3　バネの振動(共振)

3.1 物理法則

3.2 外力なし・抵抗なしのケース

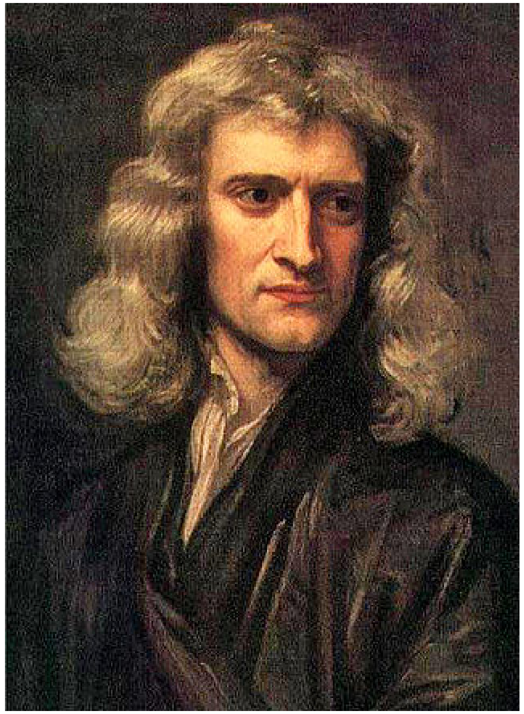
3.3 外力なし・抵抗ありのケース

3.4 外力あり・抵抗なしのケース

3.5 総括

担当: 網谷 泰治

3.1　古典力学　運動の第二法則



Sir Isaac Newton

F　力

m　質量

a　加速度

$$\boxed{F = ma}$$

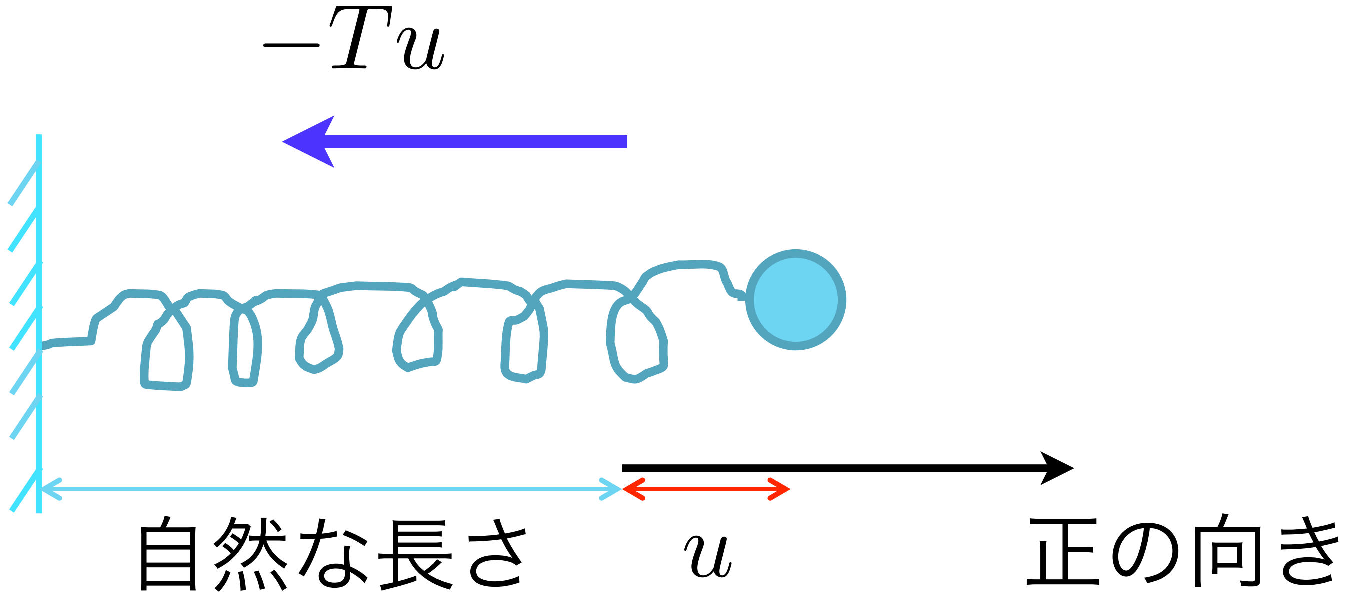
t　時刻　　v　速度　　u　変位

$$\Longleftrightarrow F = m\dot{v} \quad (\dot{v} = dv/dt)$$

$$\Longleftrightarrow \underline{F = m\ddot{u}} \quad (\ddot{u} = d^2u/dt^2)$$

Hookeの法則

ばねなどのもつ弾性力は変形量 u に比例する.



