# 数学科リレー講座
## ～小さじ一杯から大鍋の味を知る～

# 第６日目
# ２階定数係数線形微分方程式
# 共振・タコマ橋の悲劇

担当　網谷・矢作

# 共振（共鳴）とは？

例えば, ブランコに乗ってこいでいるとき,

タイミングが合うと, より高い位置までこげたことはないだろうか？

# 昨日までの復習

関数 $u = u(t)$, 微分（導関数） $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$

多項式関数

$$u(t) = at^2 + bt + c \ \Rightarrow \ \dot{u} = 2at + b$$

$$u(t) = t^n \ \Rightarrow \ \dot{u} = nt^{n-1} \quad (n\text{: 自然数})$$

指数関数

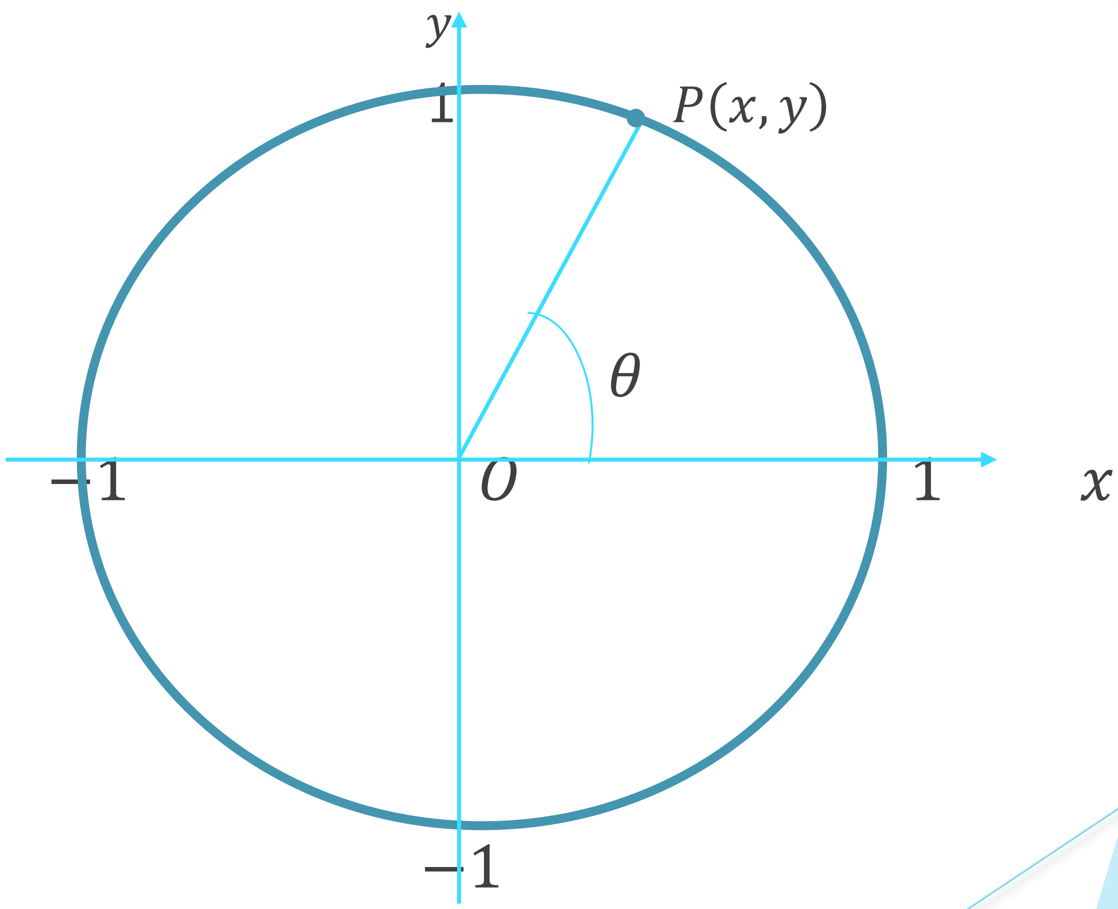
$$u(t) = e^t \ \Rightarrow \ \dot{u} = e^t$$

$$u(t) = e^{kt} \Rightarrow \dot{u} = {\color{red}k}e^{kt} \quad (k\text{: 定数})$$

