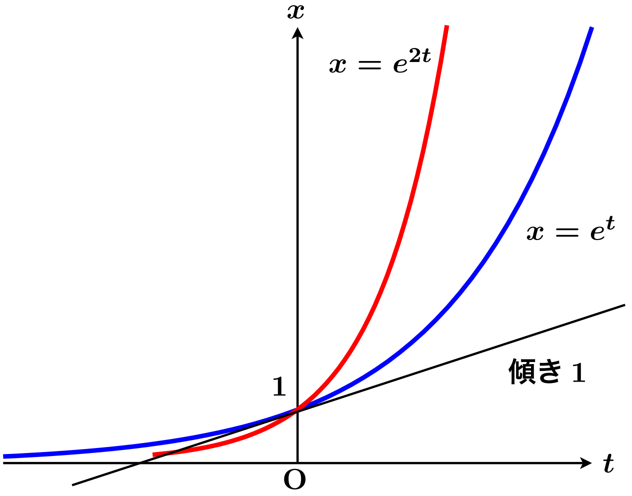
$x = e^t$ が微分できるのは,

$x = e^t$ の $t = 0$ での

接線の傾きを 1 と

なるように e

を決めたからです.



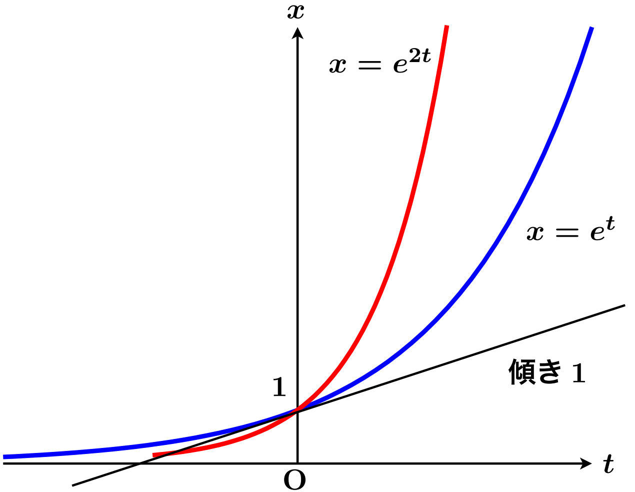
指数関数の計算練習　のその前に

$t = 0$ での接線の傾きが

わからない $x = e^{2t}$ は

このままでは

微分できません.



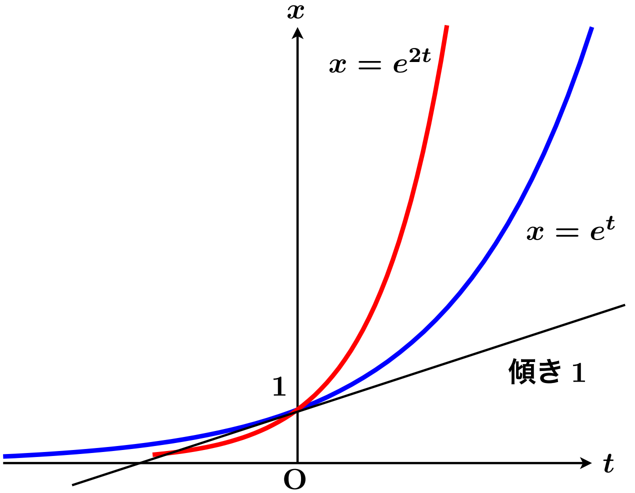
指数関数の計算練習　のその前に

$t = 0$ での接線の傾きが

わからない $x = e^{2t}$ は

このままでは

微分できません.



これでは困るので,
微分を計算するときに用いる便利な公式を紹介します.

微分を計算するときに用いる便利な公式

$\boldsymbol{x = e^{kt}}$ を **微分** すると

$$\boldsymbol{ke^{kt}}$$

となります.

微分の計算の公式

この公式を用いて，$x = e^{2t}$ を微分してみましょう.

$k = 2$ ですので，微分した結果の式 ke^{kt} に代入すると，

$$2e^{2t}$$ となります.

したがって，$x = e^{2t}$ の $t = 0$ での接線の傾きは，

$2e^{2t}$ に $t = 0$ を代入して，2 とわかります.