$$\boxed{\text{弾性力} = -Tu}$$

T バネ定数

3.2　外力なし・抵抗なしのケース　単振動

仮定:振動を引き起こす外的な力なし

空気や接地面の摩擦による抵抗なし

数式による定式化

$$\boxed{m\ddot{u} = -Tu}$$

変形

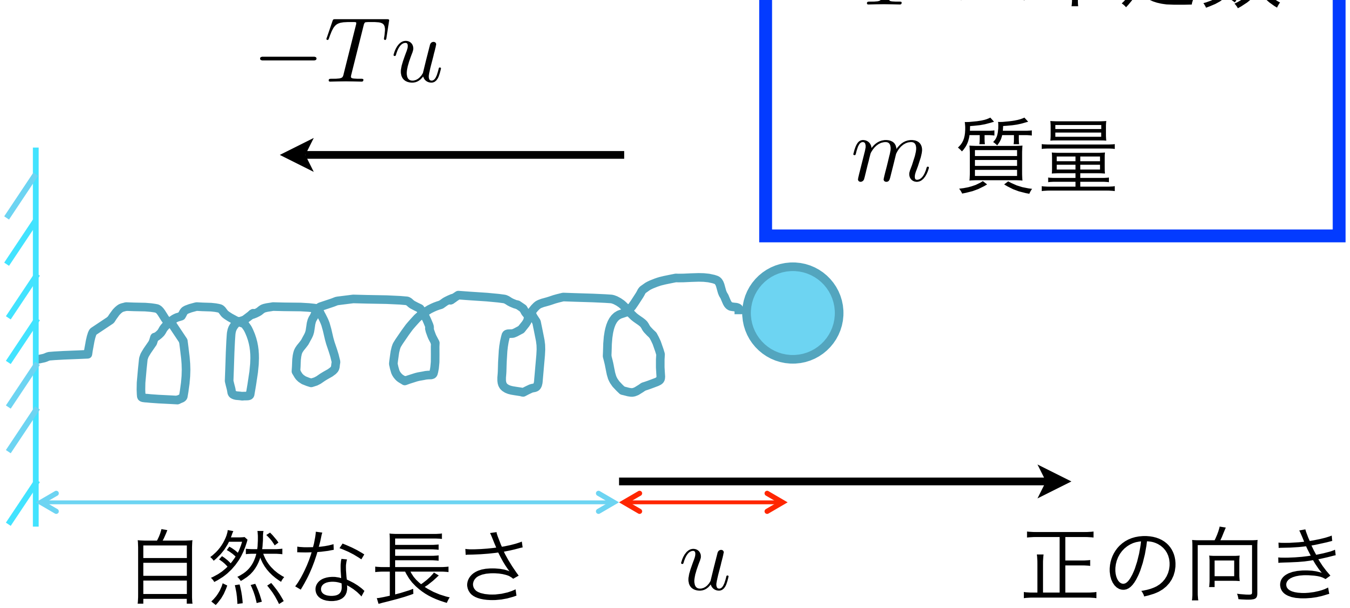
$$\ddot{u} + \underline{(T/m)}u = 0 \Longleftrightarrow \underline{\ddot{u} + \omega^2 u = 0}$$

ω^2 (オメガ2乗)とおく.

固有振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$

T バネ定数

m 質量



固有振動数は u に関して不変な量で,
おもりとバネによってのみ定まる量

例題7.　次の微分方程式を解け.