# 今日の流れ

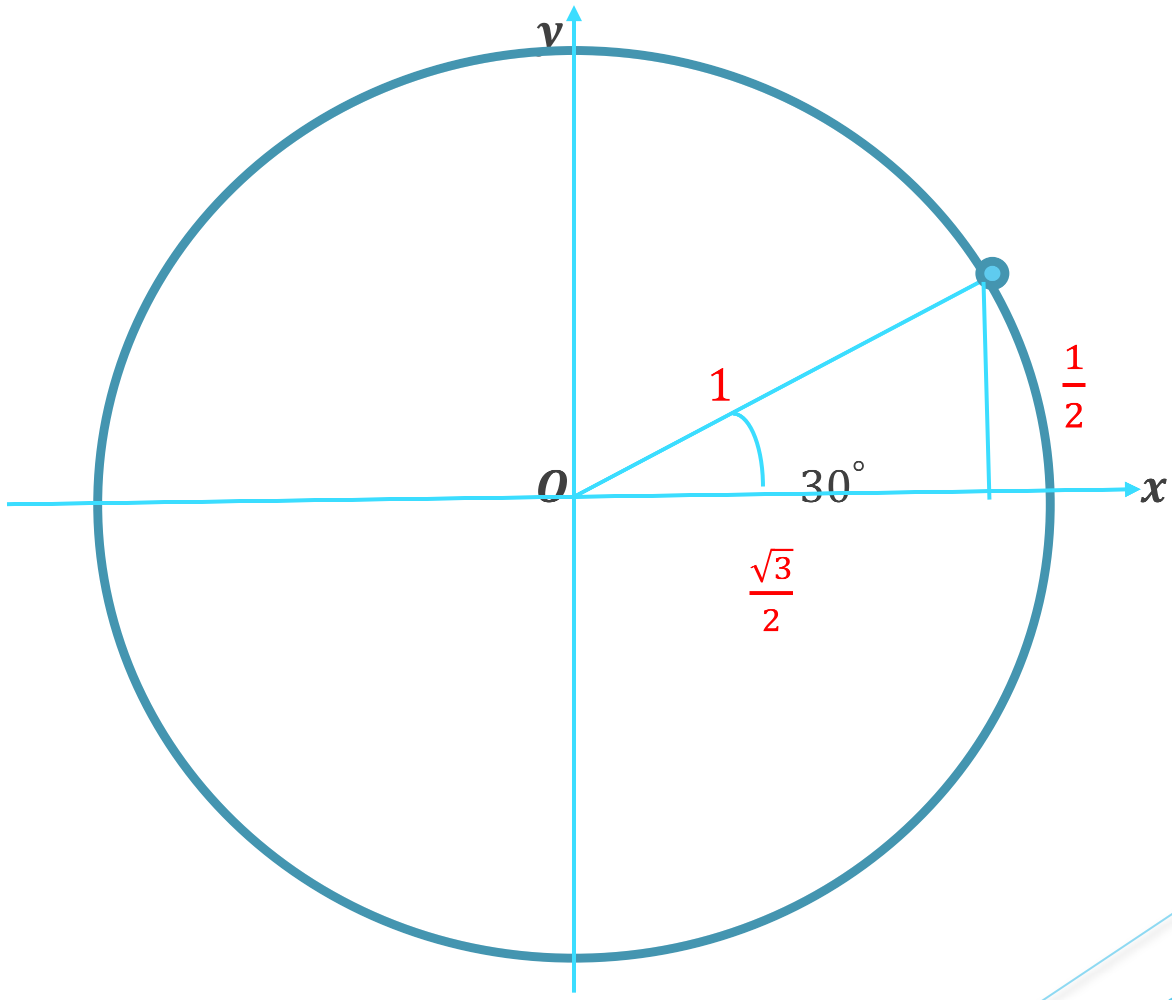
§１．準備：三角関数
§２．定数係数２階線形微分方程式
§３．バネの振動（共振）