指数関数 $x = e^{kt}$ の微分・積分のまとめ

重要

一般に,

e^{kt} を **微分** すると ke^{kt}

積分は微分の逆なので,

e^{kt} を **積分** すると $\frac{1}{k}e^{kt} + C$

であることもわかります.

4. 指数関数の計算練習

指数関数の計算練習

それでは，指数関数に慣れるように，

計算の練習をしてみましょう．

例題１　次の計算をせよ．

(1) $\mathbf{3^5 \times 3^{-3}}$

(2) $\mathbf{\left(2^{-3}\right)^{-2}}$

指数関数の計算練習

それでは，指数関数に慣れるように，

計算の練習をしてみましょう.

例題１　次の計算をせよ.

(1) $3^5 \times 3^{-3}$

$$a^t \times a^s = a^{t+s}$$

(2) $\left(2^{-3}\right)^{-2}$

指数関数の計算練習

それでは，指数関数に慣れるように，

計算の練習をしてみましょう.

例題１　次の計算をせよ.

(1) $3^5 \times 3^{-3} = 3^{5+(-3)} = 3^2 = 9$　　$a^t \times a^s = a^{t+s}$

(2) $\left(2^{-3}\right)^{-2}$

指数関数の計算練習

それでは，指数関数に慣れるように，

計算の練習をしてみましょう．

例題 1　次の計算をせよ．

(1) $3^5 \times 3^{-3} = 3^{5+(-3)} = 3^2 = 9$　　$a^t \times a^s = a^{t+s}$

(2) $\left(2^{-3}\right)^{-2}$　　$\left(a^t\right)^s = a^{t \times s}$

指数関数の計算練習

それでは，指数関数に慣れるように，

計算の練習をしてみましょう．

例題１　次の計算をせよ．

(1) $3^5 \times 3^{-3} = 3^{5+(-3)} = 3^2 = 9$ 　　$a^t \times a^s = a^{t+s}$

(2) $\left(2^{-3}\right)^{-2} = 2^{-3\times(-2)} = 2^6 = 64$ 　　$(a^t)^s = a^{t\times s}$

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) e^{4t} **を微分せよ.**

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ **を微分せよ.**

(3) e^{8t} **を積分せよ.**

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ．

(1) e^{4t} を微分せよ．　　e^{kt} を微分すると ke^{kt}

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ を微分せよ．

(3) e^{8t} を積分せよ．

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ．

(1) e^{4t} を微分せよ．　　$4e^{4t}$　　e^{kt} を微分すると ke^{kt}

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ を微分せよ．

(3) e^{8t} を積分せよ．

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) e^{4t} を微分せよ.　　$4e^{4t}$　　e^{kt} を微分すると ke^{kt}

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ を微分せよ.　　$ke^{kt} + 2at + b$

(3) e^{8t} を積分せよ.

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) e^{4t} **を微分せよ.**　$4e^{4t}$　e^{kt} **を微分すると** ke^{kt}

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ **を微分せよ.**　$ke^{kt} + 2at + b$

(3) e^{8t} **を積分せよ.**

e^{kt} **を積分すると** $\dfrac{1}{k}e^{kt} + C$

指数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ．

(1) e^{4t} を微分せよ．　$4e^{4t}$　　e^{kt} を微分すると ke^{kt}

(2) $e^{kt} + at^2 + bt + c$ を微分せよ．　$ke^{kt} + 2at + b$

(3) e^{8t} を積分せよ．　$\dfrac{1}{8}e^{8t} + C$

e^{kt} を積分すると $\dfrac{1}{k}e^{kt} + C$

指数関数の計算練習

問題１　次の計算をせよ．ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする．

(1) $\left(a^2 \times a^3\right)^4$

(2) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

(3) $5^{-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}}$

(4) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}$

(5) $\left(a^{\frac{3}{2}} b^0\right)^2$

(6) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{6}}$

(7) $\left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{6}}\right)^6$

(8) $\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

指数関数の計算練習

問題１　次の計算をせよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．

(1) $\left(a^2 \times a^3\right)^4 = a^{20}$

(2) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 9$

(3) $5^{-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5$

(4) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$

(5) $\left(a^{\frac{3}{2}} b^0\right)^2 = a^3$

(6) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{6}} = 2$

(7) $\left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{6}}\right)^6 = a^4 b^5$

(8) $\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{5}$

指数関数の計算練習

問題２　次の問いに答えよ.