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$x^2 + \omega^2 = 0 \iff (x + i\omega)(x - i\omega) = 0$$

$$\iff x = \pm i\omega \quad \text{(虚数解)}$$

それゆえ, p.21例題5と同様にして

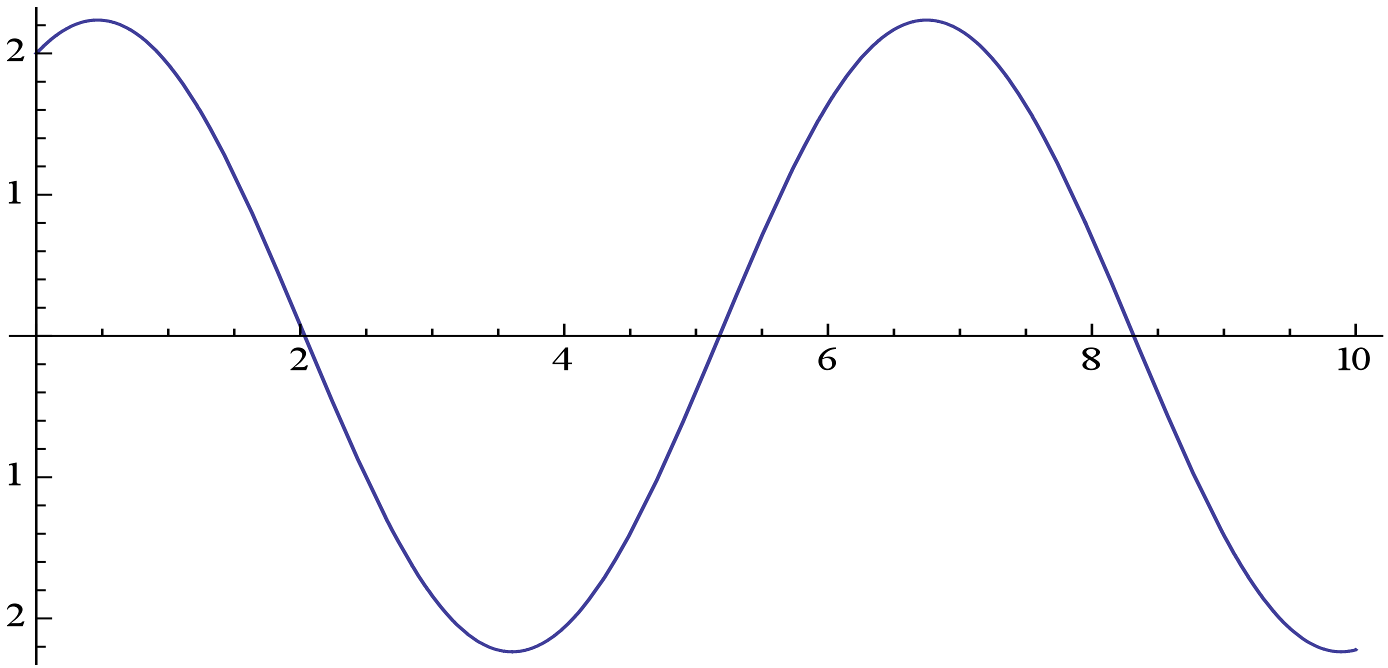
初期条件で定まる

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t + \alpha)$$

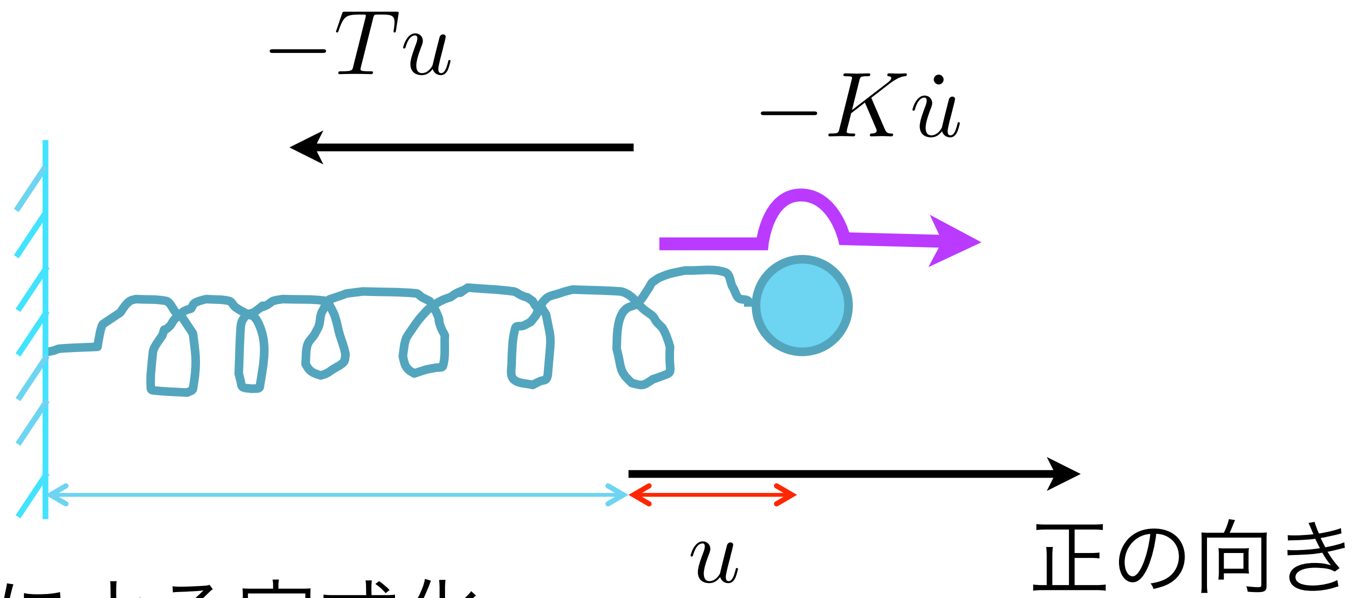
$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$= \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{\text{振幅}}\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{のグラフ}$$



