2014年度　数学科　リレー講座
『 小さじいっぱいから大鍋の味を知る 』

第 3 ブロック (5 日目) ～ 君は人口爆発を予測できるか ～

兼子・田村

2013 年 8 月 22 日

注意：不用意にこのプリントの先をみることは, 今日の授業を
つまらないものにさせる可能性があります. 先生の指示に従って読み進めましょう.

目 次

序章

まずは, 簡単な積分計算の復習と, 積分の数式表現を学んでおこう。関数 $y = f(x)$ を x で積分することを

ア $\boxed{}$

と表す。この右側の記号を イ $\boxed{}$ と呼ぶ。

問題 1

次の関数を積分しなさい。その際, 記号インテグラルを用いて表現すること。

(1) $y = x^2$

(2) $y = x^3 + 2x^2 + x + 4$

(3) $y = e^x$

(4) $y = \dfrac{1}{x}$

(5) $y = \dfrac{1}{x^2}$

第 1 章　人口増加の数学モデルを考えよう

微分方程式を立てる前に, 人口はどのように増えていくのかをまず考える必要がある。例えば日本国内での人口増加を考えるとする。このとき人口の増減に関わる要素として考えられるのは, ウ$\boxed{}$, エ$\boxed{}$, オ$\boxed{}$, カ$\boxed{}$ である。しかしここではまず**単純に増加する**として, 考えてみよう。そうすると, あとは**どのように増加するか**が問題となる。

問題 2
人口が ある期間内 (一年や一ヵ月など) にどのように増加するかを予測せよ。
(出来る人は説明だけでなく, 数式として表せ。人口を y, 時間を t, それ以外に必要な定数は k や r として, 人口増加の数式を作ってみよう。)

さて, さきほど作った人口増加を表す式だが, どれがより適しているのか。もう少し簡単なねずみの例で考えてみよう。

問題 3

正月に, ネズミのつがいがあらわれ, 子を 12 匹産む。そして親と合わせて 14 匹になる。このネズミは, 二月に子ネズミがまた子を 12 匹ずつ産むため, 親と合わせて 98 匹になる。この様に, 月に一度ずつ, 親も子も孫もひ孫も月々に 12 匹ずつ産む時,12ヶ月でどれくらいになるか?(答えは$\bigcirc \times \triangle^n$の形でよい) また, オスメスは 1:1 の割合で生まれる。また,12ヶ月の間一匹も死なないものとする。

(吉田光由[1]『塵劫記』より)

[1]吉田 光由（よしだ みつよし, 慶長 3 年（1598 年）～寛文 12 年 11 月 21 日（1673 年 1 月 8 日））は、江戸時代前期の和算家である。

さきほどの**問題2**のねずみ算の例から考えると, 人口増加は キ $\boxed{}$ をまず考えてみるのがよさそうである。では, この微分方程式を考えよう。ある定数を r, ある時点における人口を y として考えると

ク $\boxed{}$

このタイプの積分は, 微分方程式で一番基本の ケ $\boxed{}$ だった。そこで両辺に

コ $\boxed{}$ をかけると

サ $\boxed{}$

これで両辺を t で積分すると,

シ $\boxed{}$ ……①

対数の定義である

ス $\boxed{}$

を用いて式①を変形すると

セ $\boxed{}$

よって, 定数部分をまとめて A とおけば

ソ $\boxed{}$

いやいや, こんなスピードじゃない。もっと人口増加は早いはず！と思った人は, y に比例するのではなく, y^2 に比例した微分方程式を考えよう。ある定数を r, ある時点 t_0 における人口を y_0 として考える。

タ

このタイプの積分も, さきほどと同様に

チ

これで両辺を t で積分すると,

ツ

y について解くと

テ ……②

今, ある時点 t_0 における人口を y_0 とすると, 上の式に代入して,

ト

よって, 積分定数 C は

ナ

これを②に代入して整理すると,

ニ $\boxed{}$

今度は指数関数は出てきていない。分数の形をした分数関数である。分数関数にはある特徴があった。それは

ヌ $\boxed{}$

そこで, 分母が 0 になるような t の値を求めてみると,

ネ $\boxed{}$

より

ノ $\boxed{}$

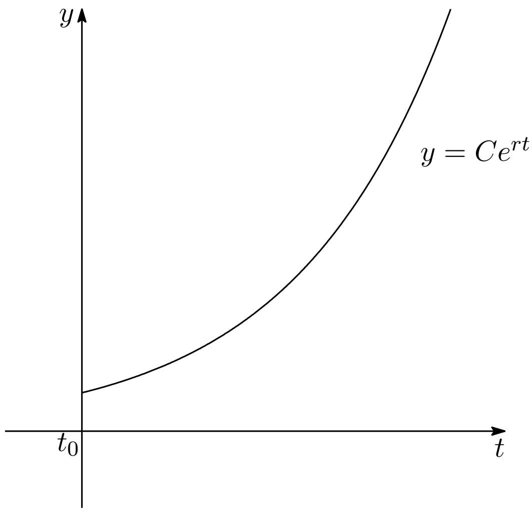
よって

ハ $\boxed{}$

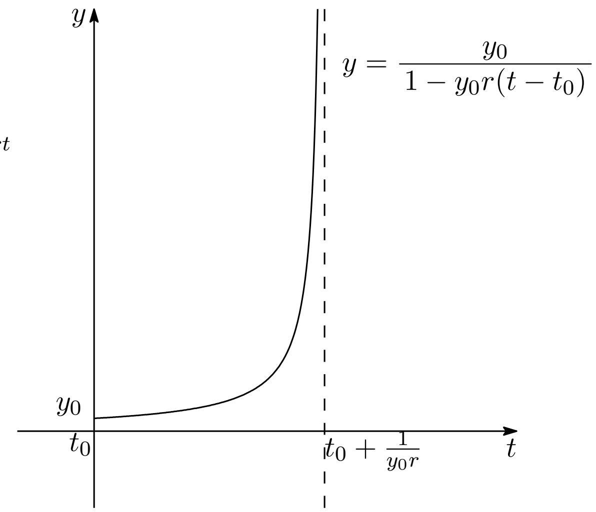
これにより, t は $\boxed{\text{ハ}}$ の値を取ることはできない。では, この値付近はどのような挙動を示しているのだろうか。

第 2 章　微分方程式の解の吟味とモデルの補正

さて, 先ほど解いた 2 つの微分方程式の解が, 現実のモデルにどのくらい近いかグラフを用いて吟味してみよう。



$\dfrac{dy}{dt} = ry$ の解



$\dfrac{dy}{dt} = ry^2$ の解

問題 4

解いた微分方程式の解である上記のグラフをみながら, 現実の人口増加のモデルとして問題がないか吟味せよ。

さきほどの**問題 4** を踏まえて, 微分方程式を見直してみよう。実際に無限の時間が過ぎて人口が無限に増えるはずはないし, ある時間までに人口が無限に増えることもないはずである。実際には, 食糧問題や, 社会が成熟してくるなどの理由により, 人口増加率は少しずつ減少し, 人口そのものの増加が止まると考えられる。では, そのような微分方程式は考えられないだろうか。

問題 5
ある環境下における人口の最大数を y_0, ある時刻 t における人口を y とする。人口が増加すると, 増加率が徐々に減少し, $y = y_0$ となるとき, 増加率が 0 となるような微分方程式を考えよ。

先ほどの微分方程式の解のグラフはこのような感じになる。