(1) e^{-kt} を微分せよ.

(2) $e^{-3t} + 2t + 4$ を微分せよ.

(3) e^{5t} を積分せよ.

(4) e^{-kt} を積分せよ.

指数関数の計算練習

問題２　次の問いに答えよ.

(1) e^{-kt} を微分せよ.　$-ke^{-kt}$

(2) $e^{-3t} + 2t + 4$ を微分せよ.　$-3e^{-3t} + 2$

(3) e^{5t} を積分せよ.　$\dfrac{1}{5}e^{5t} + C$

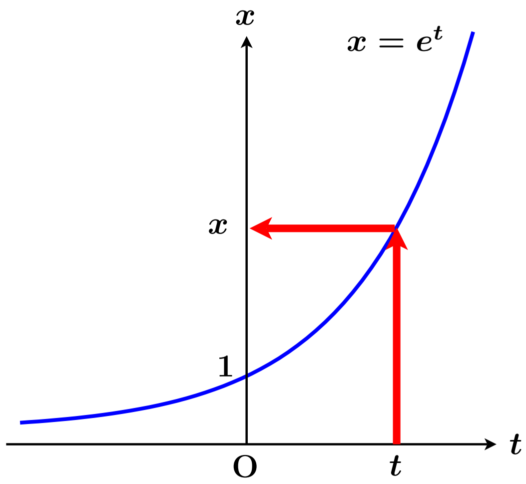
(4) e^{-kt} を積分せよ.　$-\dfrac{1}{k}e^{-kt} + C$

5. 対数関数の定義

対数関数の定義

$x = e^t$ は関数なので

t に対して x の値がただ一つに定まります.

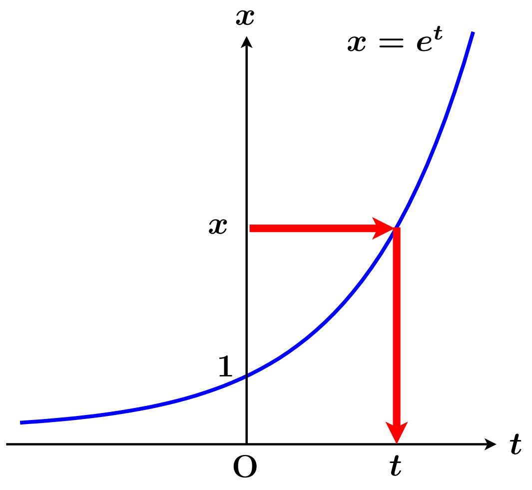


$$t \longrightarrow x$$

対数関数の定義

逆に，グラフより，$x > 0$ のとき，

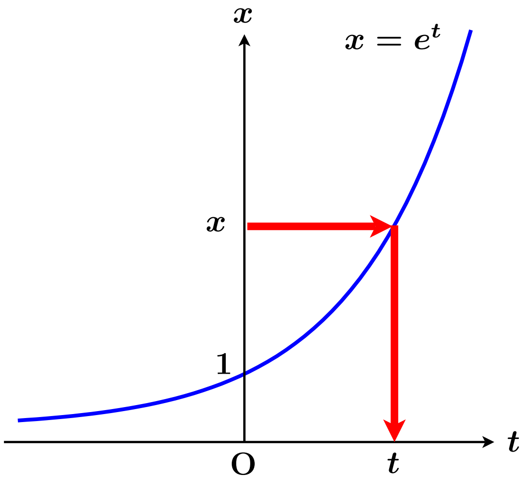
x に対して t の値がただ一つに定まります．



$x > 0$ のとき，

$$x \longrightarrow t$$

対数関数の定義



したがって，$x > 0$ のとき，

t は x の**関数**であることがわかります．

t と x には「関係式」$x = e^t$

がありますが，

x の関数であることがわかるように，

$$t = \log x$$

と表し，**対数関数**といいます．

対数関数の性質

$$t = \log x \iff x = e^t$$

つまり，指数関数と対数関数は**逆関数**ですので，

$$t = \log x = \log e^t$$

$$x = e^t = e^{\log x}$$

が成り立ちます．

対数関数の性質

$t = \log x = \log e^t$ において,

$t = 1$ とすると, $e^1 = e$ ですので,

$$\log e = 1$$

$t = 0$ とすると, $e^0 = 1$ ですので,

$$\log 1 = 0$$

であることがわかります.