$\boxed{\text{振幅が一定となる運動が周期的に繰り返される.}}$

3.3　外力なし・抵抗ありのケース



数式による定式化

$$\boxed{m\ddot{u} = -Tu - K\dot{u}}$$

変形 ⇒ $\underline{\ddot{u} + k\dot{u} + \omega^2 u = 0}$

例題8.　次の微分方程式を解け.

$$\ddot{u} + k\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

ただし, $k = \omega = 1$ とする.

付随する2次方程式を解く.

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff x = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$$

キーポイントは

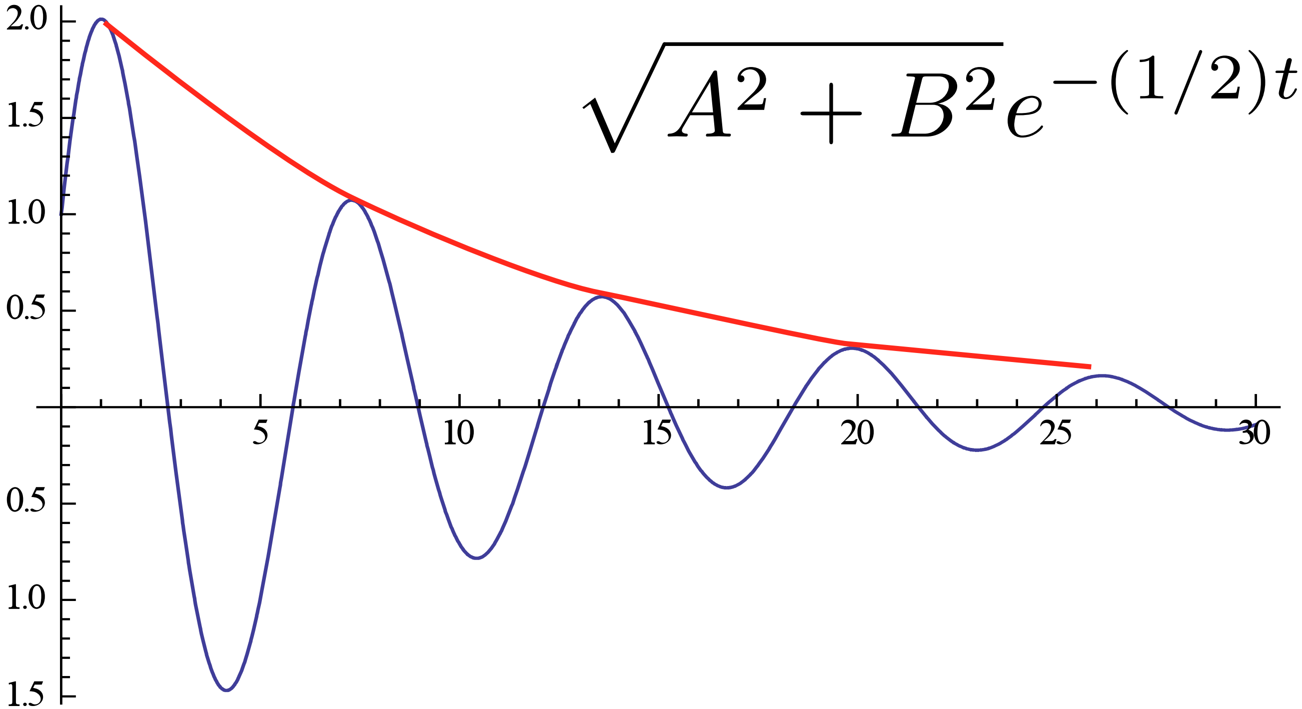
$x = \alpha \pm \beta i$ (虚数解)