# §1．準備：三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$




$$
\begin{cases} \sin\theta = y, \\ \cos\theta = x \end{cases}
$$

# 例 1．$\sin 30^\circ = ?$, $\cos 30^\circ = ?$



例題１．次の値を求めよ．

$(1)\ \sin 0^\circ,\ \cos 0^\circ$

$(2)\ \sin 30^\circ,\ \cos 30^\circ$

$(3)\ \sin 45^\circ,\ \cos 45^\circ$

$(4)\ \sin 180^\circ,\ \cos 180^\circ$

$(5)\ \sin 390^\circ,\ \cos 390^\circ$

解答）．$(1)\sin 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1$

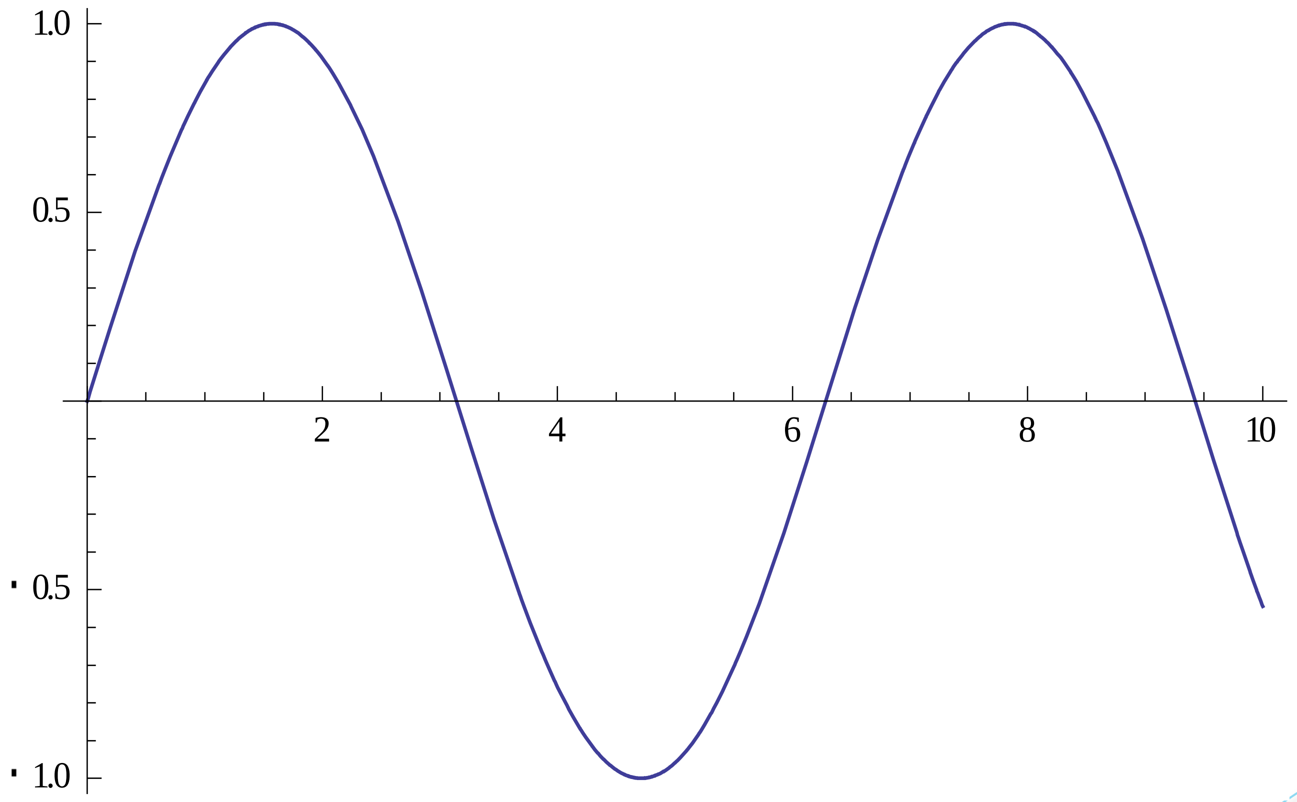
$(2)\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(3)\ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(4)\sin 180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1$

