高校数学の確率における
「試行」の「独立」について

2013.3

海城高等学校　数学科

小澤　嘉康

1　はじめに

本稿は，2013 年 3 月 14 日に行われた数学科教科会での談話会のレジュメに加筆したものである．

私は，授業で新しい単元に入る前には，教科書の内容をひと通り数学の言葉で全体を構成し，数学的に自分自身で納得してから授業の準備をはじめるようにしている．これは，数学は定義・公理からはじめて，後は論理的に定理・公式を導いていくので，途中での方針の変更は非常に困難であり，したがって，先に全体をとらえた上で，どこからはじめるのが良いか，つまり，何を定義にすれば良いのかを先に決めなければならない，という理由からである．

海城に就職してちょうど 10 年を迎えるが，今まで一度だけ自分自身で納得ができないまま，授業を行った箇所がある．それが本稿のテーマである，「試行」と「独立」の関係である．今回，自分自身で納得のできる解答を得たので，本稿を著すことにした．

数学の言葉では，確率は「測度論」と呼ばれる分野に属している．「測度論」とは簡単にいえば面積や体積を測るという内容で，いわゆる「積分」の範囲である．ただし，高校数学で扱われる積分（これを「リーマン積分」という）ではなく，より一般化した「ルベーグ積分」というものである．

詳細な説明は割愛するが，問題なのは，高校での確率は，その内容の特別な事情もあり，必ずしも「測度論」をもとにして論理的に構成されていないのではないか？ということである．

以下では，前半では，「試行」に対して「独立」や「独立でない」という定義は意味を持たないことを考察し，後半では，いわゆる「独立でない試行」は数学的にはどのように表現できるのかを見ていく．

本稿の内容はすべて伊藤清著「確率論 I」[1] によるものであり，それを高校の確率分野における「試行」と「独立」に適用しただけである．

また，もとが談話会のレジュメなので，口頭での説明なしに読んでもよくわからないところも多いと思うが，お許しいただきたい．

2 教科書では

多くの教科書，例えば数研出版 [2]（他の出版社も同様）での定義は，

- 【試行と事象】 同じ条件のもとで繰り返すことができ，その結果が偶然によって決まる実験や観察などを**試行**といい，その結果起こる事柄を**事象**という．
- 【独立な試行の確率】 2つの試行が互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立**であるという．

である．

では，独立でない試行とはいったいどういうものなのか？

独立な試行を定義しておきながら，独立でない試行について触れられていない教科書もあるが，数研出版 [2] では，例として，

- 当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから，1 本のくじを引く試行を 2 回行う．1 回目の試行を S，2 回目の試行を T とする．

  [C1] 引いたくじをもとに戻す場合

  試行 S と試行 T は独立である．

  [C2] 引いたくじをもとに戻さない場合

  試行 S で当たりを引いたときと，はずれを引いたときでは，残りの当たりくじの本数が異なり，試行 T での当たりやすさは異なる．試行 S の結果は試行 T の結果に影響を及ぼすから，試行 S と試行 T は独立でない．

をあげている．

しかしながら，[C2] の試行 T は，少なくともくじの本数は 14 本しかないので,「当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから，1 本のくじを引く試行」ではない．

詳しく分析してみると，

- 試行 S は,「当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから 1 本のくじを引く」であり,
- 1 回目に当たりが出た場合，試行 T は,「当たりくじ 1 本を含む 14 本のくじから 1 本のくじを引く」（試行 T_1 とする）であり,
- 1 回目にはずれが出た場合，試行 T は,「当たりくじ 2 本を含む 14 本のくじから 1 本のくじを引く」（試行 T_0 とする）である.

つまり，試行 S の結果により，次の試行 T を T_1 にするか T_0 にするかの影響は受けるが，試行 T 自体が試行 S の影響を受けているのではない.

また，そもそも試行の定義が「同じ条件のもとで繰り返すことができ ‥」とするのならば当たりくじの本数が異なるものは別の試行としなければいけない.

では，互いに影響を及ぼしあう試行とはいったいどんなものなのだろう.

別の観点から考察する.

- 試行の結果の全体集合として全事象を定義するので，一つの試行に対し，全事象は一つに定まる．また，高校では「同様に確からしい」をベースにしているので，全事象が定まれば確率法則が自然と決まる．つまり，一つの試行に対し確率空間は一つに定まるということである．つまり，他から影響を受ける余地がないのである.
- 独立の定義が「２つの試行において」で始まるので，先に行う試行 S の結果によって，次に行う試行が T_1 なのか T_0 なのか不確定である，という意味で独立でないとするのは無理がある.
- 同様に確からしいをベースにせず，例えば，試行 T を「当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから，1 本のくじを引く」としつつも，S で当たり 1 が出たときは，確率法則を

  $$P(\{1\}) = 0, \quad P(\{2\}) = P(\{3\}) = \cdots = P(\{15\}) = \frac{1}{14}$$

  とし，S ではずれ 15 が出たときは

  $$P(\{1\}) = \cdots = P(\{15\}) = \frac{1}{14}, \quad P(\{15\}) = 0$$

  のように，全事象に入れる確率法則に不確定さがあるという意味で独立でないととらえるのも，不自然さがある.