$$\Longrightarrow u(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$$

よって,解は

$$u(t) = e^{-(1/2)t}(A\cos(\sqrt{3}/2)t + B\sin(\sqrt{3}/2)t)$$

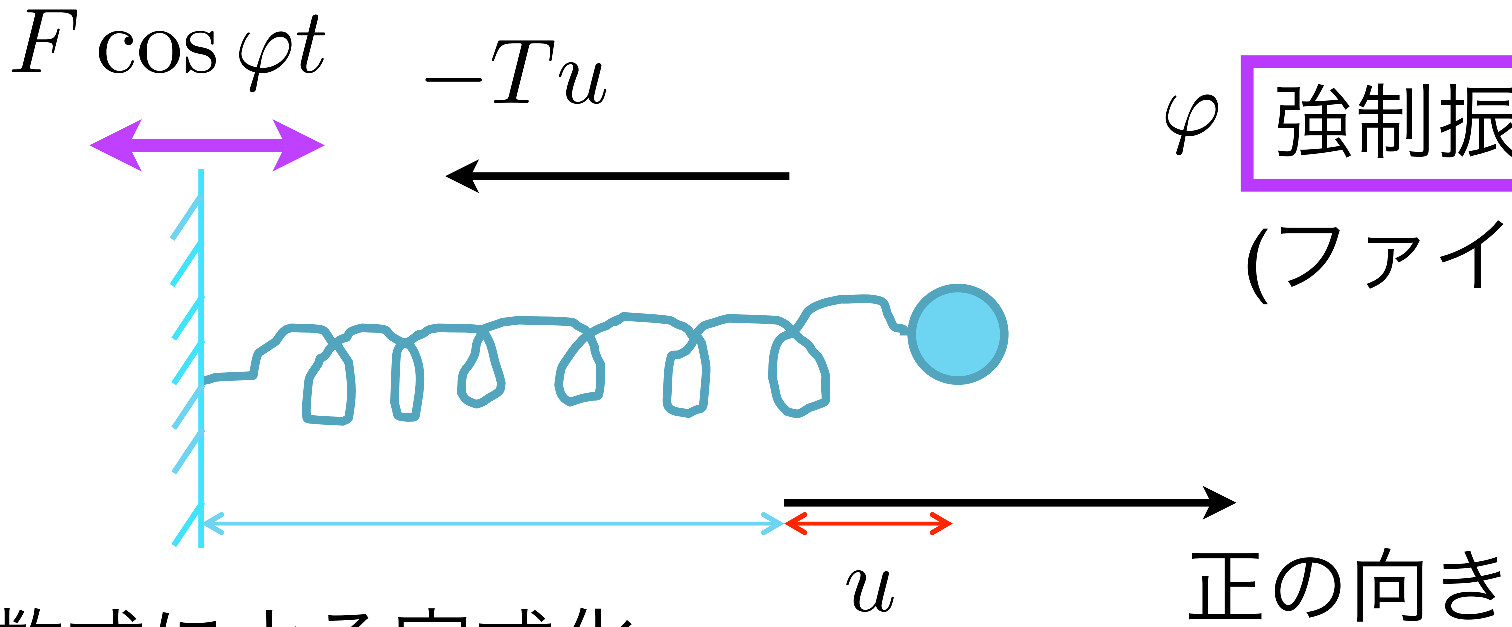
グラフは



減衰

振幅が周期的に小さくなり0に収束する運動

3.4　外力あり・抵抗なしのケース



φ 強制振動数

(ファイ)

数式による定式化

$$\boxed{m\ddot{u} = -Tu + F\cos\varphi t}$$

変形

$$\underline{\ddot{u} + \omega^2 u = f\cos\varphi t}$$

$\ddot{u} + \omega^2 u = \underline{f \cos \varphi t}$ を解く.