対数関数の性質

次に，指数関数の

指数法則 は

対数関数ではどのようになるでしょうか？

対数関数の性質　指数法則

$$t = \log x \iff x = e^t$$

$$s = \log y \iff y = e^s$$ とすると,

$$u = \log xy \iff xy = e^u$$

$$e^u = xy = e^t \times e^s = e^{s+t}$$ より,

$$u = s + t$$

したがって, $\log xy = \log x + \log y$ となります.

対数関数の性質　指数法則

$$t = \log x \iff x = e^t$$
$$s = \log x^m \iff x^m = e^s$$

とすると,

$$e^s = x^m = (e^t)^m = e^{m \times t}$$ より,

$$s = m \times t$$

したがって, $\log x^m = m \times \log x$ となります.

対数関数の性質のまとめ

ここまでの対数関数の性質をまとめておきましょう.

$$\log e = 1 \quad \log 1 = 0$$

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log x^m = m \times \log x$$

6. 対数関数の微分

対数関数の微分

対数関数は，指数関数の逆関数ですので，

次の逆関数の微分の公式を用います

対数関数の微分

対数関数は，指数関数の逆関数ですので，

次の逆関数の微分の公式を用います

逆関数 を **微分** すると，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

となります．

対数関数の微分

指数関数 $x = e^t$ を微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x$$

でしたので，逆関数である $t = \log x$ を微分すると,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

対数関数の微分

指数関数 $x = e^t$ を微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x$$

でしたので，逆関数である $t = \log x$ を微分すると,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t}$$

対数関数の微分

指数関数 $x = e^t$ を微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x$$

でしたので，逆関数である $t = \log x$ を微分すると，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$$

対数関数の微分

したがって,

$$\log x \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x}$$

ですので,

対数関数の微分

したがって，

$$\log x \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{x}$$

ですので，

$$\log x + C \xleftarrow{\text{積分}} \frac{1}{x}$$

となります．

対数関数の微分と，$\dfrac{1}{x}$ の積分の公式

$\log x$ を **微分** すると $\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x}$ を **積分** すると $\log x + C$

7. 対数関数の計算練習

対数関数の計算練習

例題 1　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とするとき，次の式を a, b を用いて表せ.

(1) $\log 24$

(2) $\log \dfrac{1}{4}$

(3) $\log 2e^3$

対数関数の計算練習

例題 1　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とするとき，次の式を $a,\ b$ を用いて表せ.

(1) $\log 24$

$$= \log 2^3 \cdot 3 = \log 2^3 + \log 3 = 3\log 2 + \log 3 = 3a + b$$

(2) $\log \dfrac{1}{4}$

(3) $\log 2e^3$

対数関数の計算練習

例題 1　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とするとき，次の式を a, b を用いて表せ.

(1) $\log 24$

$$= \log 2^3 \cdot 3 = \log 2^3 + \log 3 = 3\log 2 + \log 3 = 3a + b$$

(2) $\log \dfrac{1}{4} = \log \dfrac{1}{2^2} = \log 2^{-2} = -2\log 2 = -2a$

(3) $\log 2e^3$

対数関数の計算練習

例題1　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とするとき，次の式を a, b を用いて表せ.

(1) $\log 24$

$$= \log 2^3 \cdot 3 = \log 2^3 + \log 3 = 3\log 2 + \log 3 = 3a + b$$

(2) $\log \dfrac{1}{4} = \log \dfrac{1}{2^2} = \log 2^{-2} = -2\log 2 = -2a$

(3) $\log 2e^3 = \log 2 + \log e^3 = a + 3$

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ．

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{}$ である．

(2) $\log 3x$ を微分せよ．

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ．

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{e^{3t}}$ である.

(2) $\log 3x$ を微分せよ.

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ.

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{e^{3t}}$ である.

(2) $\log 3x$ を微分せよ.

$\log x$ を微分すると $\dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ.

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{e^{3t}}$ である.

(2) $\log 3x$ を微分せよ.　　$\log x$ を微分すると $\dfrac{1}{x}$

$\log 3x = \log x + \log 3$ より，微分すると $\dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ.