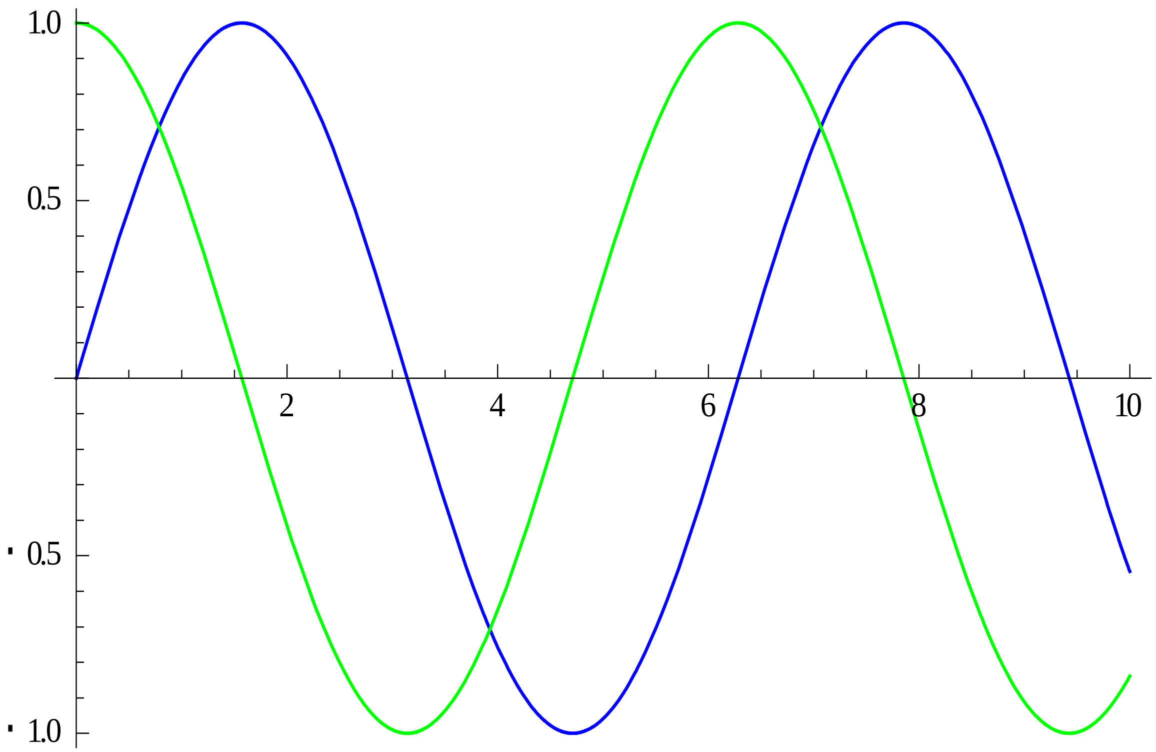
$(5)\sin 390^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# 三角関数　$y = \sin\theta$ のグラフ