さらにこの考え方では，因果関係の範囲が非常に不透明である．100 年前の試行 S の影響が試行 T に及ばないことの説明がつかない．

以上のことより，試行はすべて「独立」であると考えるのが自然である．したがって,「独立な試行」という言葉を定義する意味がない．

3　具体例

[C2] の設定で，いくつか具体的に計算をしてみる．

試行 T は「当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから，1 本のくじを 2 回引く．ただし引いたくじをもとに戻さない．」であり，

確率空間を $(\Omega,\, P)$ とする．

また，事象として，

- E：2 回とも当たる
- E_1：1 回目に当たる
- E_2：2 回目に当たる

を考える．もちろん $E = E_1 \cap E_2$ である．

すると，

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,\,1),\ (1,\,0),\ (0,\,1),\ (0,\,0)\},\\
P(1,\,1) &= \frac{{}_2\mathrm{P}_2}{{}_{15}\mathrm{P}_2} = \frac{1}{105},\\
P(1,\,0) &= \frac{2 \times 13}{{}_{15}\mathrm{P}_2} = \frac{13}{105},\\
P(0,\,1) &= \frac{13 \times 2}{{}_{15}\mathrm{P}_2} = \frac{13}{105},\\
P(0,\,0) &= \frac{{}_{13}\mathrm{P}_2}{{}_{15}\mathrm{P}_2} = \frac{78}{105}
\end{aligned}
$$

となる．(なお，簡潔のため同様に確からしいベースではない)

$$P(E) = P(1,\,1) = \frac{1}{105}$$

$$P(E_1) = P(1,\,1) + P(1,\,0) = \frac{14}{105}$$

$$P(E_2) = P(1,\,1) + P(0,\,1) = \frac{14}{105}$$

$$P_{E_1}(E_2) = \frac{P(E)}{P(E_1)} = \frac{1}{14}\ (\text{条件付き確率})$$

より，$P(E_2) \neq P_{E_1}(E_2)$ なので，事象 E_1 と E_2 は独立ではない．

4　乗法律

複数の試行を続けて行うとき，これらを改めて一つの試行とするときについて見てみる．

試行 T_1 の確率空間を $(\Omega_1,\,P)$,

試行 T_2 の確率空間を $(\Omega_2,\,P)$ とする．

先に T_1 をして次に T_2 をするときの，合わせた試行を T とすると，

試行 T の全事象 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ であり[1]，確率法則は，$A \subset \Omega$ に対し，$A = A_1 \times A_2\,(A_1 \subset \Omega_1,\,A_2 \subset \Omega_2)$ とすると，

$$P(A) = P(A_1) \times P(A_2)\ (\text{乗法律})$$

とする．なお，この乗法律を公理として導入することと，すべての試行が「独立である」とすることは同じ事である．

5　集合の言葉では

[2] についてもう一度見てみる．

試行 S を「当たりくじ 2 本を含む 15 本のくじから 1 本のくじを引く」とし，

1 回目に当たりが出た場合の次の試行「当たりくじ 1 本を含む 14 本のくじから 1 本のくじを引く」を試行 T_1 とし，

1 回目にはずれが出た場合の次の試行「当たりくじ 2 本を含む 14 本のくじから 1 本のくじを引く」を試行 T_0 とする．

また，試行 S の全事象を Ω_S，試行 T_1 の全事象を Ω_1，試行 T_0 の全事象を Ω_0 とする．

[1]普通の意味での直積ではなく，正確には，$\{A_1 \times A_2 \,|\, A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega_2\}$ の意味である．

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & T_0 \\ S & & \\ & \searrow & T_1 \end{array}$$

となるが，S ではずれが出ても，当たりが出ても試行 S に続けて，試行 T_0 と T_1 を行う新たな試行 $\tilde{T}$ を考える：

$$\tilde{T} = S \times T_0 \times T_1$$
$$\tilde{\Omega} = \Omega_S \times \Omega_0 \times \Omega_1$$

ここで，

$$\tilde{E} = E_S \times E_0 \times E_1 \quad (E_S \subset \Omega_S,\, E_0 \subset \Omega_0,\, E_1 \subset \Omega_1)$$

に対しては，

$$\tilde{P}(\tilde{E}) = P(E_S) \cdot P(E_0) \cdot P(E_1)$$

である．(乗法律)

さらに，射影 $pr : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ を，

$$pr(0,\, a,\, b) = (0,\, a)$$
$$pr(1,\, a,\, b) = (1,\, b)$$

と定義する．

そして，確率空間 $(\Omega,\, P)$ の確率法則 P を，

$$\omega \in \Omega, \quad P(\omega) = \tilde{P}(pr^{-1}(\omega))$$

と定義すると，$(\Omega,\, P)$ は先の **3 具体例** での計算結果と一致する．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{p}} & [0,\, 1] \\ {\scriptstyle pr}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle p} & \\ \Omega & & \end{array}$$

参考文献

[1] 伊藤清『岩波講座　基礎数学　確率論 I』岩波書店 (1976)

[2] 坪井俊他『数学Ａ』数研出版 (2011)