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{e^{3t}}$ である.

(2) $\log 3x$ を微分せよ.　　$\log x$ を微分すると $\dfrac{1}{x}$

$\log 3x = \log x + \log 3$ より，微分すると $\dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ.　　$\dfrac{1}{x}$ を積分すると $\log x + C$

対数関数の計算練習

例題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x = 3t$ のとき，$x = \boxed{e^{3t}}$ である.

(2) $\log 3x$ を微分せよ.

$\log x$ を微分すると $\dfrac{1}{x}$

$\log 3x = \log x + \log 3$ より，微分すると $\dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{3}{x}$ を積分せよ.

$\dfrac{1}{x}$ を積分すると $\log x + C$

$3 \times \dfrac{1}{x}$ より，積分すると $3\log x + C = \log x^3 + C$

対数関数の計算練習

問題1　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とする.

(1) $\log 144$　　**(2)** $\log \dfrac{1}{6}$

問題2　次の問いに答えよ.

(1) $\log x^2 = 4t$ のとき，$x = \boxed{}$ である.

(2) $\log x^2$ を微分せよ.

(3) $\dfrac{k}{x}$ を積分せよ.

対数関数の計算練習

問題１　$\log 2 = a,\ \log 3 = b$ とする.

(1) $\log 144 = 4a + 2b$　　**(2)** $\log \dfrac{1}{6} = -a - b$

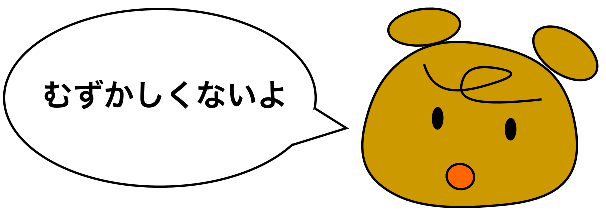
問題２　次の問いに答えよ.

(1) $\log x^2 = 4t$ のとき, $x = \boxed{e^{2t}}$ である.

(2) $\log x^2$ を微分せよ.　$\dfrac{2}{x}$

(3) $\dfrac{k}{x}$ を積分せよ.　$k \log x + C = \log x^k + C$

8. 微分方程式を
解いてみよう



微分方程式を解く

例題 1 $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

微分方程式を解く

例題１ $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

① ２つの変数 x と t を

左辺と右辺に分けます.

（この操作を **変数分離** といいます）

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

微分方程式を解く

例題 1 $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

① 変数分離

$$\frac{dx}{x} = -k dt$$

② 両辺を積分します.

$$\int \frac{1}{x} dx = \int (-k) dt$$

$$\log x = -kt + C_0$$

ここで，C_0 は任意の定数です.

微分方程式を解く

例題 1　$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

① 変数分離

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

② 積分

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$$\log x = -kt + C_0$$

③ $x =$ の式に直します.

$$x = e^{-kt+C_0} = e^{C_0}e^{-kt}$$

$$= Ce^{-kt}$$

ここで, $e^{C_0} = C$ としました.

微分方程式を解く　例題１のまとめ

例題１　$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

① 変数分離

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt$$

② 積分

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$$\log x = -kt + C_0$$

③

$$x = e^{-kt+C_0} = e^{C_0}e^{-kt} = Ce^{-kt}$$

微分方程式を解く　例題１のまとめ

例題１　$$\frac{dx}{dt} = -kx$$　解は　$$x = Ce^{-kt}$$

（C は任意定数）

① 変数分離

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt$$

② 積分

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$$\log x = -kt + C_0$$

③

$$x = e^{-kt+C_0} = e^{C_0}e^{-kt} = Ce^{-kt}$$

微分方程式を解く

例題２　$$\frac{dx}{dt} = -kx + g$$

微分方程式を解く

例題２　$$\frac{dx}{dt} = -kx + g$$

① 右辺をまとめます.