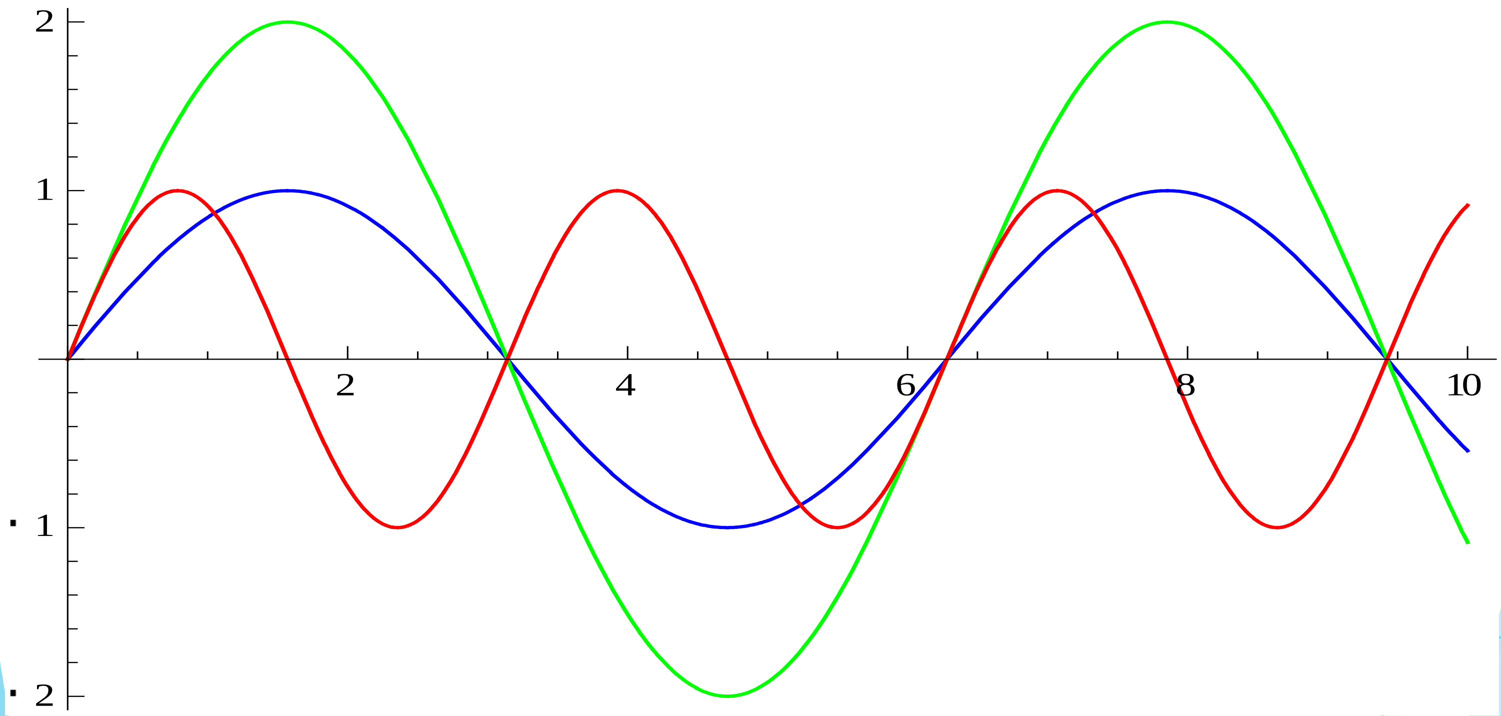



注意：$180^\circ = \pi$ rad

# 三角関数 $y = \cos\theta$ $(= \sin(\theta + 90^\circ))$のグラフ



# $y = \sin\theta$ と $y = 2\sin\theta$ と $y = \sin 2\theta$



# 三角関数のいくつかの公式

(1) $-1 \leq \sin\theta \leq 1,\quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$

(2) $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

(3) $\mathrm{A}\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\theta + \alpha)$
（三角関数の合成）

( 注意: $\alpha$ は $A, B$ を与えると定まる値)