微分が線形
であることのおかげ

$\boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = \square \text{ の一般解}}$ 求めたいもの

$= \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \text{ の一般解}}$ 既知のもの

$+ \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = \square \text{ の}\underline{\text{特殊解}}}$

$\ddot{u} + \omega^2 u = f \cos \varphi t$ の特殊解

(I) $\varphi \neq \omega$ のとき

$$u(t) = \frac{f}{\omega^2 - \varphi^2} \cos \varphi t$$

(II) $\varphi = \omega$ のとき

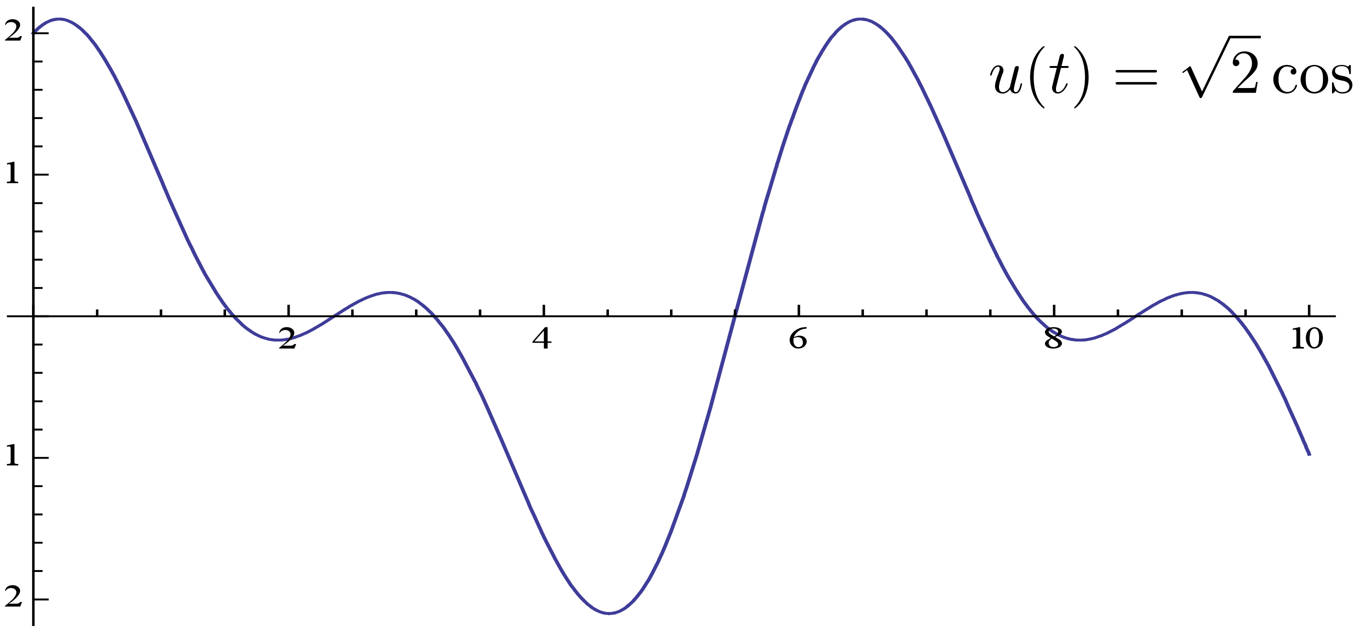
$$u(t) = \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$

ゆえに, 一般解は

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \alpha) + u(t)$$

(I) $\varphi \neq \omega$ のとき $\boxed{\text{強制振動数}} \neq \boxed{\text{固有振動数}}$

$$u(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{\omega^2 - \varphi^2}\cos\varphi t$$