$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

微分方程式を解く

例題２　$$\frac{dx}{dt} = -kx + g$$

① まとめる

$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

② まとめた右辺を

$$X = x - \frac{g}{k}$$

と置き換えます．このとき，$-\frac{g}{k}$

は定数で微分すると 0 になるので，

微分方程式を解く

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

が成り立ちます．したがって，

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} = -kX$$

となります．

① まとめる

$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

② 置き換え

$X = x - \dfrac{g}{k}$ とおく

微分方程式を解く

例題２ $\displaystyle \frac{dx}{dt} = -kx + g$

③ $\displaystyle \frac{dX}{dt} = -kX$ は例題１と同じ

なので，$X = Ce^{-kt}$ です．

$\displaystyle X = x - \frac{g}{k}$ より，

$$x = Ce^{-kt} + \frac{g}{k}$$

① まとめる

$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

② 置き換え

$\displaystyle X = x - \frac{g}{k}$ とおく

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} = -kX$$

微分方程式を解く　例題２のまとめ

例題２　$\dfrac{dx}{dt} = -kx+g$

①
$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

②
$X = x - \dfrac{g}{k}$ とおくと $\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$ より
$$\frac{dX}{dt} = -kX$$

③
例題１より $X = Ce^{-kt}$　$\therefore\ x = Ce^{-kt} + \dfrac{g}{k}$

微分方程式を解く　例題２のまとめ

例題２　$\dfrac{dx}{dt} = -kx + g$　　解は　$x = Ce^{-kt} + \dfrac{g}{k}$

（C は任意定数）

①
$$\frac{dx}{dt} = -k\left(x - \frac{g}{k}\right)$$

②
$X = x - \dfrac{g}{k}$ とおくと $\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$ より

$$\frac{dX}{dt} = -kX$$

③
例題１より $X = Ce^{-kt}$　　$\therefore\ x = Ce^{-kt} + \dfrac{g}{k}$

微分方程式を解く

問題 $$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$$

初期条件が $t = 0$ のとき $v = 0$ で求めてみましょう.

※ 空気抵抗のあるときの落下速度 v を表す微分方程式です.

※ m は物体の質量　g は重力加速度　k は空気抵抗の係数　です.

微分方程式を解く

答え

まず右辺をまとめます.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

変数を置き換えると

$V = v - \dfrac{mg}{k}$ として,

$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dv}{dt}$ より

もとの微分方程式は

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V$$

と簡単になります.

変数分離をして

$$\frac{1}{V}dV = -\frac{k}{m}dt$$

積分すると

$$\int \frac{1}{V} dV = \int \left(-\frac{k}{m} \right) dt$$

$$\log V = -\frac{k}{m} t + C_0$$

となります．ここで， C_0 は任意の定数です．

よって,

$$V = e^{-\frac{k}{m}t + C_0} = e^{C_0} e^{-\frac{k}{m}t}$$

ですので，ここで改めて $C = e^{C_0}$ とおくと

$$V = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

となります.

もともと，$V = v - \dfrac{mg}{k}$ でしたので,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$$

の解は,

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

となります.

さて，初期条件は $t=0$ のとき $v=0$ ですので，

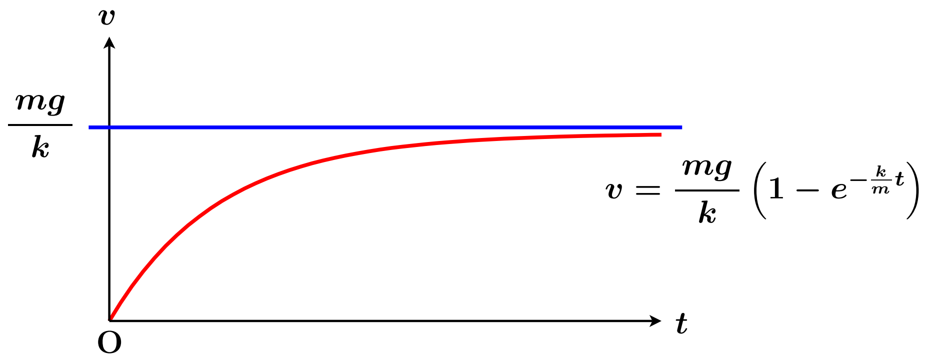
$$0 = Ce^0 + \frac{mg}{k}$$

$$C = -\frac{mg}{k}$$ より，

$$v = -\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

が得られました．

グラフをかいてみると,



t が大きくなると，速度 v は

一定の $\dfrac{mg}{k}$ に近づくことがわかります.

この一定の速度を**終端速度**といいます.