# 例題２． $\sin\theta+\cos\theta$ の動く範囲は？

解答）ある $\alpha$ を用いて,

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\alpha)\ \ldots①$$

と表わされる. 一方

$$-1\leq\cos(\theta+\alpha)\leq 1$$

であるから,

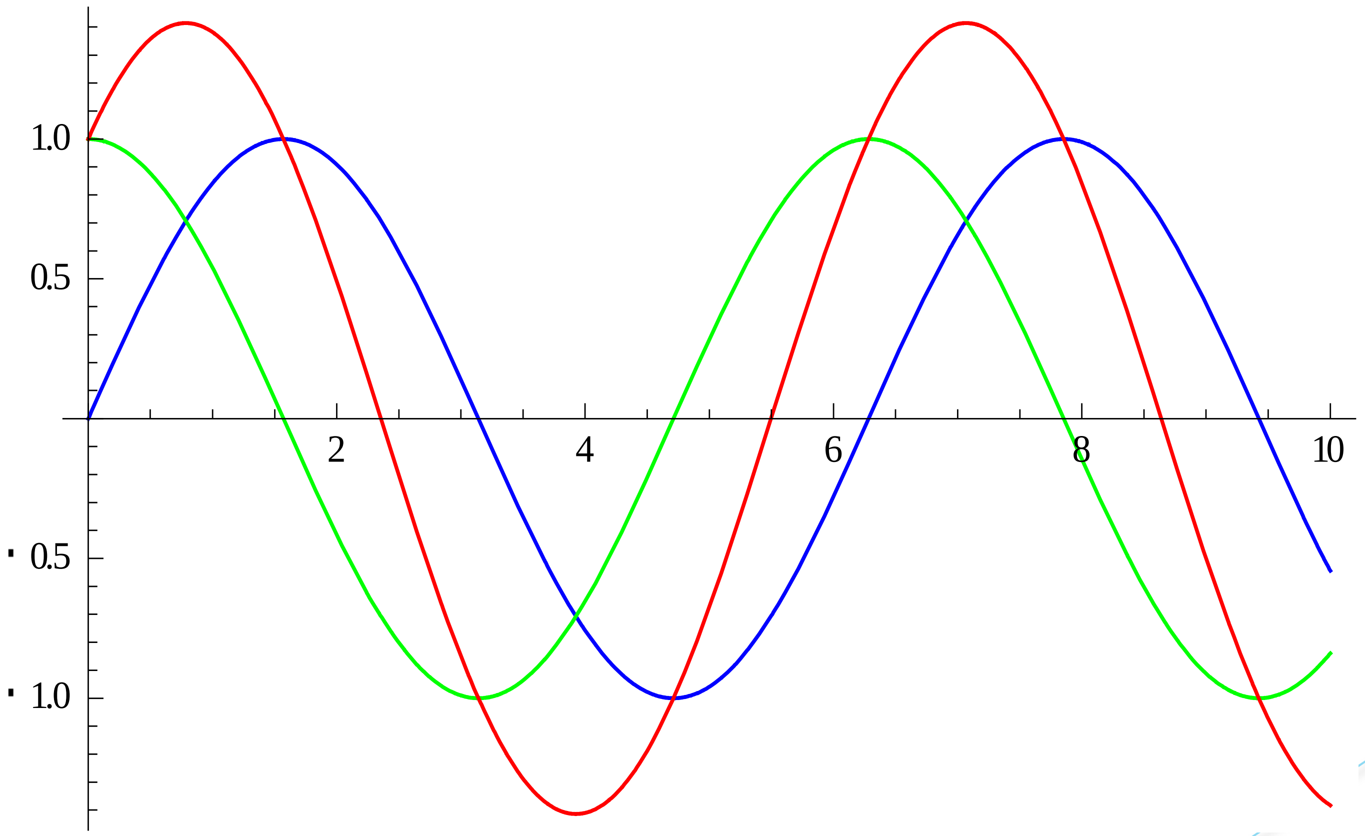
$$-\sqrt{2}\leq\sqrt{2}\cos(\theta+\alpha)\leq\sqrt{2}\ \ldots②$$

①, ② より

$$-\sqrt{2}\leq\sin\theta+\cos\theta\leq\sqrt{2}\ldots（答）$$

（実は, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos(\theta-45^\circ)$）

$$y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - 45^\circ)$$



# 三角関数の微分の公式

$$u = u(t), \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}$$

(1) $u(t) = \sin t$ ならば, $\dot{u} = \cos t$
(2) $u(t) = \cos t$ ならば, $\dot{u} = -\sin t$
(3) $u(t) = \sin kt$ ならば, $\dot{u} = k \cos kt$
(4) $u(t) = \cos kt$ ならば, $\dot{u} = -k \sin kt$