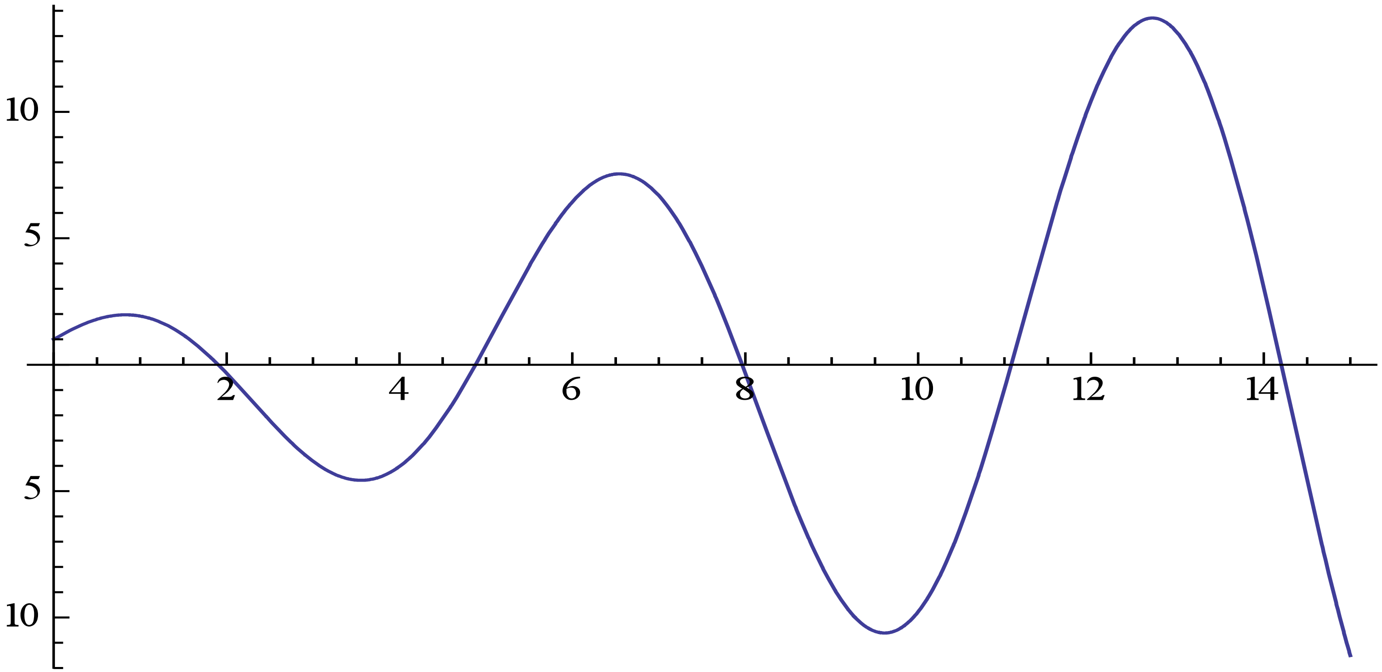


$$u(t) = \sqrt{2}\cos(t - 45^\circ) + \cos 2t$$

$\boxed{\text{振幅が一定ではないが, 減衰せず周期的な運動}}$

(II) $\varphi = \omega$ のとき 強制振動数 $=$ 固有振動数

$$u(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$



共振

振幅が周期的に増大して, 発散する運動！

3.5　総括

共振(共鳴)とは,

外力による強制振動数と固有振動数が一致するときに引き起こされる現象である.

共鳴が災害となったと考えられている事例

(I) ブロートン吊り橋(Manchester, 1831)

(II) タコマ橋(Washington, 1940)

技術者や科学者は, 共振の現象を
警戒しなくてはならない.
建築物の安全性の観点から,
建築物の構造を検証する際には,
固有振動数の計算することが必要である.

一方で, 共振を上手く利用すれば, エネルギーを効果
的に得ることができる. 未来の君たちに期待する！

参考文献

[1] デヴィッド バージェス・モラグ ホリー著
(垣田高夫・大町比佐栄 訳), 微分方程式で数学モデルを
作ろう, 日本評論社, 1990年

[2] 飽本一裕著, 今日から使える微分方程式, 講談社,
2006年

図・グラフ

[a] Godfrey Kneller作, Isaac Newtonの肖像画, 1689年
[b] 矢作由美作, 関数のグラフ(Mathematicaを使用),
2014年

THANK YOU!