（$k$: 定数）

（注意）度数法ではなく, 弧度法

$180^\circ = \pi$ rad（ラジアン）

# 練習問題１.

次の関数$u = u(t)$に対して, $\dot{u}$ および $\ddot{u}$ を求めよ.

$$(1)\ u = -t^2 - 3t + 1$$

$$(2)\ u = e^{5t}$$

$$(3)\ u = \sin 3t + \cos 2t$$

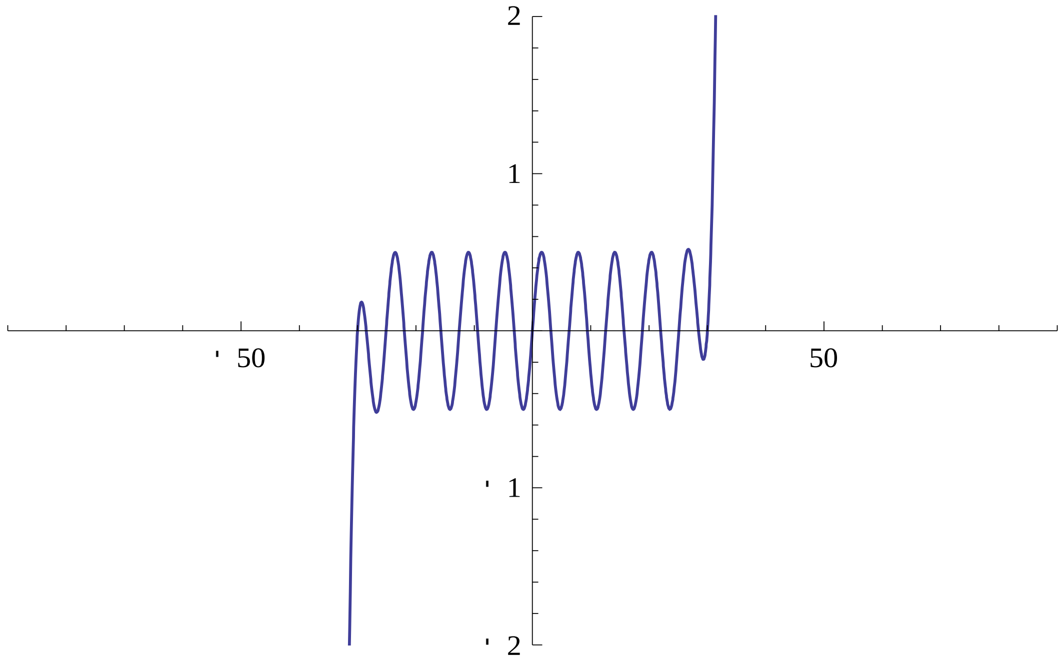
（解答）(1) $\dot{u} = -2t - 3,\ \ddot{u} = -2$

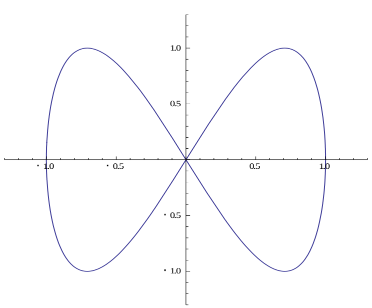
(2) $\dot{u} = 5e^{5t},\ \ \ddot{u} = 25e^{5t}$

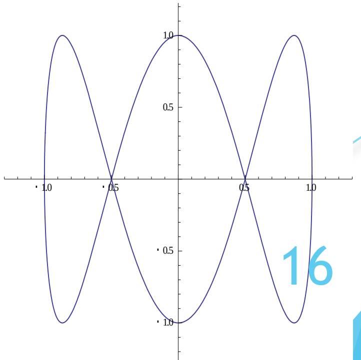
(3) $\dot{u} = 3\cos 3t - 2\sin 2t$

$\ddot{u} = -9\sin 3t - 4\cos 2t$

# ちょっと休憩１





# §2. 定数係数2階線形微分方程式

$$\ddot{u}+a\dot{u}+bu=0 \quad \ldots\ldots (★)$$

未知関数 $u = u(t)$, $a, b$: 定数

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \; \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

（公式1）特性方程式 $x^2 + ax + b = 0$の２解が

$x = \alpha$, $\beta$ ($\alpha$, $\beta$: 異なる２実数)であるとする.

⇒ (★) の解は

$u(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$ ($A, B$: 定数)

# 例題 ３． $\ddot{u} - 5\dot{u}+6u=0$ の解を求めよ.

解答）　特性方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ を解くと,

$(x-2)(x-3)=0$ より, $x = 2,3$

よって（公式１）により求める解は

$u(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$…（答）

( $A, B$: 定数は, 初期条件などにより定まる)

## 例題４．

$u(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$は $\ddot{u} - 5\dot{u} + 6u = 0$を満たすことを確認せよ.

証明） $$u = Ae^{2t} + Be^{3t}$$

$$\dot{u} = 2Ae^{2t} + 3\mathrm{B}e^{3t}$$

$$\ddot{u} = 4Ae^{2t} + 9Be^{3t}$$

故に, $\ddot{u} - 5\dot{u}+6u = 4Ae^{2t} + 9Be^{3t} - 5(2Ae^{2t} + 3\mathrm{B}e^{3t})$

$$+6(Ae^{2t} + Be^{3t})$$

$$= (4 - 10 + 6)Ae^{2t} + (9 - 15 + 6)Be^{3t}$$

$$= 0$$

# 定数係数２階線形微分方程式

$\ddot{u}$+a$\dot{u}$+$bu$=0 ….. (★)

未知関数 $u = u(t)$, $a, b$: 定数

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \ \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

（公式2）特性方程式 $x^2 + ax + b = 0$の２解が $x = \alpha$(重解)であるとする.

⇒

(★) の解は

$u(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t}$ ($A, B$: 定数)

# 定数係数２階線形微分方程式

$$\ddot{u}+a\dot{u}+bu=0 \ldots\ldots (\bigstar)$$

未知関数 $u = u(t)$, $a, b$: 定数

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

（公式3）特性方程式 $x^2 + ax + b = 0$の２解が
$x = \alpha \pm \beta i$ であるとする.（$i$ は虚数単位で, $i^2 = -1$）

⇒ (★) の解は

$$u(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)\ (A, B\text{: 定数})$$

# 例題５．　$\ddot{u} + 4u = 0$ の解を求めよ.

（解）特性方程式 $x^2 + 4 = 0$ を解くと

$x^2 = -4$ より,　$x = \pm 2i$

⇨

求める解は,（公式３）より

$$u(t) = A\cos 2t + B\sin 2t \ldots$$（答）

( $A, B$: 定数は, 初期条件などにより定まる)

例題６. $u(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ は
$\ddot{u} + 4u = 0$ を満たすことを確認せよ.

（証明） $u = \quad A\cos 2t \quad + \quad B\sin 2t$

$$\dot{u} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$\ddot{u} = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

⇨

$$\ddot{u} + 4u = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

$$+4A\cos 2t + 4B\sin 2t$$

$$= 0$$

# 練習問題２．

次の微分方程式の解を求めよ．
ただし，$A, B$（定数）を用いよ．

（１）$\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u$=0　（２）$\ddot{u} - 6\dot{u} + 9u$=0
（３）$\ddot{u} + 2\dot{u} + 3u$=0

（解答）

(1) 特性方程式は $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 1$

故に，$u = Ae^{-3t} + Be^{t}$…（答）

(2) 特性方程式は $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$（重解）

故に，$u = Ae^{3t} + Bte^{3t}$…（答）

(3) 特性方程式は $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}i$

故に，$u = e^{-t}(A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t)$…（答）

# ちょっと休憩２．